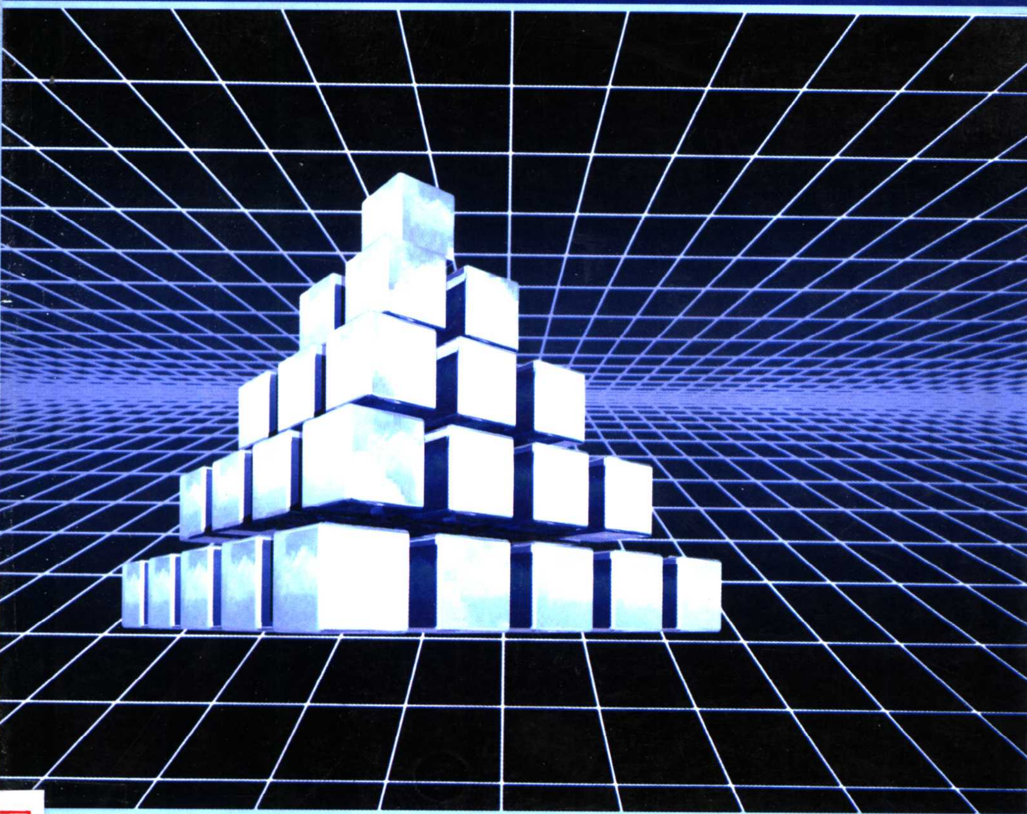
高等学校数学学习辅导教材

高等代数全程学习指导

GAODENG DAISHU QUANCHENG XUEXI ZHIDAO

冯 红 ◎ 编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校数学学习辅导教材

高等代数

·全程学习指导·

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数全程学习指导 / 冯红编著 .—大连 :大连理工大学出版社，2004.9
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2650-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 冯…　Ⅲ. 高等代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 102460 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:12.25　字数:323 千字
印数:1 ~5 000
2004 年 9 月第 1 版　　2004 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东　　责任校对:刘佳月
封面设计:宋　蕾

定　价:16.00 元

前言

《高等代数》是数学系本科生的一门基础课，也是数学系硕士研究生入学考试的一门必考科目。这门课程的特点是比较抽象，概念比较多，定理比较多，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透。学生在初学或备考研究生复习时，可能会遇到许多困难，特别在解题时缺少方法，以至一筹莫展。编写本书的目的是为初学者和备考研究生的同学进一步加深对课本内容的理解，扩大课堂信息量，提高应试能力。

本书按照被许多院校采用的北京大学数学系几何与代数教研室编写的《高等代数》(第三版)(高等教育出版社)的章节顺序分为十章，每章均设计了四个板块：

知识点与考点精要 列出基本概念、基本性质、重要定理和主要内容，突出必须掌握的或在考试中出现频率较高的核心知识点。

典型题与真题精解 从许多院校数学系硕士研究生入学考试试题及有关参考书中精选了有代表性的题目，给出了详细的解题思路及解答。旨在提高学生的分析问题能力，深刻理解基本概念，掌握一定的

