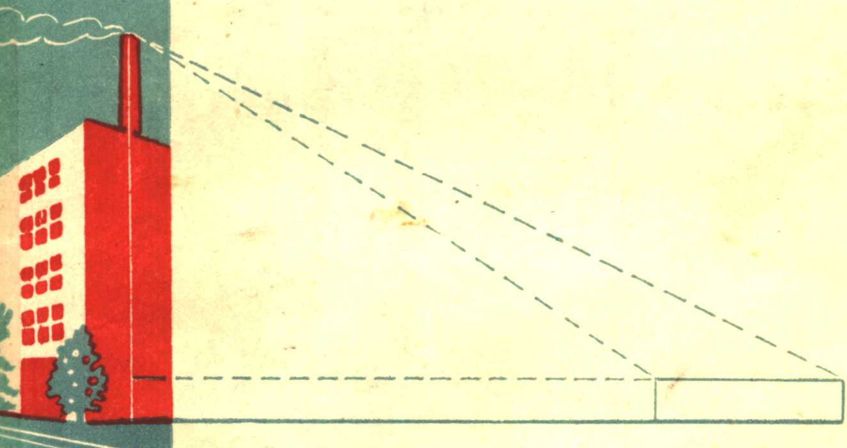
高中数学教学法

（三角部分）

薩·耶·利亚平 主编



人民教育出版社

高中数学教学法

（三角部分）

薩·耶·利亚平 主編

陈昌平 曹錫华 譯

人民教育出版社

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
С. Е. ЛЯПИНА

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ II

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
8—10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ—1956

*

高中数学教学法

（三角部分）

〔苏联〕 薩·耶·利亚平主编
陈昌平　曹锡华 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号
人民教育出版社出版(北京景山东街)
新 华 书 店 发 行
北京外文印刷厂印装

統一书号：7012·430　字数：159千
开本：850×11[illegible]公厘　1/32　印張：6
1958 年 12 月第一版
1959 年 3 月第一版第一次印刷
北京：1—9,700 册

*

定价 (6) 0.60 元

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 导論

§1. 三角学的产生与其发展的历史

三角学的发展史有几千年之久.由于天文学上的需要,在平面三角产生以前,人們便研究了球面三角的問題.星球在天空中的位置同古代諸文明民族(譬如埃及人,波斯人,希腊人等)的經济需要和宗教仪式都有着密切的关系.人們使用着种种計算方法来确定星球的位置.当时的种种計算方法体系构成了当时的三角学.在那个时候,人們只汇积了許多互相无关的資料,任何理論体系都还未形成.

根据多数数学史学家的意見,三角学的第一个"創始人"是希腊的天文学家吉巴尔赫(約公元前150年).他是企图把已經汇积起来的实际資料归納整理使成体系,并且找出一般的研究方法的第一个人.吉巴尔赫还建立了有名的周轉圓与偏心圓的理論(地球的偏心論及其他等等).

他写了"弦論"十二卷,这套书已經失傳.

吉巴尔赫在洛多士进行天文观測时第一次計算了弦长,并編造了弦长表;利用这个表可以求出对已知弧的弦长.

在后来的天文学家中应当提到亚历山大利亚人孟納拉(公元一世紀下半叶).他著有"球面几何学"三卷.这本书的犹太文譯本和阿拉伯文譯本流傳到今天.

埃及的天文学家托列米(公元二世紀),継承了吉巴尔赫的算弦术以及孟納拉与毕达哥拉斯的几何成果;同时利用以他命名的定理显著地改进了計算弦长的方法.这个定理就是:"以圓内接四边形的对角綫为边作矩形,其面积等于以四边形两双对边为边的两个矩形的面积和".

