黄冈难点

课课练

高二数学 上册

袁小幼 主编

◆ 名师精心打造
◆ 同步随堂练习
◆ 难点全部囊括

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

黄冈难点课课练

高二数学 上册

班　级：____________

姓　名：____________

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

主　　编　袁小幼
参　　编　汪　霞　潘　东　程志明

《黄冈难点课课练丛书》编委会

图书在版编目（CIP）数据

黄冈难点课课练．高二数学．上册/袁小幼主编．—北京：机械工业出版社，2004.5

ISBN 7-111-01884-2

Ⅰ.黄…　Ⅱ.袁…　Ⅲ.数学课—高中—习题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第041283号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：郑文斌　　　封面设计：饶　薇
责任印制：施　红
衡水冀峰印刷股份有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2004年6月第1版第1次印刷
850mm×1168mm 1/16·8印张·177千字
定价：11.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前　　言

本套丛书全部是由湖北黄冈中学的一线教师来编写的，同时它也是一套中高定位的教学辅导及课后作业用书，适用于成绩中等及以上的学生。它有以下几个特点：

一、教改和考试“双吃透”

所谓的这两个“吃透”是指：一要“吃透”当前新课标改革的进展情况；二要“吃透”高考的新动向和新要求。本套丛书在编排上不仅精选了历年高考的优秀题目，同时还将所有的题目均贴近应试真题，能给学生以更有效的指导。另外，本套丛书在初中部分还配备了相应的新课标版本，可以满足不同学校和教师的各种要求。

二、突出重点，强调难点

本套丛书没有强行和刻意地去全面反映考纲和教材的内容要求，也就是说，一些简单的、学生应知应会的内容，本套丛书很少涉及。中等及中等以上难度题目的内容占全书90%左右。基础（重点）：中等（巩固）：难题（提高）＝1：3：6——这是本套丛书在习题难度设定上依照的原则，这一点是本书习题编排区别于一般的同步辅导用书、课后练习、作业本等的关键之处。

三、知识的灵活应用

为了适应新课标培养学生灵活运用知识的教学目标，本套丛书在强调难点的同时，也引入了很多综合类的题目，帮助读者在同步学习的过程中就能养成综合考虑问题和解决问题的习惯，完全适用于教改在素质提高方面的要求。

四、面向日常，注重提高

这套丛书中的习题均有“期中测试题”、“期末测试题”，绝大多数还有“单元测试题”，考虑到部分学科和年级的特殊性，还有新颖题赏析、课外创新题、点击中高考题目等相关的内容，学生可以在课上或课后在老师的辅导下进行练习，也可以单独进行测试。参考我们精心设计的题目，相信同学们能在平时的作业练习中逐步地提高自己的能力。

总的来说，这套丛书是从中高定位出发，为各省市区重点中学中等程度以上的学生精心策划和编写的，完全能够满足广大学生和中学教师教与学的需求。

由于时间仓促，书中难免有所疏漏，诚请广大教师和学生批评指正。

丛书编委会

2004年2月

目　　录

第6章 不 等 式

6.1 不等式的性质

例题选讲

若$0<x<1$，$a>0$且$a\neq1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

解法一：记$A=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\left|\dfrac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\dfrac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\dfrac{1}{|\lg a|}\left[|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|\right]$　$\because 0<x<1$

$\therefore$ $0<1-x<1$，$1+x>1$　　$\because \lg(1-x)<0$，$\lg(1+x)>0$

$\because A=\dfrac{1}{|\lg a|}\left[-\lg(1-x)-\lg(1+x)\right]=\dfrac{1}{|\lg a|}\left[-\lg(1-x^2)\right]$

又$\because 0<x<1$　$\therefore 0<1-x^2<1$　$\therefore \lg(1-x^2)<0$　$\therefore -\lg(1-x^2)>0$

即　$A=\dfrac{1}{|\lg a|}\left[-\lg(1-x^2)\right]>0$　故$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