理论基础，开拓解题的思路。

教材习题同步解析 对《高等代数》(北大版)书中的习题几乎给出了全部的解，这便于读者、尤其是自学者进行对照和分析。但知识的掌握、解题能力的提高只能靠自己不断地动脑动手。通过自身的不断实践、不断地总结经验，才能逐步提高自己的学习能力。切不可轻易地翻看答案。

模拟试题自测 读者可以用来测试自己对课程的掌握程度。自测题附有答案。

本书的初衷是为学习《高等代数》的数学系学生编写的，但《高等代数》的主要内容就是《线性代数》。因此本书的大部分内容(除第一、十章外)也适合学习《线性代数》和准备参加《高等数学》硕士研究生入学考试的同学们参考。

限于编者的水平及经验，错误与不当之处在所难免，恳请专家和读者批评指正。

编著者
2004 年 8 月

目 录

第一章　多项式

知识点考点精要

一、整除理论

1. 基本概念

(1) 整除

数域 P 上的多项式 $g(x)$ 称为整除 $f(x)$，如果有数域 P 上的多项式 $q(x)$，使

$$f(x) = g(x)q(x)$$

成立，$g(x) \mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$。

(2) 最大公因式

设 $f(x)$，$g(x)$ 是数域 P 上多项式环 $P[x]$ 中的两个多项式。$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式，如果它满足下面两个条件：

i) $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式；

ii) $f(x)$，$g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式。

以 $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为 1 的那个最大公因式。

(3) 互素

$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 称为互素的，如果 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x)) = 1$。

2. 基本性质

(1) 如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，那么 $f(x) = cg(x)$，其中 c 为非零常数。

(2) 如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，那么 $f(x) \mid h(x)$。

(3) 如果 $f(x) \mid g_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots, r$，那么

$$f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_r(x)g_r(x))$$

其中 $u_i(x)$ 是数域 P 上的任意多项式。

(4) 对于$P[x]$中任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，$P[x]$中一定有多项式$q(x)$，$r(x)$存在，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中$r(x)$的次数$\partial r(x)<\partial g(x)$，或者$r(x)=0$，并且这样的$q(x)$，$r(x)$是惟一确定的。

(5) 对于数域P上的任意两个多项式$f(x)$，$g(x)$，其中$g(x)\neq 0$，则$g(x)\mid f(x)$的充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$的余式为零。

(6) 对于$P[x]$中任意两个多项式$f(x)$和$g(x)$，在$P[x]$中存在一个最大公因式$d(x)$，且$d(x)$可以表示成$f(x)$，$g(x)$的一个组合，即有$P[x]$中多项式$u(x)$，$v(x)$使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

(7) $P[x]$中多项式$f(x)$，$g(x)$互素的充分必要条件是有$P[x]$中的多项式$u(x)$，$v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

(8) 如果$(f(x),g(x))=1$，且$f(x)\mid g(x)h(x)$，那么$f(x)\mid h(x)$。

(9) 如果$f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，那么$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

二、因式分解理论

1. 基本概念

(1) 不可约多项式

数域P上次数$\geqslant 1$的多项式$p(x)$称为数域P上的不可约多项式，如果它不能表示成数域P上的两个次数比$p(x)$低的多项式的乘积。

(2) 重因式

不可约多项式$p(x)$称为多项式$f(x)$的k重因式，如果$p^k(x)\mid f(x)$，但$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$。

(3) 本原多项式

如果一个非零的整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$互素，则称$f(x)$是本原多项式。

2. 基本性质

(1) 不可约多项式的性质

i) 设$p(x)$是不可约多项式，$f(x)$为任意多项式，则$p(x)\mid f(x)$或者$(p(x),f(x))=1$。

ii) 如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 一定可推出 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$。

(2) 因式分解定理

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以惟一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

(3) 重因式的性质

i) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式($k \geqslant 1$)，那么它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。

ii) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式($k \geqslant 1$)，那么 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。

iii) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x)$ 的公因式。

iv) 多项式 $f(x)$ 没有重因子的充分必要条件是 $(f(x),f'(x)) = 1$。

(4) 复系数多项式因式分解定理

每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域上都可以惟一地分解成一次因式的乘积。

(5) 实系数多项式因式分解定理

每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积。

(6) 有理系数多项式的性质

i) 高斯(Gauss)引理　两个本原多项式的乘积还是本原多项式。

ii) 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积。

iii) 艾森斯坦因(Eisenstein)判别法

设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

是整系数多项式。如果有一个素数 p，使得

1° $p \nmid a_n$;