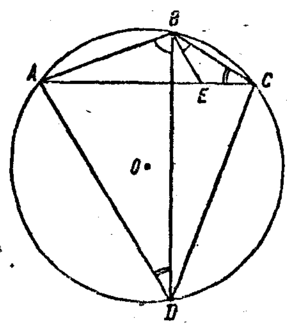


图 308

这个定理在现代的几何教本中很少有所記載．因此我們在这里用现代的記号来給出它的詳細的証明．

已知内接四边形 $ABCD$．我們作 $\angle CBE=\angle ABD$，就得到 $\triangle EBC\sim\triangle ABD$（根据三角形相似的第一特征）．因为 $\angle ABE=\angle DBC$（等角之和相等），所以 $\triangle ABE\sim\triangle DBC$；由此得到比例式 $BC:BD=EC:AD$ 与 $AB:BD=AE:DC$．将这些比例式化为下面的等式，然后两端相加，就得到：

$$BC\cdot AD=BD\cdot EC$$
$$AB\cdot DC=BD\cdot AE$$
$$\overline{}$$
$$BC\cdot AD+AB\cdot DC=BD(EC+AE)=BD\cdot AC$$

托列米把圓周分为 360 等份；把直徑分为 120 等份．这样，半徑就等于 60^{ρ}①．然后他又把每个 ρ 分成 60 等份(分)，每一份又重新分为 60 小等份(秒)．托列米用这些半徑的份数来表达与已知角或已知弧对应的弦长，同时以角*所对的弧的度数作为角的度数②．

从欧氏几何可以知道；用半徑的份数来表达正 10 边形，正 5 边形，正 6 边形，正 4 边形与正 3 边形的边长时，将得到

弦 $36^\circ=37^{\rho}4'55''$；弦 $72^\circ=70^{\rho}32'32''$；

弦 $60^\circ=60^{\rho}$；弦 $90^\circ=84^{\rho}51'10''$；

弦 $120^\circ=103^{\rho}55'23''$

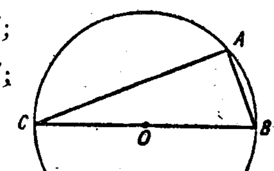


图 309

托列米利用直徑等于 120^{ρ} 的事实，求出和已知弧互补的弧所对的弦长．例如，設弧 $AB=36^\circ$，那么弦 $(180^\circ-36^\circ)=$ 弦 $144^\circ=AC=\sqrt{120^2-(\text{弦 }36^\circ)^2}=144^{\rho}7'77''$（看图 309）．

托列米利用以他命名的定理，根据两个已知弧所对的弦长，求出这两个弧的和或差所对的弦长，以及已知弧的一半所对的弦长．在

① 記号 ρ 表示直徑的 $\frac{1}{120}$．

* 是指圓心角——譯者

② 六十分法起源于巴比倫．对于这种分法，吉巴尔赫便已知道．

这里，让我們导出其中的一个結論(看图 310).

設已知弦 AC 与 AB 的长，求弧 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}$ 所对的弦长. 作直徑 AD，得到: $CD=\sqrt{120^2-AC^2}$; $BD=\sqrt{120^2-AB^2}$. $AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$ 也就是 $AC\cdot\sqrt{120^2-AB^2}=120\cdot BC+AB\sqrt{120^2-AC^2}$. 由此得到

$$BC=\frac{AC\sqrt{120^2-AB^2}-AB\sqrt{120^2-AC^2}}{120}.$$

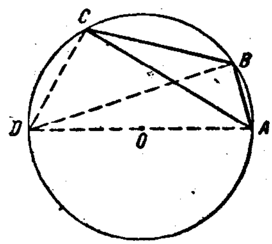


图 310

托列米利用这个結論，从 72° 弧的弦长与 60°弧的弦长，求出 12°弧的弦长. 然后将弧平分，逐步求出 6° 弧的，3° 弧的，$1\frac{1^\circ}{2}$弧的，以及$\frac{3^\circ}{4}$弧的弦长. 为了编造从 0° 到 180° 每相差 0.5° 的一切弧的弦长，托列米应用了插值法. 他証明了弦长与它所对的弧的比随着弧的增大而縮小:

$$\frac{\text{弦}\frac{3^\circ}{4}}{\smile\frac{3^\circ}{4}}>\frac{\text{弦 }1^\circ}{\smile 1^\circ}>\frac{\text{弦 }1\frac{1^\circ}{2}}{\smile 1\frac{1^\circ}{2}};$$

