College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等学校经济管理学科数学基础

主编　范培华　胡显佑

线性代数中的典型例题分析与习题

卢　刚　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

线性代数中的典型例题分析与习题

卢 刚 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是作为“面向21世纪课程教材”——《高等学校经济管理学科数学基础：线性代数(第二版)》教材的配套辅导书。由原教材作者卢刚(第一、二、三章)和胡显佑(第四、五章)编写。为帮助读者系统地学习和掌握线性代数的主要内容和基本方法，各章都提纲挈领地列出了基本概念、重要定理与结论。在教材例题的基础上，有针对性地精选了大量的例题和习题，帮助读者系统地掌握基本概念、基本的解题方法与思路。本书不仅适合于经济管理学科本科生的需要，也是参加成人教育、高教自考、学历文凭考试读者的一本适用的参考书。对于有志考研的读者，本书也是一本有价值的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数中的典型例题分析与习题/卢刚主编．—北京：高等教育出版社，2004.6

ISBN 7-04-014379-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.卢…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第047358号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　李　陶　舒敬江　**封面设计**　张　楠
版式设计　胡志萍　**责任校对**　殷　然　**责任印制**　陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市白帆印务有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年7月第1版
印　　张	11	印　　次	2004年7月第1次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

作为"面向21世纪课程教材"——《高等学校经济管理学科数学基础:线性代数(第二版)》的配套辅导书,本书有以下两个特点:

1. 紧密结合教材的学习。本书每一章均由三部分组成:"内容要点"、"典型例题分析"和"习题"。

在"内容要点"部分,整理出本章的主要概念、重要定理与结论及应掌握的基本计算,以便读者能够提纲挈领地掌握本章的主要脉络,了解本章的基本要求。

在"典型例题分析"部分,一般是在教材已有例题的基础上,进一步扩大了例题的覆盖面,考虑到不同读者的需要,适当增加部分例题的难度。例题一般分类列出,通过解题前的分析,说明常用的解题思路与方法,一些例题还给出了一题多解。在一类例题讨论之后,以小结的形式,说明需要注意的问题。在例题的选择上,本着"强调基本方法,增强分析能力,开阔解题思路,提高综合能力"的原则,使例题在覆盖面、难易搭配、题型构成等方面对教材内容作了大量补充;

在"习题"部分,结合读者对前两部分内容的学习,选配了相应的习题,并注意到基本题与综合题的搭配。其中(A)部分列出的是基本题;(B)部分列出的是综合题和提高题;而作为以理解概念为主的单项选择题,在(C)中列出。各类习题均给出了参考答案或解题提示。

2. 适合多层次读者的需要。本书虽主要是作为经济管理学本科学生的学习辅导书,实际上也适合参加成人教育、高教自考、学历文凭考试等读者的学习需要。同时考虑到读者中的许多人还有考研的要求,书中的例题和习题有针对性地选择了一些全国研究生统考中的有代表性的试题,因此本书也是考研的一本系统的复习参考书。

希望本书能够对各方面读者的学习有所帮助和启发!也盼望大家能对书中的问题和不足给以批评和指正。

卢刚　胡显佑

2004年3月

目　录

第一章　矩　　阵

(一) 内 容 要 点

1. 矩阵的概念

(1) 矩阵的定义

由数域 F 中的 $m \times n$ 个数 $a_{ij}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$，排成的一个 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域 F 上的一个 $m \times n$ 的矩阵，记作 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}$. 其中 a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$.

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

(2) 矩阵相等

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s \times r}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow m=s, n=r$，且 $a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$.

(3) 零矩阵

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m \times n}$ 为零矩阵(记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$)$\Leftrightarrow a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$. 因此若 $A \neq \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个元 $a_{ij} \neq 0$.

(4) 方阵的行列式

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n \times n}$，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $\det \boldsymbol{A}$，或 $|\boldsymbol{A}|$，或 $|a_{ij}|$.

行列式的递推定义：$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (i=1,2,\cdots,n)$ 或 $\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

$(j=1,2,\cdots,n)$(其中 A_{ij} 是元 a_{ij} 的代数余子式,$i,j=1,2,\cdots,n$).

注 有些教材中给出的是另一种形式的定义,可称之为"逆序数定义":

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 为任意一个 n 级排列,$\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$ 为该排列的逆序数.

需注意的是,矩阵是一个表,而行列式是按一定规则确定的一个数(一些乘积的代数和).而且只有方阵才能定义行列式.同时,矩阵与行列式的符号也不相同.

2. 矩阵的运算

(1) 加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

加法满足以下运算法则:

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A};(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C});\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A};\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

其中 $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

(2) 数乘

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 为常数,则 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

数乘满足以下运算法则:

$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B};(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A};k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为矩阵,k,l 为常数.

(3) 乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$,

$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$.

乘法满足以下运算法则:

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC});\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC};(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA};$

$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵,k 为常数).

(4) 转置

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列位置互换,得到的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$,即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

转置满足以下运算法则:

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(其中 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为矩阵,k 为常数).

3. 行列式的性质

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$.

性质 1　$\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\det \boldsymbol{A}$.

性质 2　交换 $\boldsymbol{A}$ 的某两行(或某两列)得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\det \boldsymbol{B}=-\det \boldsymbol{A}$.

推论　若 $\boldsymbol{A}$ 有两行(或两列)元相同,则 $\det \boldsymbol{A}=0$.

性质 3　如果用数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或某一列),得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\det \boldsymbol{B}=k\det \boldsymbol{A}$.