2° $p \mid a_i, i = 0,1,\cdots,n-1$;

3° $p^2 \nmid a_0$。

那么，$f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

三、根的理论

1. 基本概念

(1) 多项式的根

如果多项式 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的函数值 $f(a)=0$，那么 a 就称为 $f(x)$ 的根或零点。

(2) 重根

如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，那么 a 称为 $f(x)$ 的 k 重根。当 $k=1$ 时，a 称为单根；当 $k>1$ 时，a 称为重根。

2. 基本性质

(1) 余数定理　用一次多项式 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(a)$。

(2) a 是 $f(x)$ 的根的充分必要条件是 $x-a \mid f(x)$。

(3) $P[x]$ 中 n 次多项式($n\geqslant 0$)在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算。

(4) 如果多项式 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 有相同的值，即

$$f(a_i)=g(a_i),i=1,2,\cdots,n+1$$

那么 $f(x)=g(x)$。

(5) 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$。特别地，如果 $a_n=1$，那么 $f(x)$ 的有理根都是整数根。

典型题真题精解

【例 1】 m,p,q 适合什么条件时，有

$$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$$

解法 1　待定系数法

如果

$$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$$

则可设

$$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x+a)$$

将上式右端展开，再比较同次项的系数，得

$$\begin{cases} a + m = 0 \\ ma - 1 = p \\ -a = q \end{cases}$$

解得

$$q = m,\quad p = -m^2 - 1$$

即当 $q = m, p = -m^2 - 1$ 时，$x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$。

解法 2　带余除法

应用除法，求得商式及余式，令余式为零，从而得到所求的条件。

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2 + mx - 1 & x^3 + \qquad\qquad px + q & x - m \\
 & x^3 + mx^2 \qquad\quad - x & \\
\hline
 & -mx^2 + (p+1)x + q & \\
 & -mx^2 \qquad - m^2x + m & \\
\hline
 & (p + 1 + m^2)x + q - m &
\end{array}$$

余式为　$$(p + 1 + m^2)x + q - m = 0$$

于是得

$$\begin{cases} p + 1 + m^2 = 0 \\ q - m = 0 \end{cases}$$

由此知，当 $p = -m^2 - 1, q = m$ 时，$x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$。

【例 2】　证明：$x^d - 1 \mid x^n - 1$ 当且仅当 $d \mid n$。

证明　充分性

设 $d \mid n$，令 $n = qd$，则

$$x^n - 1 = (x^d)^q - 1 = (x^d - 1)(x^{d(q-1)} + x^{d(q-2)} + \cdots + x^d + 1)$$

所以

$$x^d - 1 \mid x^n - 1$$

必要性　设 $n = qd + r, 0 \leqslant r < d$

$$x^n - 1 = x^{qd+r} - 1 = (x^{qd} - 1)x^r + (x^r - 1)$$

由充分性的证明可知，$x^d - 1 \mid x^{qd} - 1$，从而，由 $x^d - 1 \mid x^n - 1$，得出 $x^d - 1 \mid x^r - 1$，而 $0 \leqslant r < d$，于是必有 $r = 0$。从而 $d \mid n$。

【例 3】　设

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$$

$$g(x)=x^3+x^2-x-1$$

求$(f(x),g(x))$，并求$u(x),v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

解 应用辗转相除法

	$g(x)$	$f(x)$	
$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	$x=q_1(x)$
$=q_2(x)$	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$r_1(x)=-2x^2-3x-1$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	$=q_3(x)$
	$r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		$r_3(x)=0$	

用等式写出来，就是

$$f(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(-2x^2-3x-1)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$-2x^2-3x-1=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

因此

$$(f(x),g(x))=x+1$$

而

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}&=g(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(-2x^2-3x-1)\\&=g(x)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(f(x)-xg(x))\\&=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)f(x)+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+1\right)g(x)\end{aligned}$$