也就是:

$$\frac{\text{弦 }1^\circ}{\text{弦}\frac{3^\circ}{4}}<\frac{\smile 1^\circ}{\smile\frac{3^\circ}{4}}$$

以及

$$\frac{\text{弦 }1^\circ}{\text{弦 }1\frac{1^\circ}{2}}>\frac{\smile 1^\circ}{\smile 1\frac{1^\circ}{2}},$$

由此可見，1°弧的弦长，介于 1.5°弧的弦长的$\frac{2}{3}$倍与$\frac{3^\circ}{4}$弧的弦长的$\frac{4}{3}$倍之間. 由于这两个界限值的差十分微小$\left(\text{小于直徑的}\frac{1}{432000}\right)$，所以托列米就把这些界限值看作为 1° 弧的弦长. 知道了 1° 弧的弦长后，他便編造出从 0° 到 180°，每相差 0.5° 的弦长表. 这样就編制

了第一个三角函数表. 拿托列米的弦长表同現在的正弦函数表比較一下，可以知道，他的表是十分精确的，不过要注意的是，托列米所計算的不是“正弦”，而是“倍弧的弦长”.

阿拉伯人称“阿利加默士德（Альгамест）”为“偉大的天文学經典”；它的第一卷第九章包罗了托列米在三角方面的一切成果；但是在这套书里面，很少有平面三角的資料.

印度人和希腊人一样，只把三角学作为天文研究的一种工具，但是他們在三角学方面却获得了巨大的成績. 印度三角学的典型特征在于：他們在計算时不是利用倍弧的全弦之长，而是利用倍弧的弦长之半，也就是說，利用弧的“正弦”.

在印度，全弦叫做“宰亚（Джийа）”意思是猎弓上的弦，阿拉伯人却不用这个字，而用了“宰泊（Джайб）”这个字.“宰泊”翻譯为拉丁文就是“Sinus（Синус）”.

印度人使用了两个三角函数；他們和希腊人一样，是用弦来定义函数的.

他們知道了下面的公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$. 并且利用这个公式求出了每相差 3°45′ 的一切角的正弦. 其他角的正弦是用插值法計算的. 因为这个緣故，他們的天文計算并不是十分准确的.

中世紀时，有关数学发展的工作轉移到了东方各国——現在的烏兹别克斯坦，塔什克斯坦，伊朗等国. 花拉子模学者阿里华里子模（約公元 820 年）、阿拉伯天文学家悠努士（死于公元 1008 年）、爱定（公元 1300 年）等人的有名著作便是属于这个时代的. 爱定把东方数学家在球面三角与平面三角方面的成就，总結在他的著作“論四边形”中. 这本书是以孟納拉的完全四边形为出发点的①.

---

① 孟納拉將下面的几何定理：“設直綫与三角形 ABC 的三边 BC, CA, AB 相交于点 D, E, K, 則 $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AK}{KB}=1$”推广到球面几何上去时，是以球面上的大圓的弧代替直綫，而以弧的正弦（即倍弧之弦）代替綫段的.

西欧的数学是在东方的数学影响下才开始发展起来的；直到15世紀，爱定的著作才为德国的学者約翰米勒（又叫列吉蒙坦1436—1476）所知.

