上海市大学教材

高等数学

（理科用）

上册

第二版

上海人民出版社

上海市大学[illegible] 高等数学（理科用） 上册 第二

上海市大学教材

高等数学

（理科用）

上册

第二版

《高等数学》编写组

上海人民出版社

上海市大学教材
高 等 数 学
(理 科 用)
上　册
第 二 版
《高等数学》编写组
上海人民出版社出版
(上 海 绍 兴 路 5 号)
新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷
开本850×1156 1/32　印张11　字数270,000
1974年11月第2版　1974年11月第2次印刷
印数 1—30,000
统一书号: 13171·39　　定价: 0.88 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

第二版说明

理科用《高等数学》共三册．上册内容是一元函数微积分和常微分方程，中册以级数、广义积分、多元函数微积分为主，下册包括复变函数、偏微分方程、矩阵、概率论和算法语言．

根据第一版试用情况，我们对上册和中册作了修改，上册的主要补充和修改有：

1．在进一步学习马克思的《数学手稿》和马列著作的基础上，对一些基本概念，如导数、微分、积分等的解说，作了补充．

2．将原上册中导数和积分的一些应用和原中册的泰勒公式等，合并为新的一章："微积分的进一步应用"，作为实例，还选编了一个生产实际课题——微积分在三角活塞旋转式发动机设计制造中的一些应用．

3．将极限的"ε-N"和"ε-δ"表达方法移到中册级数一章里．

4．原中册的空间解析几何一章(包括向量代数)，有的专业把这一内容并入物理、力学中讲，有的放在微积分之前讲，考虑到这种情况，把这一章移作上册的附录．

此外，书后增附了习题答案．

使用时，可按各专业要求，对内容加以取舍和更动次序，同时还应结合专业需要和典型课题、典型产品，选编部分补充教材．

由于我们的马列主义水平不高，对毛主席的教育革命思想学习得不够，实践经验又不足，因而教材中存在的缺点和错误一定不少，恳切地希望工农兵大学生、教师和广大读者提出批评和意见．

参加本书编写的单位有复旦大学、上海科学技术大学和上海师范大学．

目　录

绪 论

“人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。” 数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学，它和一切自然科学一样，**“是人们争取自由的一种武装。”**

初等数学是常数的数学，而高等数学则是变数的数学，其中最重要的部分是微积分．微积分是在实践中产生和发展起来的，它是辩证法在数学中的运用，是我们认识自然和改造自然的数学工具．学习高等数学，必须联系实际，做到理论和实践的统一，为三大革命运动服务．

一、微积分是在实践中产生和发展起来的

“马克思主义者认为人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西。” 自然科学从来都是和生产活动紧密联系着的，它在人类生产实践中产生，为生产斗争和阶级斗争服务，又在生产实践基础上得到发展．近代高等数学的微积分，就是在资本主义初期的生产实践中产生和发展起来的

微积分是研究事物运动和变化规律的数学方法．客观世界的事物都处在不停的运动和变化中，运动和变化的情况又是多种多样的．就拿最简单的机械运动来说，有些运动过程是比较均匀的．譬如，一个人在通常情况下走路，快慢变化不大，就可以把这种运动看成是匀速的．但是，大量的运动过程是不均匀的，炮弹从炮膛里出来，经过空中的飞行到击中目标，在这整个过程中，炮弹飞行的

快慢不一样，称为变速运动. 处理匀速运动的问题很简单，只要用初等数学中的除法和乘法就够了. 象上面的例子，如果已经知道这个人在 3 小时内走过 15 公里，那末他的速度就是 $\frac{15}{3}$ 公里/时，每小时走 5 公里，这是除法；反过来，知道他的速度是 5 公里/时，那末经过 3 小时后，所走的路程就是速度乘上时间 ($5\times3=15$ 公里)，这是乘法. 已知路程求速度和已知速度求路程是同一个运动的正反两个方面问题. 对于匀速运动来说，这正反两个方面的问题反映在数学上，就是除和乘这一对矛盾.

