适合于高等教育自学考试
适合于普通高等院校学生

中国管理软件学院

# 高等数学新考前冲刺

主编 王玲

国防工业出版社

# 高等数学新考前冲刺

主 编 王 玲

国防工业出版社

·北京·

# 内容简介

本书共分五大部分。第一部分是高等数学学习要点综述，共有十三项内容。第二部分是高等教育自学考试试题选编(1996年—2003年)，并附高等数学自学考试大纲。第三部分是针对文凭考试考生编写的，包括与教科书对应的六个基本内容的大量练习题。第四部分是高等数学文凭考试试题选编(1997年—2003年)。第五部分是中国管理软件学院十一套模拟仿真试题，并附高等数学文凭考试大纲。

读者对象：参加高等教育数学自学考试或文凭考试的广大读者。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学新考前冲刺／王玲主编．—北京：国防工业出版社，2004.9

ISBN 7-118-03506-8

Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学－高等教育－自学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046414 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 18½ 456 千字
2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷
印数：1—5000 册 定价：26.00 元



国防书店：68428422 发行邮购：68414474
发行传真：68411535 发行业务：68472764

# 序

中国管理软件学院成立于1984年，在北京市教委的正确领导下，在全国许多著名的计算机软件和电子信息专家的亲切关怀和指导下，面向现代化、面向世界、面向未来，培养高科技高级专业技术人才和信息管理人才，按照“强专业、高质量”的方针，在教学改革、严格管理、加强建设和探索高级人才培养模式等方面取得了出色的成绩。1993年，中国管理软件学院经国家教委审定，被批准为第一批国家学历文凭考试试点院校；1994年被批准为计算机等级培训点之一；1995年，北京市高等教育自学考试委员会为我院单独开设通信工程专业；1996年，学院获得海淀区民办高校“香港迎回归知识竞赛”一等奖；1997年，被中国成人教育协会民办高等教育委员会评为“民办高校先进单位”；1998年，被北京市教委评为民办高校“优良学校”；2000年，被教育部信息管理中心批准为远程教育培训点；2001年，被北京市教委批准为北京首批24所合格民办高校之一；2002年，被北京市教委批准为北京市英语口语等级培训点及考试点；2003年，被北京市教委批准为全国计算机等级培训点及考试点，并被评为北京十大品牌实力民办高校；2004年，被教委评为全国六所优秀助学高校之一。这些成绩的取得是与市教委的领导和著名专家的指导分不开的，也是我们全体师生努力奋斗、顽强拼搏、极力创新、创建特色的结果。

我院以计算机控制及应用专业而闻名，以通信工程为名牌，以计算机网络专业为特色，以计算机软件及应用为优势。这四个专业代表了学院的特点，使全国的莘莘学子不远千里，慕名前来求学。随着高科技日新月异的发展，我院不断调整专业的深度和广度，并加强各专业的外语学习，使这些专业长盛不衰，符合社会发展的需要，为国家培养了许多急需的新型的有专业知识的技能型高科技人才，为国家的现代化建设作出了应有的贡献。

实践告诉我们，教育质量是民办高校的生命线，而好的教材是提高教学质量的一个重要方面。通过加强基本理论和基本技能的训练，使学生基础理论扎实，动手能力强，真正成为过硬的高科技应用型人才。

我院一向注重教材建设，编写了一套适合国家高等教育自学考试的系列教材及辅助教材，受到了许多读者的欢迎和赞扬，也得到了许多同仁的支持和帮助，在此表示深深的感谢。为了更好地为学生服务，我们把一些教材系列出版。希望使用这套书的读者提出更多的宝贵意见，以便我们今后能编写出更好更适用的教材，为我国的民办教育作出更大的贡献。