数学史作家 B. П. 謝列灭节夫斯基認为，欧洲科学在数学領域內最初的独立成果是在三角学方面. 关于这一点，他是这样解釋的："在黑暗的中古时代，直到14世紀，只有天文学在占星学的大力贊助之下，才得到了发展. 而三角学一向就是属于天文学的一部分的."①

列吉蒙坦在他的著作"論各类三角形五卷"中，第一次把三角学当作同天文学无关的、独立的对象去研究，并且把三角学提高到了理論的水平. 他引入了一个新的函数，到17世紀时这个函数被称为正弦函数. 他并不知道，早在10世紀时，阿拉伯的天文学家为了根据木杆的影长以确定太阳的高度时，就已經引入过这个函数了. 列吉蒙坦用十分法代替了六十分法，用半徑的十万分之一为单位計算正切的值.

在他所編的正弦表中，給出了每相差一分的正弦值，准确度达到$\frac{1}{10^7}$；在他所編的正切表中，給出了每相差一度的正切値. 此外，他还解决了一系列的問題，提出了一些独創的手段和方法，这些方法构成进一步研究的基础. 下面的两个問題就是由他解决了的："已知平面三角形的一条高，一条边和这边的对角，求解这个三角形". 以及"已知平面三角形的一条边，这条边上的高，与其余两条边的比，解这个三角形."此外，有名的正切定理也是属于他的［虽然有些史书把这个定理归功于他的承繼人芬克（1583年）］.

那披耳（1550—1617）的常用对数的創立，促进了恒等变換理論的发展，以便把三角公式化为适宜于对数計算的形式.

直到17世紀，三角学始終保持着几何学的风格. 从17世紀起，数学分析把三角学的問題当作一些具体的函数問題来研究. 牛頓（1642—1727）求出了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的无穷級数的表达式：$\sin x = x -$

① B. П. 謝列灭节夫斯基，数学史概論，1940年版，第87面.

$\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots\cdots$与 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$.

在18世紀下半叶，也就是在尤拉时代，三角学才取得了近代的形式．尤拉使用了三角的記号，把正弦綫和正弦区分开来，把正弦看做正弦綫与半徑的比．因此尤拉是把三角函数值看作为数，而不把它看作为綫段的第一个人．把三角函数看作为綫段的比这个新的观点，是数学上的一个大貢献．尤拉在他的“分析引論”中，第一次用了解析的方法来叙述三角学的理論——也称为測角学——，使这个理論摆脱了几何学的形式．尤拉的学生卢莫夫斯基(1734—1812)和格罗文(1789)所写的三角新課本就是以尤拉的思想作为科学依据和基础的．

格罗文所写的課本“平面三角与球面三角——用解析法証明”，是特别值得注意的．在这本书中，三角学的一切重要公式都几乎被表达为19世紀的課本中所通用的那种形式．1804年出版了富斯的課本．这本书包括了球面三角在内．在所有这些課本中，三角学都有一个确定的中心，那就是解三角形．至于研究三角函数的問題，那是非常少的．

1851年，奥斯特洛格勒特斯基院士第一次制訂了三角学的綱要，規定了把三角学分成两个阶段学习，因而产生了三角开头課的思想．

根据这个綱要的精神，在1852年出版了西馬詩哥所写的課本，这本书后来重印了6版(最后一版是在1907年发行的)．

在最初的两版中，著者是利用直角三角形的边的比来引入三角量的概念的．在后来的版本中，他便利用三角圓了．但是这本书并沒有把三角量看作为一种特殊的函数．这在当时来說是很典型的．

1906年，在数学界輿論的影响下，理科中学的三角課程和教学大綱都有了巨大的变化．課程被分为两个循环：Ⅰ．解直角三角形与銳角三角形；Ⅱ．三角函数理論以及三角函数值的近似計算中所必須的等式与不等式．由于这种变化又出版了一些新的課本，在这些新

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的課中引入了一些講授三角的新概念．例如在莫罗切克 1908 年所写的課本中，是用射影来定义三角函数的；比里宾(1909)利用方程組給出了解三角形的一般方法．这些課本对于反三角函数和三角方程的理論，都作了充分詳細的闡述．在 19 世紀和 20 世紀初期內，三角教学法的理論虽然还未創立，但已經有許多有价值的书，对中学三角教学中的許多困难問題做了說明．