于是

$$(f(x),g(x))=\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)f(x)+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)g(x)$$

$$u(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$$

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

【例 4】（南京大学，2001）设 F,F_1 是数域，且 $F\subset F_1$，$f(x),g(x)\in F[x]$。

（1）证明：如果在 $F_1[x]$ 中有 $g(x)|f(x)$，则在 $F[x]$ 中，也有 $g(x)|f(x)$。

（2）证明：$f(x),g(x)$ 在 $F[x]$ 中互素当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $F_1[x]$ 中互素。

（3）证明：设 $f(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式，则 $f(x)$ 的根全是单根。

证明　（1）在 $F[x]$ 中，由带余除法，有 $q(x),r(x)\in F[x]$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{a}$$

且 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$。若在 $F[x]$ 中，$g(x)\nmid f(x)$，则 $r(x)\neq 0$，又 $F\subset F_1$，因此，式(a)在 $F_1[x]$ 中仍成立，由 $r(x)\neq 0$ 知，在 $F_1[x]$ 中，$g(x)\nmid f(x)$。矛盾，故结论成立。

（2）若 $f(x),g(x)$ 在 $F_1[x]$ 中互素，显然 $f(x),g(x)$ 在 $F[x]$ 中互素。

反之，若 $f(x),g(x)$ 在 $F[x]$ 中互素，则存在多项式 $u(x)\in F[x],v(x)\in F[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1 \tag{b}$$

因 $f(x),g(x),u(x),v(x)\in F[x]\subset F_1[x]$，故式(b)在 $F_1[x]$ 中成立，由互素的充要条件知，$f(x),g(x)$ 在 $F_1[x]$ 中互素。

（3）因 $f(x)$ 为数域 F 上的不可约多项式，所以 $(f(x),f'(x))=1$，由(2)，在 F 的任意扩域 $F_1(F\subset F_1)$ 上，$f(x),f'(x)$ 仍互素。因此 $f(x)$ 没有重根。

【例 5】（北京大学，2002）设 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：对任意的非负整数 n，

$$(x^2+x+1,f_n(x))=1$$

证明　反证法

若 $(x^2+x+1,f_n(x))\neq 1$，则存在多项式 $x-a$，使

$$x-a|x^2+x+1,\quad x-a|f_n(x)$$

于是得

$$a^2+a+1=0\ ,\ f_n(a)=0$$

即 a 是 3 次单位根，$a^3=1$。

$$\begin{aligned}f_n(a)&=a^{n+2}-(a+1)^{2n+1}=a^{n+2}-(-a^2)^{2n+1}\\&=a^{n+2}+a^{4n+2}=a^{n+2}(1+a^{3n})=2a^{n+2}\neq 0\end{aligned}$$

矛盾。因此

$$(x^2+x+1, f_n(x))=1$$

【例 6】（北京大学，2000）设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 都是首项系数为 1 的整系数多项式，且 $p(x)$ 在有理数域 Q 上不可约。如果 $p(x)$ 与 $f(x)$ 有公共复根 α，证明：

(1) 在 $Q[x]$ 中，$p(x)$ 整除 $f(x)$；

(2) 存在首项系数为 1 的整系数多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)=p(x)g(x)$$

证明 (1) 在 $Q[x]$ 中，如果 $p(x)$ 不整除 $f(x)$，则

$$(p(x), f(x))=1$$

于是在 $Q[x]$ 中存在多项式 $u(x), v(x)$，使

$$u(x)p(x)+v(x)f(x)=1$$

将 α 代入等式两边，得

$$0=u(\alpha)p(\alpha)+v(\alpha)f(\alpha)=1$$

矛盾。

所以 $p(x)\mid f(x)$。

(2) 由(1)可知，存在 $Q[x]$ 上多项式 $q(x)$，使

$$f(x)=p(x)q(x)$$

令 $q(x)=\frac{n}{m}g(x)$，其中 $(m,n)=1$，$g(x)$ 是本原多项式，

$$f(x)=\frac{n}{m}p(x)g(x)$$

因 $f(x), p(x), g(x)$ 皆为本原多项式，且 $f(x), p(x)$ 的首项系数为 1，所以 $m=n=1$，$g(x)$ 也是首项系数为 1 的多项式。

【例 7】（华东师范大学，1996）设 $f(x), g(x)\in P[x]$，n 为正整数。证明：如果 $f^n(x)\mid g^n(x)$，则 $f(x)\mid g(x)$。