**中国管理软件学院院长**

**朱忠才**

2004年9月

# 前　　言

人类已迈进了21世纪，这是一个知识经济的时代。知识就是力量。追求知识，抓住机遇，寻求发展，迎接挑战。这就是新世纪年轻人的心声。

"高等数学"是高等教育自学考试及文凭考试中各专业的公共基础课，是一切现代社会科学和自然科学的基础知识，是学习和掌握现代科学技术管理的必要条件。编写《高等数学新考前冲刺》一书的目的，就是帮助广大考生提高应试水平，从而顺利通过高等教育自学考试及文凭考试。本书内容主要分为五部分：第一、二部分针对高等教育自学考试的考生，首先简述自考的主要内容，后附有近年的自考试题和教学大纲；第三、四、五部分针对高等教育文凭考试的考生，题型选择覆盖教学大纲的全部内容，充分体现了考试大纲对应试能力的要求，不但能够帮助考生复习、巩固所学的知识，而且为参加文凭考试做好准备；另外，还附加了中国管理软件学院十一套模拟试题。近几年，中国管理软件学院和其他一些民办院校，在国家考试前，让学生严格按照考试时间要求，独立完成每份试卷，然后由主讲教师评卷，分析易出错的地方。连续做几套试卷下来，对考前冲刺，效果非常好，能普遍提高考试分数，深受广大考生欢迎。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点和不足，恳请广大教师和考生谅解，并欢迎批评和指正。

编　者

# 目　　录

## 学习要点



## 高等教育自学考试试题选编

## 高等教育自学考试(一)及高等教育文凭考试习题选编

## 高等教育文凭考试试题选编



## 中国管理软件学院仿真模拟试题及答案

# 学 习 要 点

## 内容一　一元函数

- 一、分类
  - 1. 初等函数
    - (1) 基本函数
      - ① 常量函数 $y = a$
      - ② 幂函数 $y = x^a$
      - ③ 指数函数 $y = a^x$
      - ④ 对数函数 $y = \log_a x$
      - ⑤ 三角函数 $y = \sin x, \cdots$
      - ⑥ 反三角函数 $y = \arcsin x, \cdots$
    - (2) 简单函数
    - (3) 复合函数
  - 2. 分段函数
  - 3. 隐函数

对以上内容作如下说明。

1. 结构最简单的初等函数,称为基本函数.

2. 由基本函数仅经过加、减、乘、除四则运算而构成的初等函数,称为简单函数.

3. 由基本函数或简单函数经过乘方、开方、指数、对数、三角、反三角运算而构成的初等函数,称为复合函数.

若用 $\varphi(x)$ 表记基本的或简单的初等函数,则复合的初等函数可用$[\varphi(x)]^a$,$\sqrt{\varphi(x)}$,$\log_a\varphi(x)$,$\sin\varphi(x)$,$\cdots$,$\arcsin\varphi(x)$,$\cdots$ 及 $a^{\varphi(x)}$ 等形式来表记,还可笼统地表为 $f[\varphi(x)]$.

4. 基本函数,简单函数,复合函数统称为初等函数.

5. 因变量与自变量的关系,在自变量取值的各区间段,要用不同表达式的函数,称为分段函数.

6. 因变量与自变量的函数关系,是由二元代数方程或超越方程确定的函数,称为一元隐函数.

**练习**　设 $y = 3^\mu, \mu = \nu^2, \nu = \tan x$,则复合函数 $y = f(x) = (\quad)$.

二、确定函数定义域的主要思路及方法.

1. 分式函数的分母部分不能为零.

2. 无理函数的偶次根号内的被开方部分不能为负.

3. 对数函数的真数部分严格大于零.

**练习**　求函数 $y = \sqrt{x+2} + \ln\frac{1}{1-x}$ 的定义域,则函数 $y = \sqrt{\ln(1+5x+x^2)}$ 的定义域

是(　　).

三、确定函数值的主要思路及方法.

1. 给 $f(x)$ 的表达式,确定 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,可用替换法求值.

**练习**　设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$,求 $\dfrac{f(u+v)+f(u-v)}{f(u)\cdot f(v)}$.

2. 给 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,确定 $f(x)$ 的表达式,可用换元法或拼凑法求值.

**练习**　设 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2}+1$,则 $f(x)=$(　　).

四、给函数 $y=f(x)$,确定其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的思路及方法.

将函数 $y=f(x)$(以有理分式、指数式、对数式这三种表达式为主)看作关于变量 $x$ 的一元方程,按解分式方程、指数方程、对数方程的方法,所得解 $x=f^{-1}(y)$,即 $y=f(x)$ 的反函数,再改成习惯写法 $y=f^{-1}(x)$ 即可.

五、确定函数奇偶性的思路及方法.

1. 根据函数奇偶性的定义确定,即当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 或 $[-a,a]$ 时,若 $f(-x)=-f(x)$(或 $f(x)$),则称函数 $f(x)$ 为奇(或偶函数)函数.