§2. 苏維埃学校的三角学与其教学任务

苏維埃时期关于中学三角的教学目的，在大綱中規定为："三角教学的目的在于研究三角函数和它們的性質，解直角三角形和銳角三角形，以及講授三角在几何、物理、技术等問題上的实际应用．"

至于怎样去实現大綱中所規定的目的，那还是一个問題．早在 30 年代，許多数学教学法专家(B. A. 克罗吉烏斯，B. K. 馬推叔克，等）和中学教师就已經指出过，中学的三角教学沒有达到应有的水平，同时指出了部頒的雷布金的課本有着許多严重的缺点．在許多場合下，大綱对于各个題材的內容，沒有明确的規定，而仅仅講了几句空洞的話．这就造成了三角教学中各自为政的現象．从大綱中看不出弧度制在中学課程中的地位和比重；抽象变量的函数概念沒有被提起；反三角函数和三角方程等部分的内容沒有被明确規定．

部頒雷布金的課本和他的习題集之間也不很协調．例如，大綱中規定在十年級将結束的时候，才講授三角方程．可是在习題集中，当学生学习三角函数間的关系时，便提出了解方程的問題．課本中关于三角函数的定义和它們的性質，同高等数学中所講的不相适应．对于某些基本定理只討論了一些特殊情形，而沒有必要的推广，例如，关于同角的三角函数間的关系以及关于两角代数和的函数公式，其情况就是这样．这些定理只在銳角的情况下加以証明，而沒有进一步的推广．

关于三角方程的等价性与解方程的方法等問題，在課本中完全

沒有討論．許多习題集的編者就是由于忽視了三角方程的特殊性而往往給出了錯誤的答案，从而把教师和学生引入了迷途．

中学三角教学中的一些严重缺点，虽然已被認識，但是直到近几年来，必須作出的改变还是不够坚决的．

对于大綱，特别是对于雷布金的課本，在数学杂志中出現了許多批評性的文章．由于这些批評而出版了一些新的参考书——A. Φ. 貝尔曼与 Л. A. 柳斯切尔尼克的課本以及 P. И. 波賽斯基的习題集．这些书虽然弥补了旧課本中的一些缺陷，糾正了旧課本在教材处理上的一些缺点，但是，还沒有使教师們感到滿意．

1956 年，苏俄教育部对大綱作了一些修改．一方面精簡了課程的內容（反三角函数全部略去；三角方程加以簡化）．另一方面也提高了課程講授的科学水平．与修改大綱的同时，出版了 C. И. 諾沃舍洛夫的三角新課本，并定为部頒教科书．諾沃舍洛夫在过去便写过一系列三角方面的书籍：这些书对三角学的处理，无論从中学的角度或从高等学校的角度看，都是完整而合乎科学性的（反三角函数，三角学专門教程，以及发表在中学数学杂志中的一系列文章）．諾沃舍洛夫充分依据新大綱的精神編写了自己的課本，对一系列的概念給出了精确的定义；他的叙述方法接近于近代三角学的观点；对一些定理，在极其一般的形式下給出了一系列独創的、同时又易于接受的論証．

关于中学三角的內容以及三角教学法的問題，除了上面所举的书籍以外，苏維埃时期还出版了許多重要的书籍．这些书对中学教师来說是十分有用的．

1925 年出版了 Б. Б. 彼奥特洛夫斯基的三角学，作为教师参考用书．也許这本书是完全明确地解决三角課程的特性問題的第一本书．在这本书出版以前，三角課程中往往导出一大堆公式，有些公式在用对数表解三角形时是要用到的．但是它們缺乏統一的观点，它們之間缺乏密切的联系．彼奥特洛夫斯基在他所写的課本中用了另

一种方法来处理教材. 他用函数的观点来討論課程中的一切問題, 因而他所推导的公式就显得"生动活潑", 反映了三角函数的性質. 他用向量与向量在坐标軸上的射影来定义三角函数, 并根据这些函数的基本性質統一地解决了許多問題.