解法二：显然$|\log_a(1-x)|>0$，$|\log_a(1+x)|>0$　$\because 0<x<1$

$\therefore 0<1-x<1$，$1+x>1$　$\therefore \log_{(1+x)}(1-x)<0$

$\therefore A=\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}$

$\because (1+x)-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x^2}{1-x}<0$　　$\therefore 1+x<\dfrac{1}{1-x}$

$\because$以$(1+x)>1$

为底的对数函数是增函数.　$\therefore \log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$

即$A>1$，故$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

解法三：$\because |\log_a(1-x)|>0, |\log_a(1+x)|>0$

$\therefore |\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2=\log_a^2(1-x)-\log_a^2(1+x)$

$=\left[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)\right]\cdot\left[\log_a(1-x)-\log_a(1+x)\right]=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\dfrac{1-x}{1+x}$

$=\dfrac{\lg(1-x^2)\cdot\lg\dfrac{1-x}{1+x}}{\lg^2 a}$　　$\because 0<x<1$，$\therefore 0<1-x^2<1$，$0<\dfrac{1-x}{1+x}<1$

$\therefore \lg\dfrac{1-x}{1+x}<0$，$\lg(1-x^2)<0$而$\lg^2 a>0$，故$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

解法四：$\because 0<x<1$　$\therefore 0<1-x<1, 1+x>1, 0<1-x^2<1$

（1）当$a>1$时，$\log_a(1-x)<0$，$\log_a(1+x)>0$，$\log_a(1-x^2)<0$

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$

$=-\log_a(1-x^2)>0$　$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

（2）当$0<a<1$时　$\log_a(1-x)>0$，$\log_a(1+x)<0$，$\log_a(1-x^2)>0$

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

综合（1）（2）可知：$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

点评：比较两式的大小通常有作差比较法和作商比较法；含有绝对值的要通过讨论去绝对值．

能力训练

一、选择题

1．已知四个条件①$b>0>a$　②$0>a>b$　③$a>0>b$　④$a>b>0$，能推出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的有（　　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

2．已知$1<x<10$，则下列关系正确的是（　　）

A．$\lg^2 x>\lg x^2>\lg\lg x$　　B．$\lg\lg x>\lg x^2>\lg^2 x$

C．$\lg x^2>\lg^2 x>\lg\lg x$　　D．$\lg^2 x>\lg\lg x>\lg x^2$，

3．若$a>0$且$a\neq1$，$p=\log_a(a^3+1)$，$q=\log_a(a^2+1)$，则p、q的大小关系为（　　）

A．$p<q$　　B．$p\leqslant q$　　C．$p>q$　　D．$p\geqslant q$

4．若$\log_a 2<\log_b 2<0$，则（　　）

A．$0<a<b<1$　　B．$0<b<a<1$　　C．$a>b>1$　　D．$b>a>1$

5．若α，β满足$-\frac{\lambda}{2}<\alpha<\beta<\frac{\lambda}{2}$，则$\alpha-\beta$的取值范围是（　　）

A．$-\lambda<\alpha-\beta<\lambda$　　B．$-\lambda<\alpha-\beta<0$　　C．$-\frac{\lambda}{2}<\alpha-\beta<\frac{\lambda}{2}$　　D．$-\frac{\lambda}{2}<\alpha-\beta<0$

6．若a，b为正实数，且$a\neq b$, $P=a^{k+1}+b^{k+1}$, $Q=ab^k+a^kb$，其中$k\in N^*$，则（　　）

A．$P>Q$　　B．$P<Q$　　C．$P=Q$　　D．不能确定

二、填空题

7．设$f(x)=ax^2+bx$，且$1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$，则$f(-2)$的取值范围为________.

8．α、β是实数，“$\alpha>2$且$\beta>2$”是“$\alpha+\beta>4$且$\alpha\beta>4$”的______条件.

三、解答题

9．已知a，b，c均为正实数，求证：$a+b-c$，$b+c-a$，$c+a-b$中最多只有一个是负数．

10．设$a>0$, $a\neq 1$, $t>0$，比较$\frac{1}{2}\log_a t$与$\log_a \frac{t+1}{2}$的大小.