2. 据"偶函数的图形与 $y$ 轴对称,奇函数的图形与原点对称",可考虑所给函数的图形是否与原点或与 $y$ 轴对称,即可确定其奇偶性.

求证:$f(x)=\log_{a}(x+\sqrt{x^{2}+1})$($a>0$ 且 $a\neq 1$)为奇函数.

六、函数的图形.

**练习**　作函数 $y=2-|2-x|$ 的图形.

# 内容二　极　　限

**一、要理解和熟记下面所列的基本初等函数的常用极限.**

$\lim c=c$,　$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0}e^{x}=1$,　$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$,　$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$ 不存在,

$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,　$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,　$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln x=-\infty$,　$\lim\limits_{x\to 0}\ln x$ 不存在,

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,　$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,　$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 均为振荡不存在,

$\lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0$,　$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在,　$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot}x=\dfrac{\pi}{2}$,　$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$,　$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在.

二、要正确使用以下极限的四则运算法则

若 $\lim u$,$\lim v$ 均存在,则

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v, \lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v, \lim kv = k\lim v,$$

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, (\lim v \neq 0), \quad \lim \frac{u}{k} = \frac{1}{k}\lim u, \lim \frac{k}{v} = k\lim \frac{1}{v}$$

三、无穷小量的定义、运算性质、阶的比较.

1. 定义:称以零为极限的变量为无穷小量.

2. 运算性质:无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

**练习** 求$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

3. 阶的比较.

$$若\begin{matrix}\lim u = 0 \\ \lim v = 0\end{matrix}且 \lim = \frac{u}{v} = \begin{cases} 0 & u 与 v 是较高阶的无穷小量, \\ c \neq 0 & u 与 v 比较是同阶的无穷小量, \\ 1 & u 与 v 比是同阶且等价的无穷小量, \\ \infty & u 与 v 比是较低的无穷小量. \end{cases},则称:$$

# 内容三 连 续

一、定义:若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的值与 $x \to x_0$ 时的极限均存在且相等,即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称此函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续,否则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处间断.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上每一点处均连续,则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且称此区间为 $f(x)$ 的连续区间.

二、运算:连续函数的和,差,积,商仍连续.连续函数的乘方,开方,指数,对数,三角,反三角仍连续.

三、初等函数的连续性.

由基本初等函数在其定义区间上的图形都是一条连续不断的曲线可知,基本初等函数在其定义区间上必连续.

因而基本初等函数经过加、减、乘、除运算构成的简单初等函数在其定义区间上必连续.因而基本初等函数或简单的初等函数经过乘方、开方、指数、对数、三角、反三角运算构成的复合函数在其定义区间上必连续.

因而一切初等函数在其定义区间上必连续.

**练习** 求函数 $y = \sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x}$ 的连续区间.

四、闭区间上连续函数的性质.

1. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最小值与最大值.

2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a) \neq f(b)$,则无论 $f(a) < c < f(b)$ 或 $f(b) < c < f(a)$,在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $f(\xi) = c$,当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时,在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $f(\xi) = 0$.

**练习** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$,则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $f(\xi) = ($ $)$.

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)>g(a),f(b)<g(b)$,求证:在 $(a,b)$ 内曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 至少有一个交点.

五、连续性的应用.

1. 据函数在一点连续的定义可知,求函数 $f(x)$ 在连续点 $x_0$ 处的极限,只须求函数值 $f(x_0)$.

2. 求 $\frac{0}{0}$ 型的分式极限时,可先将分子或分母分解因式或将分子或分母有理化,消去极限为 0 的因子,再据函数在一点连续的定义确定极限即可.

**练习** (1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=(\quad)$;(2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=(\quad)$.

六、确定函数极限的思路及方法.

1. 用已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$(还可扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=e$ 或 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$),求某些幂指函数的极限.

**练习** (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=(\quad)$;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=(\quad)$.

2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ 即 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$(还可扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$ 或 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\varphi(x)\sin\frac{1}{\varphi(x)}=1$),求某些三角函数的极限.

**练习** 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin5x}=(\quad)$.

3. 用结论:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \frac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$ 确定某些极限.

**练习** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{(x+2)^3}=(\quad)$.

4. 用函数在一点极限存在的充要条件:"函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左、右极限均存在且相等",即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,可确定分段函数在分段点处的极限.