由于当时苏維埃学校在数学教学法方面所形成的傾向, 作者在討論函数时, 广泛地使用了图象.

所有这些因素使得彼奥特洛夫斯基的书就是对今天的中学教师来說, 也还是非常有用的.

II. 施模列維奇所写的"平面三角"有着不同的性質, 他所持的原则是: 教材应当尽量使学生感到易于接受. 在引入新概念时, 他极力說明它的必要性; 在整个課程中, 他都要求教材同实际应用发生联系. 教师們在这本书里面可以找到許多关于中学三角教学法方面的指示.

应当提起 B. A. 克罗吉烏斯的三角书, 它写了普通中学用的"平面三角"和职业学校用的"三角学". 它們的好处在于用簡洁的形式叙述了任意角的三角定理, 并且在每个定理后面都附有例题和习题, 用来說明三角在工程, 物理等方面的应用.

在A. M. 凱士林所写的"三角問題选集"中, 詳細地叙述了解三角形的极其一般的方法. 其中有趣的是用外接圓的半徑来表达任一截綫. ——所謂截綫就是联結三角形頂点与其对边上任意一点的綫段(特别是, 中綫, 高, 分角綫都是截綫). 在同样的精神下, 它討論了三角式的变换方法問題. 这些方法有着很大的一般性. 此外它还証明了任意多个变量的加法定理〔例如 $\sin(a+b+\cdots\cdots+k)$〕; 并且根据这个定理导出了倍角函数 $\sin n\alpha$ 的公式.

H. M. 别斯金所写的"三角問題与其教学法"也是一本重要的和值得注意的书. 在这本书中, 著者闡述了三角教学法中許多富于原則性的問題. 它可以帮助教师們对于三角教学法中的許多問題确定自己的态度.

近年来"中学数学"杂志发表了許多关于三角教学法的文章. 对于这些文章, 我們不一一列举了. 这些文章对于中学三角的无論那一部分教材,都发表了种种不同的观点.

有两本专門討論三角教学法的书,那就是 B. B. 列别夫所写的书和B. T. 契契根所写的书. 其中的第一本, 到1954年为止,还是三角教学法方面所仅有的一本书, 它是教师們在日常工作中所經常使用着的. 它討論了中学大綱中的差不多所有的問題, 并且給出了詳細的教学法指示. 就在今天来說,在許多場合下,它也还是一本有用的参考书.

契契根的"三角教学法"是一本非常詳細的参考书. 它除了討論理論性教材外, 还給教师們許多有益的指示和介紹. 这本书反映了三角教学法的現代傾向.

关于解三角形的問題, 可以推荐 C. O. 沙图諾夫斯基的"平面三角問題解法"和两本老书: K. A. 托洛波夫的"平面三角教程" (1894)与"幻級数与其在解題上的应用"(1911). 关于托洛波夫解三角形的一般原則, C. И. 諾沃舍洛夫在他写的"三角学专門教程" (苏联科学出版社,1953)中做了簡短的介紹.

从下列一些人所編的习題集中,教师們可以找到大量的习題: 别列佐夫斯基(1936), A. 和 H. 胡多宾(1954), P. И. 波賽斯基(1950), A. И. 波格列洛夫(1949), K. C. 巴瑞彬与 A. K. 依撒柯夫(1952).

§3. 关于中学三角教学的两个循环

同几何的情况一样, 三角教学上的两个循环, 有人贊成,也有人反对.

前面已經讲过,是奥斯特洛格勒特斯基院士最初提出来,应当把三角分成两个阶段学习. 他在1851年建議从直角三角形出发来研究三角函数. 那就是,首先討論銳角三角函数和它們的性質,以及它們在解决实际問題上的应用. 在这以后,才研究任意角的三角函数.