证明 应用多项式的标准分解式，设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_m^{r_m}(x)$$

$$g(x)=bp_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x)$$

其中 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ 是互不相同首系为 1 的不可约多项式，$a, b\in P$，$r_i, s_i (i=1,\cdots,m)$ 是非负整数。

$$f^n(x)=a^n p_1^{r_1 n}(x)p_2^{r_2 n}(x)\cdots p_m^{r_m n}(x)$$

$$g^n(x)=b^n p_1^{s_1 n}(x)p_2^{s_2 n}(x)\cdots p_m^{s_m n}(x)$$

如果 $f^n(x)\mid g^n(x)$,则 $r_i n\leqslant s_i n,(i=1,2,\cdots,m)$。于是 $r_i\leqslant s_i,(i=1,2,\cdots,m)$,从而 $f(x)\mid g(x)$。

【例 8】（华东师范大学,1997）证明:一个非零复数 α 是某一有理系数非零多项式的根的充要条件为存在一个有理系数多项式 $f(x)$,使

$$\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$$

证明　必要性

设 $g(x)$ 是一个次数最低的以 α 为根且首系为 1 的有理系数多项式,

$$g(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

由 $g(x)$ 的选取知 $a_n\neq 0$,令

$$f(x)=-\frac{1}{a_n}x^{n-1}-\frac{a_1}{a_n}x^{n-2}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

则

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=-\frac{1}{a_n}\alpha^{n-1}-\frac{a_1}{a_n}\alpha^{n-2}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\&=\frac{1}{\alpha}(-\frac{1}{a_n}\alpha^n-\frac{a_1}{a_n}\alpha^{n-1}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha)\\&=\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{g(\alpha)-a_n}{a_n}\right)=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

充分性

设存在有理系数多项式 $f(x)$,使

$$\frac{1}{\alpha}=f(\alpha)$$

令

$$g(x)=xf(x)-1$$

则 $g(x)$ 为非零的有理系数多项式,且

$$g(\alpha)=\alpha f(\alpha)-1=0$$

【例 9】　求多项式

$$f(x)=x^4+2x^2+9,\quad g(x)=x^4-4x^3+4x^2-9$$

的公共根。

解　由辗转相除法得

$$(f(x),g(x))=x^2-2x+3$$

解方程

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

得

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}\,\mathrm{i},\quad x_2 = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$$

由此，多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的公共根为 $x_1 = 1 + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$，$x_2 = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$。

多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的公共根一定是它们的最大公因式的根。反之亦然，因此，求 $f(x)$，$g(x)$ 的公共根时，可先求 $d(x) = (f(x), g(x))$，然后求 $d(x)$ 的全部根，即得到 $f(x)$，$g(x)$ 的公共根。

【例 10】 证明：$x^8 + 1$ 在有理数域上不可约。

证明 设 $f(x) = x^8 + 1$，作代换 $x = y + 1$，得

$$\begin{aligned} g(y) &= f(y+1) = (y+1)^8 + 1 \\ &= y^8 + 8y^7 + 28y^6 + 56y^5 + 70y^4 + 56y^3 + 28y^2 + 8y + 2 \end{aligned}$$

取 $p = 2$，由于 $2 \nmid 1$，2 整除 8，28，56，70，56，28，8，$2^2 \nmid 2$，故由艾森斯坦因判别法知，$g(y) = f(y+1)$ 在有理数域上不可约，从而 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

判定一个有理系数（或整系数）多项式不可约的最简单的方法是用艾森斯坦因判别法。如果不能直接用该判别法，可作一个变换。

【例 11】 （南京大学，2002）证明多项式

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}$$

在有理数域上不可约，其中 p 为一素数。

证明 $f(x) = \dfrac{1}{p!}(p! + p!x + p(p-1)\cdots 3x^2 + p(p-1)\cdots 4x^3 + \cdots + px^{p-1} + x^p)$

设

$$\begin{aligned} g(x) = {} & p! + p!x + p(p-1)\cdots 3x^2 + p(p-1)\cdots 4x^3 + \\ & \cdots + px^{p-1} + x^p \end{aligned}$$

素数 p，

i) $p \nmid 1$；

ii) $p \mid p, p(p-1), \cdots, p(p-1)\cdots 3, p!, p!$；