新题赏析

设$f(x)=|\lg x|$，若$0<a<b$且$f(a)>f(b)$，证明：$ab<1$.

6.2 算术平均数与几何平均数

例题选讲

求函数 $y=\dfrac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}$ 的最小值，其中 $a>0$．

解析：$\because a>0$

$\therefore$（1）当 $0<a\leqslant 1$ 时，$y=\sqrt{x^2+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\geqslant 2$

当且仅当 $x=\pm\sqrt{1-a}$ 时，$y_{\min}=2$

（2）当 $a>1$ 时，令 $\sqrt{x^2+a}=t(t\geqslant\sqrt{a})$

则有 $y=f(t)=t+\dfrac{1}{t}$

设 $t_2>t_1\geqslant\sqrt{a}>1$ 则

$f(t_2)-f(t_1)=\dfrac{(t_2-t_1)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}>0$

$\therefore f(t)$ 在 $\left[\sqrt{a},+\infty\right]$ 上是增函数

$\therefore y_{\min}=f(\sqrt{a})=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$，此时 $x=0$

综合（1）（2）可知

当 $0<a\leqslant 1$，$x=\pm\sqrt{1-a}$ 时，$y_{\min}=2$

当 $a>1$，$x=0$ 时，$y_{\min}=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$

点评：运用重要不等式求最值时要注意等号能否取到，若取不到，应考虑用其它方法求最值．

能力训练

一、选择题

1．如果 $\lg x+\lg y=2$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值是（　　）

A．$\dfrac{1}{20}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

2．设 a，b，c 是区间（0，1）内三个互不相等的实数且 $p=\log_c\dfrac{a+b}{2}$，$q=\dfrac{\log_c a+\log_c b}{2}$，$r=\dfrac{1}{2}\log_c\dfrac{a^2+b^2}{2}$，则 p、q、r 的大小关系是（　　）

A．$p>q>r$　　B．$p<q<r$　　C．$r<p<q$　　D．$p<r<q$

3．设 $a>0, b>0, c>0$ 且 $a+b+c=1$，若 $M=\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$，则必有（　　）

A．$0\leqslant M<\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{8}\leqslant M<1$　　C．$1\leqslant M<8$　　D．$M\geqslant 8$

4. 当$x>0$时，可得到不等式$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3$，由此可推广为$x+\frac{p}{x^n}\geqslant n+1$，其中$p$等于（　　）

A. n^n　　B. $(n-1)^n$　　C. n^{n-1}　　D. n

5. 若x，y，a为正实数，且$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立，则$a$的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

6. 一批救灾物资随26辆汽车从某市以$v$km/h的速度直达灾区，已知两地公路线长400km，为了安全起见，两辆汽车间距不得小于$\left(\frac{v}{20}\right)^2$km，那么这批物资全部到达灾区，最少需要（　　）

A. 5h　　B. 10h　　C. 15h　　D. 20h

二、填空题

7. 若正数a，b满足$ab=a+b+3$，则ab的取值范围是________.

8. 若直角三角形的斜边长为1，则其内切圆半径的最大值为________.

三、解答题

9. 已知a，b均为正实数，且$a^2+\frac{b^2}{2}=1$，求$a\sqrt{1+b^2}$的最大值.

10. 设计一幅宣传画，要求画面面积为4 840cm^2，画面的宽与高的比为$\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各留8cm空白，右左各留5cm空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传画所用纸张面积最小？如果要求$\lambda\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$，那么$\lambda$为何值时，能使宣传画所用纸张面积最小？

新题赏析

有一位同学写了一个不等式：$\dfrac{x^2+1+c}{\sqrt{x^2+c}} \geqslant \dfrac{1+c}{\sqrt{c}}(x \in \mathbf{R})$

（1）他发现当 $c=1$，2，3 时不等式都成立，试问：不等式是否对任意的正数 c 都成立？为什么？

（2）对于已知的正数 c，这位同学还发现，把不等式右边的"$\dfrac{1+c}{\sqrt{c}}$"改成某些值，如 $-c$, 0 等，不等式总是成立的，试求出所有这些值的集合 M.