求证:$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{|x|}$ 不存在.

# 内容四　一元函数的导数与微分

一、导数的定义,要理解和掌握以下内容.

1. 函数 $f(x)$ 在某一点 $x_0$ 处的导数,记作 $f'(x_0)$,其定义可表为以下极限形式:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 或 } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**练习** 设 $f'(2) = 1$,则$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = (\quad)$.

2. 函数 $f(x)$ 在任一点 $x$ 处的导数,记作 $f'(x)$,其极限形式为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

二、函数在一点可导与连续的关系.

由"可导必连续"可知,"不连续必不可导"而"连续未必可导","不可导未必不连续".因而可导是连续的充分非必要条件,连续是可导的必要非充分的条件.

三、初等函数的导数与微分.

1. 基本初等函数的导数与微分,即导数与微分的基本公式.

常量函数: $c' = 0$, $\quad \mathrm{d}c = 0$

幂 函 数: $(x^a)' = ax^{a-1}$, $\quad \mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\mathrm{d}x$

$x' = 1$, $\quad \mathrm{d}x = 1 \cdot \mathrm{d}x$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, $\quad \mathrm{d}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

指数函数: $(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $\quad \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

对数函数: $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $\quad \mathrm{d}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\quad \mathrm{d}\ln x = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

三角函数: $(\sin x)' = \cos x$, $\quad \mathrm{d}\sin x = \cos x \mathrm{d}x$

$(\cos x)' = -\sin x$, $\quad \mathrm{d}\cos x = -\sin x \mathrm{d}x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$, $\quad \mathrm{d}\tan x = \sec^2 x \mathrm{d}x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$, $\quad \mathrm{d}\cot x = -\csc^2 x \mathrm{d}x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$, $\quad \mathrm{d}\sec x = \sec x \tan x \mathrm{d}x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$, $\quad \mathrm{d}\csc x = -\csc x \cot x \mathrm{d}x$

反三角函数: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \mathrm{d}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad \mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\quad \mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. 简单初等函数的导数与微分.

简单函数是由基本函数经加、减、乘、除运算构成的.因而求简单函数的导数与微分,要用导数与微分的基本公式及四则运算法则.

导数与微分的四则运算法则：若 $u$ 与 $\nu$ 均为 $x$ 的可导函数，则

$$(u\pm\nu)'=u'\pm\nu',\qquad \mathrm{d}(u\pm\nu)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}u$$
$$(u\nu)'=u'\nu+u\nu',\qquad \mathrm{d}(u\nu)=\mathrm{d}u\cdot\nu+u\mathrm{d}\nu$$
$$(k\nu)'=k\nu',\qquad \mathrm{d}(k\nu)=k\mathrm{d}\nu$$
$$(u\nu w)'=u'uw+u\nu'w+u\nu w',$$
$$\left(\frac{u}{\nu}\right)'=\frac{u'\nu-u\nu'}{v^2},\qquad \mathrm{d}\frac{u}{\nu}=\frac{\mathrm{d}u\cdot\nu-u\mathrm{d}\nu}{\nu^2}$$
$$\left(\frac{u}{k}\right)'=\frac{u'}{k},\qquad \mathrm{d}\frac{u}{k}=\frac{1}{k}\mathrm{d}u$$
$$\left(\frac{k}{\nu}\right)'=-\frac{k}{\nu^2}\cdot\nu',\qquad \mathrm{d}\frac{k}{\nu}=-\frac{k}{\nu^2}\mathrm{d}\nu$$

**练习**　设 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$，则 $y'_x=(\quad)$.

设 $y=\mathrm{e}^x\cos x+\ln 3$，，则 $y'_x=(\quad)$

3. 复合函数的导数与微分.

复合函数是由基本的或简单的初等函数经过乘方、开方、指数、对数、三角及反三角这 6 种运算构成的，若用 $\varphi(x)$ 表记基本的或简单的初等函数，则复合函数的结构可用 $[\varphi(x)]^a$，$\sqrt{\varphi(x)}$，$\log_a\varphi(x)$，$\sin\varphi(x)$，…，$\arcsin\varphi(x)$，以及 $a^{\varphi(x)}$ 这 6 种形式表记，还可笼统地表为 $f[\varphi(x)]$，只有理解和熟习这些结构，才能对之正确地求导数或微分，具体如下.