对于变速运动来说，初等数学中除和乘的运算就远远不够了. 因为路程被时间除，得到的是在这段时间内的平均速度，在匀速运动情况下，平均速度就是所要知道的准确速度；但是在变速运动情况下，平均速度只是大致地表现运动状况. 同样地，在变速运动情况下，速度随时在变化，只用乘法就不能正确地计算出路程.

这样，从研究匀速运动到进一步研究变速运动，在数学上，除和乘这一对矛盾，就发展为一对新的矛盾：微分和积分. 微分是从量上把事物的运动过程无限细分，反映过程中每个瞬间的变化状况，如炮弹在飞行中每一瞬间的速度(叫做瞬时速度). 我们知道路程被时间除得的是平均速度，如果把时间间隔分得越来越小，那末平均速度越来越接近瞬时速度；一旦时间间隔变到零，这时的速度就成为变速运动中某一时刻真实的瞬时速度了. 这个时间间隔的变化到零称为时间的微分，相应地，路程的变化到零称为路程的微分. 经过这样的一个过程，所得到的平均速度就转化为瞬时速度，表现为路程微分被时间微分除得的“商”，数学上叫做微商.

正如乘法是除法的反面一样，积分是微分的反面，它把事物的运动过程无限细分，同时又无限累积起来，反映事物经历变化全过程以后的整体结果. 在变速运动中，知道瞬时速度求路程就是一个积分问题. 变速运动的瞬时速度乘上时间的微分代表每个瞬刻的真实路程，它们的总和就成为变速运动所走过的一段路程. “无

限细分，无限求和”的微积分思想不仅包含在速度和路程的问题中，还包含在曲线的切线和曲线的长度以及曲线形的面积等等类似的大量问题中．反映着客观事物运动和变化规律的微分和积分这一对矛盾及其转化，构成了高等数学非常丰富的内容．

古代微积分思想的萌芽

“无限细分，无限求和”的微积分思想，在古代的中国和西方就已经有了萌芽．

两千多年以前的古希腊时代，地中海沿岸的奴隶们在繁重的生产劳动中，早就认识到搬运重东西时利用滚动要比滑动省力，在运输中广泛应用圆轮和圆轴的车子；用圆形的辘轳从井里提水，在建筑工程上作为起重工具等等．那时也已经出现水轮机，利用流水的冲力推动水轮转动，水轮又经过齿轮的作用带动碾磨．所有这些车轮、车轴、水轮和齿轮等工件制造得好不好，都直接影响到生产．要精密地制造这些工件就需要对圆形有精确的认识．生产实践的需要推动人们去研究数学问题，这些工件有一个共同的特征，都是圆形的，因此“圆形工件”就成了共同的物理模型．从这样的物理模型中又抽象出“圆”这个形的概念，成为数学的研究对象．在进一步研究圆形的过程中，出现了“无限细分，无限求和”的微积分思想萌芽．因此尽管数学“**以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。**”① 归根结蒂，生产实践是数学这门科学的源泉．

古希腊的科学家阿基米得（公元前287～212年）在解决许多实际问题的同时，研究了圆的周长和面积的计算问题．他利用圆的内接正多边形和外切正多边形来推算，边数越多，圆和多边形就越接近．从圆心到多边形角点的半径把多边形分成一个个三角形，也同时把圆分成一个个扇形．多边形的边数越多，一个个三角形就越接近扇形，三角形的底边（即多边形的一条直边）便近似扇形

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第85页．

的圆弧(曲线);三角形的面积便近似扇形的面积;各个三角形底边之和便近似圆周长;各个三角形面积之和就近似圆的面积．随着边数的增多，就越来越精确．阿基米得从最简单的六边形一直做到96边形，得出圆周长和圆的直径的比值（圆周率π）是$3\frac{10}{71}$与$3\frac{10}{70}$之间的数．在这个计算工作中，已包含了“无限细分，无限求和”的微积分思想萌芽：多边形不断增多边数，这就是对于圆周“无限细分”；由总和许多三角形来求圆周长及圆面积，这就是“无限求和”．同时，这里直和曲的相互转化是微积分的一个基本思想，“直线和曲线在微分中终于等同起来了”．①