西馬詩哥的課本就是按照这个計划編写的．上世紀的 80 年代，从三角形出发而不从圓出发来处理三角教材的方法，受到人們反对．但是到了 20 世紀初期，奥斯特洛格勒特斯基的思想却流傳最广而且被普遍采納．不过，話說回来，就在目前来說，三角教学究竟应当如何处理——分两阶段抑或一貫到底——，还須特别討論．

有一种观点認为，在中学課程中，不应当把三角看作为一門独立的学科；而認为这个課程的材料是介乎代数与几何之間的：关于三角函数的研究，是属于代数——作为“函数研究初步”的一章；关于三角的实际应用，則是度量几何的一部分①．

对于这种极端的論点，在刊物上，既无人贊成，也无人反对．卽使論者本人，也无决心坚持自己的观点．

这是不难理解的．如果問題仅在于課程名称的改变，那么它不会有重大的意义：就让代数辟一章“三角函数”；让几何辟一章“三角函数的性質与其在几何上的应用”好了．但問題恰好是在課程性質的改变和課程的分裂上面．如果主張三角应当溶化到代数与几何中去，那就意味着不要考虑学科的特点，也不要考虑学齡的心理特征．而考虑学齡的心理特征問題，却是特别重要的．

反对两个循环的理由是什么呢？

有些反对者是把两个循环同把課程分为大意的和系統的分法混为一談了．而其实这不是同一回事．

所謂課程大意应当理解为：它在一定程度上是完整的課程，只不过是在簡单化的基础上来講解罢了（例如，缺乏邏輯証明的、純粹驗証性的課程）．学习过課程大意以后，才在更高的基础上——卽滿足更高的邏輯要求——对整个課程重新講解一遍．

而两个循环的意思是：从整个課程中，把学生最易于接受的、同时又馬上可以用来解决实际問題的那些部分挑选出来，首先进行学

① А. П. 貲奚索夫，“中学中的三角函数”，苏联教育科学研究院，1946，№ 6，97—98 面．

习. 而且这部分教材和以后的教材一样，是在相同的教学法基础上进行教学的. 两个循环的学习只可能是系統的学习: 先研究銳角三角函数和它們在解直角三角形上的应用，然后研究任意角三角函数的性質和它們在解任意类型三角形与解方程上的应用.

不过，就是对于这种分法，也有下列的种种不同意見:

1. 引入第一循环——即銳角三角学，意味着屈从三角学本身的历史发展过程.

2. 三角学的“循环”过程，破坏了教材的严整性和連貫性. 因为在轉入任意角三角函数的学习时，学生必須学习它們的定义，这就好象是从头再学一遍一样.

3. 以前要求学生学习物理时，事先要有銳角三角函数的知識. 其实这不必要. 因为物理課程可以这样安排，即使沒有三角的基础知識，也沒有妨碍.

4. 在学习第一循环的教材时，无法使学生获得他們以后所必須的联想能力. 而最初获得的一些观念，总是先入为主，使得以后的观念受到蒙蔽. 例如，以对边与底边之比作为正切函数的定义，极其簡单，且易于掌握. 但是正因为这样，就使得正切函数的另一些定义(例如利用三角圓給出的定义)，須作很大的努力才能理解. 因为它受最初的定义——比較簡单的、而且是已經习慣了的定义蒙蔽住了.

5. 如果从直角三角形出发来研究三角，那么講課的严格邏輯性和科学性就成为不可能的了.

6. 两个循环的分法将使三角成为狹隘的实用主义的課程. 很难使学生把三角函数理解为数量的函数①.

可是我們認为，两个循环論有着下列一些令人信服的理由:

1. 三角教学如果同几何分离，就将成为形式主义的教学. 它很

---

① K. 謝伏寄哥，論三角学两个循环的合理性，“中学数学”1934，№ 4; B. A. 克罗吉烏斯，論三角集中課程，“中学数学”，1937，№ 2; П. 舍瓦齐揚諾夫，中学三角的結构，1937，№ 2; B. K. 馬惟叔克，論三角开头課的教学，“中学数学”，1936，№6.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com