乘方：$\{[\varphi(x)]^a\}'=a[\varphi(x)]^{a-1}\cdot\varphi'(x)$，$\mathrm{d}[\varphi(x)]^a=a[\varphi(x)]^{a-1}\mathrm{d}\varphi(x)$

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]=-\frac{1}{[\varphi(x)]^2}\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\frac{1}{\varphi(x)}=-\frac{1}{[\varphi(x)]^2}\mathrm{d}\varphi(x)$$

开方：$[\sqrt{\varphi(x)}]'=\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}\cdot\varphi'(x)$，$\quad\mathrm{d}\sqrt{\varphi(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}\mathrm{d}\varphi(x)$

对数：$[\log_a\varphi(x)]'=\dfrac{1}{\varphi(x)\ln a}\cdot\varphi'(x)$，$\quad\mathrm{d}\log_a\varphi(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)\ln a}\mathrm{d}\varphi(x)$

$$[\ln\varphi(x)]'=\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\ln\varphi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\mathrm{d}\varphi(x)$$

三角：$[\sin\varphi(x)]'=\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)$，$\quad\mathrm{d}\sin\varphi(x)=\cos\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$

$$[\cos\varphi(x)]'=-\sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\cos\varphi(x)=-\sin\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\tan\varphi(x)]'=\sec^2\varphi(x)\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\tan\varphi(x)=\sec^2\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\cot\varphi(x)]'=-\csc^2\varphi(x)\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\cot\varphi(x)=-\csc^2\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\sec\varphi(x)]'=\sec\varphi(x)\tan\varphi(x)\cdot\varphi'(t),\qquad \mathrm{d}\sec\varphi(x)=\sec\varphi(x)\tan\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\csc\varphi(x)]'=\csc\varphi(x)\cot\varphi(x)\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\csc\varphi(x)=-\csc\varphi(x)\cot\varphi(x)\mathrm{d}\varphi(x)$$

反三角：$[\arcsin\varphi(x)]'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\cdot\varphi'(x)$，$\quad\mathrm{d}\arcsin\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\mathrm{d}\varphi(x)$

$$[\arccos\varphi(x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\arccos\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2(x)}}\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\arctan\varphi(x)]'=\frac{1}{1+\varphi^2(x)}\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\arctan\varphi(x)=\frac{1}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$[\mathrm{arccot}\,\varphi(x)]'=-\frac{1}{1+\varphi^2(x)}\cdot\varphi'(x),\qquad \mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\,\varphi(x)=-\frac{1}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}\varphi(x)$$

指数：　$[a^{\varphi(x)}]' = a^{\varphi(x)}\ln a \cdot \varphi'(x), \mathrm{d}a^{\varphi(x)} = a^{\varphi(x)}\ln a \mathrm{d}\varphi(x)$

$[\mathrm{e}^{\varphi(x)}]' = \mathrm{e}^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x), \quad \mathrm{d}\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{\varphi(x)}\mathrm{d}\varphi(x)$

将以上的求导法则和微分法则称之为链式法则，还可笼统地表记如下：

$[f\varphi(x)]' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x), \mathrm{d}f[\varphi(x)] = f'[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x$

**练习**　(1) 设 $y = x\arcsin \ln x$，求 $y'$.

(2) 设 $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$，则 $y'_x = (\quad)$

(3) 设 $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

四、二阶导数. 函数 $y = f(x)$ 的一阶导数 $y' = f'(x)$，二阶导数即 $y'' = f''(x)$，$(y')'$，$[f'(x)]'$.

**练习**　(1) 设 $f(x) = \sin x + \ln x$，则 $f''(1) = (\quad)$

(2) 设 $f(x) = \ln(1 + x^2)$，则 $f''(-1) = (\quad)$

五、由二元方程 $F(x,y) = 0$ 确定的一元隐函数 $y = f(x)$ 的导数与微分.

1. 求导数的思路与关键步骤：

先在方程的等号两边，对含 $x$ 的项用导数的基本公式、四则运算法则及链式法则求导，对含形如 $y^a, \sqrt{y}, \ln y, \sin y, \cdots, \arcsin y, \cdots, \mathrm{e}^y$ 的项，要按复合函数的链式法则求导，再将求导的结果仅看作未知导数 $y'$ 的一元一次方程，解出 $y'$ 即可.