我国古代，也早就有了微积分思想的萌芽．汉朝的《西京杂记》里曾经提到一种能够记录里数的“记里车”．它是利用车轮的转动，通过齿轮传动，把车行的里数表示出来，所谓“车行一里，木人辄击一槌”．在这种车子的制造中，车轮和齿轮圆周长要计算得相当精确．天文学家张衡(78～139年)制造了“浑天仪”，里面的仪器每天恰好均匀地转一周，它是用齿轮来传动的，也要求对圆周率计算得很精密．刘徽(公元三世纪，魏晋人)总结了这些成果，在他著的《九章算术注》中提出了用正多边形计算圆的“割圆术”：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”刘徽的“割”也就是细分，他割到圆内接正384边形，得到圆周率π为3.14，后来又进一步割到正3072边形，得到π的更精确的数值3.1416．“割圆术”也包含了微积分思想的萌芽．

古代劳动人民在生产实践中也早就解决了许多曲和直的矛盾．例如，七世纪初我国隋代建造的赵州桥，是一座跨度37米的大石拱桥，这么大一个拱圈就是用一块块长方条石砌成的．条石是一段段直线，但是看起来，砌成的拱圈却是一条近似的弧形曲线．这是微积分“以直代曲”生动的现实原型．那么，为什么当时没有能够形成完整的微积分理论呢？这同样也是由当时的生产实

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第241页。

践水平所决定的．不论是阿基米得所处的古希腊时代或者是刘徽所处的魏晋时期，当时的生产工具都比较简单，机械的运动还比较缓慢，反映在力学方面，基本上限于研究力的平衡等一类静力学问题的范围内；反映在几何学方面，也只是对简单的曲线和图形（例如对土地面积和器物容积）的计算．生产实践还没有提出进一步发展微积分思想的需要，数学还处在初等数学的阶段．这也说明，一种数学思想的萌芽是生产实践提出需要的结果，它的进一步形成和完善，也只有当生产实践有了进一步需要的时候才能实现．

十七世纪微积分的产生

“社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。”① 十七世纪，欧洲主要资本主义国家的工业和商业已经发展起来，各个资本主义国家为了实行资本原始积累，向外扩大贸易，残酷掠夺殖民地，争夺海上霸权，大量发展了航海、造船和军火工业．这些生产实践和战争活动提出了许多问题，要求自然科学来研究和解决．当时频繁的海上航行，由于船只不能精确地知道自己在海洋上的位置，造成了许多海难事故，这就提出测定船只位置的迫切需要．测定在海洋上的位置这个工作又促进了天文学的研究，而天文学的发展必须有更好的望远镜和更准的时钟．望远镜是由透镜组成的，透镜的镜面是曲的，这就需要研究光线穿过曲面（或曲线）时的折射现象．时钟的准确性在很大程度上取决于摆的等时性，摆作来回振动，它的速度随时在变化，因此对摆的研究已经不再是在静止状态下力的平衡问题，而是需要考察在运动状态下物体的位置和速度变化规律的动力学问题．

此外，农田灌溉和水利工程建设，需要研究水流调节问题；资本主义工业需要大量的煤和铁，使得矿井越挖越深，需要研究通风和抽水问题．这些都推动了流体力学的研究．

在战争中又提出了炮弹怎样才能打得准的问题，要求掌握炮

① 《马克思恩格斯选集》第四卷，人民出版社 1972 年版，第 505 页。

弹在空气中的运动规律，形成弹道学的研究.