6.3　不等式的证明（1）

例题选讲

若 a，b，c 是不全相等的正数，求证：$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

证明：方法一（分析法）：

$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c \Leftarrow \lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(abc) \Leftarrow$

$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$.

$\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$，$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$，$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{ca}>0$，因 a、b、c 不全相等，所以以上三个不等式中等号不能同时成立，所以 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$ 成立，从而原不等式成立．

方法二（综合法）

$\because a,b,c\in R^+$，$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0,\ \frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0,\ \frac{c+a}{2}\leqslant\sqrt{ca}>0$，且上述三个不等式中等号不能同时成立，$\therefore \frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$，

$\therefore \lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(abc)$，

即 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

点评：分析法和综合法是对立统一的两个方面．在方法一中，前面是分析法，后面是综合法，两种方法并举，使问题较易解决．分析法的证明过程恰好是综合法的分析、思考的过程，综合法是分析、思考过程的逆推．

能力训练

一、选择题

1．$x\in\mathbf{R}$，那么 $(1-|x|)(1+x)>0$ 的一个充分不必要条件是（　　）

A．$|x|<1$　　B．$x<1$　　C．$|x|>1$　　D．$x<-1$ 或 $|x|<1$

2．设 x、y、$z\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2=z^2$，则 x^3+y^3 与 z^3 的大小关系是（　　）

A．$x^3+y^3=z^3$　　B．$x^3+y^3>z^3$　　C．$x^3+y^3<z^3$　　D．无法确定

3．若实数 m，n，x，y 满足 $m^2+n^2=a$，$x^2+y^2=b(a\neq b)$，则 $mx+ny$ 的最大值是（　　）

A．$\frac{a+b}{2}$　　B．$\sqrt{ab}$　　C．$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　D．$\frac{ab}{a+b}$

4．已知 a，b，c 是△ABC 的三边，那么方程 $a^2x^2-(a^2-b^2+c^2)x+c^2=0$

A．有两个不相等的实根　　B．有两个相等的实根

C．没有实数根　　D．要依 a、b、c 的具体取值确定

5．若 $0<x<\frac{1}{2}$，则下列各式中正确的是（　　）

A. $\log_x(1-x)>1$

B. $(1+x)^{\frac{3}{2}}<(1-x)^{\frac{3}{2}}$

C. $(1-x)^x<x^n(n\in\mathbf{N})$

D. $\cos(1+x)<\cos(1-x)$

6. 已知$a>0,\ b>0$，则下列各式中成立的是（　　）

A. $\cos^2\theta\cdot\lg a+\sin^2\theta\cdot\lg b<\lg(a+b)$

B. $\cos^2\theta\cdot\lg a+\sin^2\theta\cdot\lg b>\lg(a+b)$

C. $a^{\cos^2\theta}\cdot b^{\sin^2\theta}=a+b$

D. $a^{\cos^2\theta}\cdot b^{\sin^2\theta}>a+b$

二、填空题

7. 设$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b+c=1$，则$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$的最大值为________.

8. 使不等式$a^2>b^2,\ \dfrac{a}{b}>1,\ \lg(a-b)>0,\ 2^a>2^{b-1}$都成立的$a$与$b$的关系式为________.

三、解答题

9. 已知$a>b>0$，求证：$\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a$.

10. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，当实数p、q满足$p+q=1$时，试证明：$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$对于任意实数$x$、$y$都成立的充要条件是$0\leqslant p\leqslant 1$.

新题赏析

设绝对值小于1的全体实数的集合为S，在S中定义一种运算，使得$a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$，求证：如果a与b属于S，那么$a*b$也属于S.

6.4 不等式的证明（2）

例题选讲

（1）已知 a，b，c 是△ABC 的三边，求证：$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{c}{1+c}$；

（2）求证：$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}-1(n\in\mathbf{N})$.

证明：（1）由题设知 $a+b>c$，且 a，b，c 均为正数，

$\therefore \dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{c}$.