**练习**　由方程 $x^3 y - 2\mathrm{e}^{5x} = \sin y$ 可确定 $y$ 是 $x$ 的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 微分的思路与关键步骤：

先在方程的等号两边，分别对 $x$，对 $y$ 用微分的基本公式，四则运算法则及链式法则微分，再将微分的结果仅看作未知微分 $\mathrm{d}y$ 的一元一次方程，解出 $\mathrm{d}y$ 即可.

注：对含 $y$ 的项，要熟记以下法则：

$(y^a)' = ay^{a-1} \cdot y', (\sin y)' = \cos y \cdot y', \mathrm{d}y^a = ay^{a-1}\mathrm{d}y, \mathrm{d}\sin y = \cos y\mathrm{d}y$

$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y', (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot y'$

$\mathrm{d}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y, \mathrm{d}\arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\mathrm{d}y$

$(\ln y)' = \frac{1}{y}y', (\mathrm{e}^y)' = \mathrm{e}^y \cdot y', \mathrm{d}\ln y = \frac{1}{y}\mathrm{d}y, \mathrm{d}\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^y\mathrm{d}y$

**练习**　由方程 $xy = \mathrm{e}^y$ 可确定 $y$ 是 $x$ 的隐函数，求 $\mathrm{d}y$.

六、幂指函数的导数.

1. 幂指函数的结构：可分为四类，即 $y = x^x, y = x^{\varphi(x)}, y = [g(x)]^x, y = [g(x)]^{\varphi(x)}$，初学者可将其中的 $\varphi(x), g(x)$ 仅看作六类 12 个基本初等函数，即

$$y = x^{x^a}, y = x^{a^x}, y = x^{\ln x}, y = x^{\sin x}, \cdots, y = x^{\arcsin x}, \cdots$$

或　$y = [x^a]^x, y = [a^x]^x, y = (\ln x)^x, y = (\sin x)^x, \cdots, y = (\arcsin x)^x, \cdots$

2. 求导数的思路与关键步骤：

(1) 先用对数恒等式 $N = \mathrm{e}^{\ln N}$ 及对数乘法法则 $\ln m^n = n\ln m$，将函数的幂指结构变形为以 e 为底的复合函数，再用链式法则对之求导，最后想着将复合函数还原为幂指形式.

(2) 先在函数的等号两边取以 e 为底的对数，并用对数乘法法则将幂指结构的显函数变

形为隐函数,再对之求导,最后将 $y$ 还原为幂指形式.

**练习** (1) 设 $y = x^{\sin x}$, 求 $y'$.

(2) 设 $y = (\ln x)^x$, 求 $y'$.

(3) 设 $y = x^{\cos x}$, 求 $y'$.

七、参数方程.

1. 定义:若曲线是由两个坐标变量 $x,y$ 关于参变量 $t$ 的两个函数 $x = \varphi(t)$ 与 $y = g(t)$ 联立而成的方程组确定的,则称之为曲线的参数方程,记作

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y = g(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

(若曲线是由两个坐标变量 $x,y$ 的一个二元方程 $F(x,y) = 0$ 直接确定的,则称之为曲线的普通方程.)

2. 由参数方程确定的函数 $y = f(x)$ 的导数:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}$$

**练习** 设 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

八、求过曲线上某点处的切线方程

据导数的几何意义:函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$,即过曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x_0, y_0)$ 处的切线斜率,因而过曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x_0, y_0)$ 处的切线方程,可用直线"点斜式"方程表示:$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

**练习** (1) 过曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上点 $x = ($ $)$ 处的切线过点 $(2,0)$

(2) 过曲线 $y = x + \frac{1}{x}$ 上点 $(1,2)$ 处的切线方程为( )

(3) 过曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为( )

(4) 过曲线 $y = \ln(1 + x)$ 与 $x$ 轴相交,则该曲线在交点处的切线方程为( )

# 内容五 微分中值定理

一、罗尔定理
- 条件
  1. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上处处连续;
  2. 函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内处处可导;
  3. $f(a) = f(b)$.
- 结论 在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $f'(\xi) = 0$.

二、拉格朗日定理
- 条件
  1. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上处处连续;
  2. 函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内处处可导.
- 结论 在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$,使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

**练习** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可导且 $f'(x) = 0$,则在 $(a,b)$ 内至