资本主义初期的生产实践和战争所提出的这些问题，使得力学的研究从静力学进入了动力学问题. 因此在研究这些问题中，原来的常数数学方法就不够了. 常数数学可以反映相对静止的状态，计算力的平衡等静力学问题，但是它不可能反映事物运动的过程，计算变速运动中位置、速度以及力的变化规律等动力学问题. 为要做到这一点，就需要在数学中引进变数，向变数数学飞跃. 变数数学的重要部分微积分，就是在这样的历史条件下，适应阶级斗争、生产斗争和科学实验的需要而产生的.

“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”① 1637 年，笛卡儿发表《几何学》一书，把几何和代数统一起来，制定了解析几何，从运动的观点研究几何轨迹，将变数引进数学，点的运动就表现为两个位置变数 x 和 y 的依存关系，当 x（表示动点的横坐标）变化时，y（表示动点的纵坐标）也随之变化，从而描绘出点的运动状况. 一个变数 y 对另一个变数 x 的依存关系，数学上就称 y 是 x 的函数，表示它们之间的变化规律.

这样，数学就不仅表明事物的状态和事物运动的结果，而且也初步提供了反映事物的运动和变化过程的方法. 这时，生产实践向自然科学提出的大量问题也需要数学上有新的概念来反映事物运动和变化的规律，于是系统的微积分方法也就产生了. 牛顿直接从变速运动的物理模型中抽象出微积分概念；莱布尼茨则从曲线的切线问题中得出了微积分概念.

曲线的切线问题是从生产实践中提出来的. 为了提高望远镜的质量，就需要研究透镜的几何形状，分析透镜的聚光性能. 笛卡

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 236 页。

儿通过对透镜的光学研究，讨论曲线的切线问题．原来，光通过透镜时，要改变方向，发生曲折（折射），光的入射角与折射角成一定的比例关系．入射角就是光的入射线与镜面的法线的夹角，折射角是光的折射线与法线的夹角．曲线的法线和切线是互相垂直的，知道一个，就可以知道另一个．笛卡儿在《几何学》中提出了一些找出法线和切线的方法．后来，莱布尼茨研究和总结了笛卡儿等人的成果，终于在曲线的切线问题中得出了微积分概念．

牛顿也是在研究生产实践问题中制定微积分的，并且把它应用到实践中去．1687 年，牛顿发表《自然哲学的数学原理》．牛顿自己说："主要的研究关于重、轻、弹力、流体抵抗力以及其他吸引运动的力之状况；所以我们的研究是自然理论之数学原理．"所谓的重、轻、弹力、流体抵抗力以及吸引运动等"自然理论"，主要是指当时航海、战争和生产实践中提出来的自由落体、抛射体运动，摆的振动，行星的运行规律以及月球的运动规律等问题．这里的数学原理，主要的就是微积分．正如恩格斯所指出的，在十七世纪的自然科学中，占首要地位的"**是最基本的自然科学，即关于地球上物体的和天体的力学，和它同时并且为它服务的，是数学方法的发现和完善化。**"① 数学理论和方法总是服务于生产实践的需要，决不是和生产实践相脱离的．有时也可以根据已经总结出来的规律，从理论上推测某些事实的出现，但这还只是一种科学假说，只有当它回到实践中去经受检验以后，才能证明它的真理性．而片面地强调理论的独立性，实质上把微积分孤立地看成为"无源之水"，"无本之木"，这样的观点是错误的，它不符合微积分在生产实践中产生和发展起来的历史事实．

在这些关于地球上物体和天体的力学问题中，物体的位置和速度都在变化，它们是变速运动．牛顿就是在变速运动的物理模型中考察位置、速度、加速度的关系而得出微积分概念的．牛顿把