$\therefore \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{a}{1+a+b}+\dfrac{b}{1+a+b}=\dfrac{a+b}{1+a+b}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+b}}>\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{c}{1+c}$.

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{2\sqrt{k}}>\dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$,

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$；

又 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{2\sqrt{k}}<\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$,

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1+2\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right]$

$=2\sqrt{n}-1$ (n=1 时等号成立).

$\therefore 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}-1$.

点评：放缩法多用于证明严格不等式．放缩法证明不等式的原理是不等式的传递性，放缩的过程要作适当变形，要注意放缩适度，不能过头，更不能将不等号的方向弄反．

能力训练

一、选择题

1．若 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z<0$，则 $x^{\frac{1}{2}}$，$y^{\frac{1}{3}}$，$z^{\frac{1}{5}}$ 间的大小关系是（　　）

A．$y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}$　　B．$x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{3}}<z^{\frac{1}{5}}$　　C．$z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}<x^{\frac{1}{2}}$　　D．$x^{\frac{1}{2}}<z^{\frac{1}{5}}<y^{\frac{1}{3}}$

2．设 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n 的算术平均数是 $\overline{x}$，若 a 是不等于 $\overline{x}$ 的任意实数，并记 $p=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2$，$q=(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2$，则一定有（　　）

A．$p=q$　　B．$p<q$　　C．$p>q$　　D．$p\geqslant q$

3．设 a，b，c 为正实数，则 3 个数 $a+\dfrac{1}{b}$，$b+\dfrac{1}{c}$，$c+\dfrac{1}{a}$（　　）

A．都大于 2　　B．都小于 2　　C．至少有一个不大于 2　　D．至少有一个不小于 2

4．已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=0$, $abc=8$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的值是（　　）

A．一定是正数　　B．等于零　　C．一定是负数　　D．正负不能确定

5．已知 a，b 是两正数，且关于 x 的方程 $x^2+ax+2b=0$ 和 $x^2+2bx+a=0$ 都有实根，则 $a+b$ 的最小可能值是（　　）

A．5　　　　B．6　　　　C．8　　　　D．16

6．设函数 $f(x)=\sqrt{x+1}$，在 $f(x)$ 的定义域内任取 $x_1<x_2$，则

① $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$　　　　② $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$

③ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$　　　　④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

结论正确的是（　　）

A．②③　　　　B．①②③　　　　C．②③④　　　　D．①②③④

二、填空题

7．$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ 与 2 的大小关系是__________.

8．已知 $a^2+b^2=1$, $x^2+y^2=1$，则 $ax+by$ 的取值范围是________.

三、解答题

9．已知 $x+y+z=a$，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{a^2}{3}$.

10．已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=0$ 和 $abc=2$，求证：a，b，c 中至少有一个不小于 2.

新题赏析

已知 $0<u<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，求证：$u-u^2<\dfrac{1}{a+1}$.

6.5 不等式的解法举例

例题选讲

解下列关于 x 的不等式：

（1）$x^2-(a+a^2)x+a^3>0$；

（2）$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1(a\neq 1)$.

解析：（1）将不等式 $x^2-(a+a^2)x+a^3>0$ 变形为 $(x-a)(x-a^2)>0$.

当 $a<0$ 时，有 $a<a^2$，解为 $x<a$ 或 $x>a^2$.

当 $0<a<1$ 时，有 $a>a^2$，解为 $x<a^2$ 或 $x>a$.

当 $a>1$ 时，有 $a<a^2$，解为 $x<a$ 或 $x>a^2$

$a=0$ 时，解为 $x\neq 0$

$a=1$ 时，解为 $x\neq 1$.

综上，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $(-\infty,\ a)\cup(a^2,\ +\infty)$

当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $(-\infty,\ a^2)\cup(a,\ +\infty)$

当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $(-\infty,\ a)\cup(a^2,\ +\infty)$

（2）原不等式可化为 $\dfrac{(a-1)x+(2-a)}{x-2}>0$.

$\therefore (x-2)[(a-1)x+(2-a)]>0$.