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 9 页．

他的微分运算理论叫做“流数法”，所谓流数就是速度．在变速运动中速度是位置对时间的微商．进一步，在变速运动中每个时刻的瞬时速度也随时在变化，怎样掌握这个变化状况呢？这就要又一次进行微商，速度的变化状况就要用速度的微商来反映，加速度是速度的微商．通过微分方法反映这些关系以后，那末回过来通过积分方法可以得到它们的逆关系：位置是速度的积分，速度又是加速度的积分．牛顿应用微积分讨论了许多动力学的问题，例如他研究了行星运动规律，即行星在太阳的引力作用下的运动，很精确地计算出行星的运行轨道和各个时刻的运行速度．他又运用微积分研究钟摆的振动问题．惠更斯曾经利用摆的等时性，制造了摆钟，引起了牛顿很大的注意．他用微积分方法计算出为保证摆的等时性所需要施加的机械外力．牛顿还考察了地球各处摆振动的实验资料，运用微积分得出地球是一个扁球而不是圆球的科学结论．这一切都表明，微积分是在研究实际问题中产生的．

十八世纪微积分的应用和发展

“认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。”十七世纪，在生产实践中产生了微积分．十八世纪数学史的主要内容是微积分回到生产实践中去得到更广泛的应用．生产实践中提出的新问题、新矛盾，又推动了微积分的进一步发展．生产实践始终是微积分发展的根本动力．离开了实践，理论就失去了它的基础，也就失去了它的生命力．

天体运动一直是当时的研究重点，在海洋上测定船只位置的实践需要推动了对它的研究．欧洲各个资本主义国家大量的商船和军舰作远洋航行，这就迫切需要能在远离大陆的情况下测定船只在海洋上的位置，即确定船只所在地点的经度和纬度．通过观测恒星，特别是北极星，确定纬度的问题基本上可以解决．至于确定经度的问题，就困难得多了．当时西班牙、荷兰、英、法等国的政府都悬赏征求解决确定经度的方法．为了这个目的，英国还在

1675 年建造了格林威治天文台，后来就以它所在的位置定为经度零度. 当时人们发现利用月球的运行规律可以帮助确定经度. 这就需要一张很精确的月球位置表. 但是要制定这样一张月球表很不容易，因为月球不只受到地球的引力，而且还受到太阳的引力，所以需要在月球、地球、太阳相互吸引中确定月球的运动规律，这就是所谓"三体问题". 牛顿已经着手去解决这个问题. 十八世纪初，瑞士数学家欧拉把牛顿所研究的"三体问题"进一步归结成微分方程. 欧拉还考虑到太阳距离月球远，因此对月球的影响要比地球对月球的影响相对地小一点，他便把太阳影响的一些次要项略去，将微分方程化得简单一些，便于求解. 后来，德国天文学家迈尔利用欧拉的这个"微扰方法"计算，在 1755 年编制出非常详细的月球表. 经过格林威治天文台检验，这张月球表相当精确，在航海上得到实际使用. 制定月球表测定经度的工作，说明了微积分在当时的生产实践中就得到应用，并且微积分也在应用中进一步发展，微扰方法一直到现在都是天文和物理研究中一个重要的数学方法.

微积分的另一项重大应用，是在弹道学方面. 弹道学是在战争的需要中发展起来的. 由于战争，促使火炮技术有了很大发展，炮弹的发射角度增大，飞行速度大为提高，因此空气对炮弹的阻力影响就显著起来，过去所用的抛物线就不能精确地反映实际的飞行轨道. 牛顿曾考虑空气对抛射体的阻力问题，开始用微积分去研究这个问题. 瑞士数学家约翰·贝努利和欧拉继续研究弹道学，在十八世纪初写出了炮弹运动规律的弹道微分方程，欧拉后来进一步提出求解这个微分方程的数值计算方法，把整个炮弹的飞行轨道分成一段一段，从炮弹出膛开始，逐段地计算. 接着便有人用这个方法编制出精确的弹道曲线表，提高了大炮的射击效能. 欧拉提出的这个"折线法"，也是一个基本的微分方程数值计算方法.

微积分也应用在其他许多生产实际问题上. 例如，船舶在水