当 $a>1$ 时有，$(x-2)\left(x-\dfrac{a-2}{a-1}\right)>0$，此时 $\dfrac{a-2}{a-1}=1-\dfrac{1}{a-1}<2$，解集为 $\left\{x\,|\,x>2\text{或}x<\dfrac{a-2}{a-1}\right\}$

当 $a<1$ 时，有 $(x-2)\left(x-\dfrac{a-2}{a-1}\right)<0$，若 $\dfrac{a-2}{a-1}>2$，即 $0<a<1$ 时，解集为 $\left\{x\,|\,2<x<\dfrac{a-2}{a-1}\right\}$；若 $\dfrac{a-2}{a-1}=2$，即 $a=0$ 时，解集为 $\varnothing$；若 $\dfrac{a-2}{a-1}<2$，即 $a<0$ 时，解集为 $\left\{x\left|\dfrac{a-2}{a-1}<x<2\right.\right\}$.

综上：当 $a<0$ 时，解集为 $\left(\dfrac{a-2}{a-1},\ 2\right)$

当 $a=0$ 时，解集为 $\varnothing$

当 $0<a<1$ 时，解集为 $\left(2,\ \dfrac{a-2}{a-1}\right)$

当 $a>1$ 时，解集为 $\left(-\infty,\ \dfrac{a-2}{a-1}\right)\cup(2,\ +\infty)$

点评：①一元二次不等式引发讨论的有：二次项系数的正负；判别式的符号；两根大小. ②解分式不等式的关键是把分式不等式转化为整式不等式，为此需把不等式右边的项进行移项并通分，然后对参数 a 进行分类讨论.

能力训练

1．解不等式$\dfrac{(x-3)(10-x)}{(x-1)x^2}\geqslant 0$得（　　）

A．$(-\infty,0)\cup(1,3]\cup[10,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup[3,10]$

C．$(0,1)\cup(3,10)$　　D．$[0,1)\cup(3,10)$

2．已知$a>0,b>0$，则不等式$-b<\dfrac{1}{x}<a$等价于（　　）

A．$x<-\dfrac{1}{a}$或$x>\dfrac{1}{b}$　　B．$-\dfrac{1}{a}<x<0$或$0<x<\dfrac{1}{b}$

C．$x<-\dfrac{1}{b}$或$x>\dfrac{1}{a}$　　D．$-\dfrac{1}{b}<x<0$或$0<x<\dfrac{1}{a}$

3．已知关于x的不等式$\dfrac{x-a}{x^2-3x+2}\geqslant 0$的解集为$[1,a]\cup(2,+\infty)$，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(1,2)$　　D．$[1,2]$

4．若$x^2-\log_a x<0$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$内恒成立，则$a$的取值范围是（　　）

A．$\dfrac{1}{16}\leqslant a<1$　　B．$\dfrac{1}{16}<a<1$　　C．$0<a\leqslant\dfrac{1}{16}$　　D．$0<a<\dfrac{1}{16}$

5．不等式$(x-1)\sqrt{x+2}\geqslant 0$的解集为（　　）

A．$\{x\mid x>1\}$　　B．$\{x\mid x\geqslant 1或x=-2\}$

C．$\{x\mid x\geqslant 1\}$　　D．$\{x\mid x\geqslant -2且x\neq 1\}$

6．关于x的不等式$\sqrt{a^2-x^2}<2x+a(a>0)$的解集为（　　）

A．$(0,a)$　　B．$(0,a]$　　C．$(0,+\infty)\cup\left(-\infty,-\dfrac{4}{5}a\right)$　　D．$\varnothing$

二、填空题

7．函数$f(x)=\log_2(x^2-4)$，$g(x)=2^{\sqrt{x-2k}}(k<-1)$，则$f(x)g(x)$的定义域为________.

8．不等式$|\log_3(3-x)|+\log_3 x\geqslant 1$的解集为________.

三、解答题

9．解关于x的不等式：

$1+\log_{\frac{1}{2}}(4-a^x)\geqslant\log_{\frac{1}{4}}(a^x-1)(a>0,a\neq 1)$