性质 3 也可表述为:行列式某一行(或某一列)的公因子可以提到行列式外.

推论 1　若 $\boldsymbol{A}$ 有一行(或一列)元全为零,则 $\det \boldsymbol{A}=0$.

推论 2　若 $\boldsymbol{A}$ 有两行(或两列)元成比例,则 $\det \boldsymbol{A}=0$.

性质 4　若行列式的某一行(或某一列)的每个元均表示为两个数的和,则该行列式可以表示为两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的 k 倍加到另一行(或将 $\boldsymbol{A}$ 的某一列的 k 倍加到另一列),得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\det \boldsymbol{B}=\det \boldsymbol{A}$.

由行列式定义和性质可推出:

定理 1.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}\det \boldsymbol{A}, & 若\ i=k,\\ 0, & 若\ i\neq k;\end{cases}(i,k=1,2,\cdots,n)$;

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il}=\begin{cases}\det \boldsymbol{A}, & 若\ j=l,\\ 0, & 若\ j\neq l,\end{cases}(j,l=1,2,\cdots,n)$.

由行列式性质和矩阵乘法还可以得到：

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$.

此结果还可以推广为有限个 n 阶矩阵乘积的情况.

范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

4. 矩阵的分块及分块矩阵的运算

需注意的是：两个分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加时，要求 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的分块方式必须完全相同；而两个分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 作乘法 $\boldsymbol{AB}$ 时，要求 $\boldsymbol{A}$ 的列的分块方式与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块方式相同，并且乘积矩阵的行的分块方式与 $\boldsymbol{A}$ 相同，列的分块方式与 $\boldsymbol{B}$ 相同.

5. 可逆矩阵

(1) 可逆矩阵的几个充分必要条件：

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 非奇异（或非退化），即 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可以表示为有限个初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$.

注 在后面几章中还有一些关于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件，列举如下：

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解（第二章）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关（第二章）

$\Leftrightarrow$ 任意 n 维列（行）向量均可以表示为 $\boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组的线性组合，且表示法唯一（第二章）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基（第三章）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的某两组基之间的过渡矩阵（第三章）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值均不为零（第四章）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵（第五章）

(2) 可逆矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，k 为非零常数，则

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；

$\det A^{-1}=(\det A)^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$;$\det A^{*}=(\det A)^{n-1}$;$(A^{*})^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A$.

(3) 求逆矩阵的伴随矩阵法

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

(4) 几种特殊的分块矩阵的逆矩阵

设 A 为 m 阶可逆矩阵,B 为 n 阶可逆矩阵,C 为任意 $m\times n$(或 $n\times m$)矩阵,则

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix};\qquad\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB\\O&B^{-1}\end{pmatrix};\qquad\begin{pmatrix}A&O\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}.$$

6. 矩阵的初等变换与初等矩阵

(1) 初等变换

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则

第一种初等变换:交换 A 的某两行(或某两列);

第二种初等变换:用非零常数 k 乘以 A 的某一行(或某一列);

第三种初等变换:将 A 某一行(或某一列)的 k 倍加到另一行(或另一列)上.

(2) 初等矩阵

第一种初等矩阵:交换 E 的第 i 行(列)与第 j 行(列)得到的矩阵,记作 $P(i,j)$;

第二种初等矩阵:用非零常数 k 乘以 E 的第 i 行(列)得到的矩阵,记作 $P(i(k))$;

第三种初等矩阵:将 E 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上,得到的矩阵,记作 $P(i(k),j)$;($P(i(k),j)$ 也表示将 E 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上得到的矩阵).

初等矩阵的性质:

$$P(i,j)^{\mathrm T}=P(i,j);P(i(k))^{\mathrm T}=P(i(k));P(i(k),j)^{\mathrm T}=P(j(k),i);$$

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j);P(i(k))^{-1}=P\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);P(i(k),j)^{-1}=P(i(-k),j).$$

(3) 对 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 进行一次行初等变换,相当于用一个 m 阶初等矩阵左乘 A;进行一次列初等变换,相当于用一个 n 阶初等矩阵右乘 A.

(4) 任意 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可以表示为有限个 n 阶初等矩阵的乘积.

(5) 求逆矩阵的行(列)初等变换法:

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1});$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hline \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{列初等变换}]{}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hline \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

7. 矩阵的秩

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,

(1) $r(\boldsymbol{A})=k\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 存在一个 k 阶子式不为零,并且所有的 $k+1$ 阶子式全为零;

(2) $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,n)$;

(3) $r(\boldsymbol{A})=k\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的等价标准形的分块矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix};$$

(4) 初等变换不改变矩阵的秩;

(5) 用行初等变换法求矩阵的秩.

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\boldsymbol{B}(\text{阶梯矩阵}),$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$ 的非零行"阶梯"个数.

(二) 典型例题分析

1. 有关矩阵的概念与运算

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,若存在矩阵 $\boldsymbol{X}$,满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$,则称 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.试求出所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

分析 由矩阵乘法可知:与 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为 3 阶矩阵.一般采用的计算形式是:设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 可交换,然后分别计算 $\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{XA}$,再由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 推出 $\boldsymbol{X}$ 的元所具有的结构,但注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$,而

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{EX}+\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{BX},$$
$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{XE}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{XB}.$$

显然 $\quad \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow \boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$.

由于 $\boldsymbol{B}$ 中的零元较 $\boldsymbol{A}$ 更多,故 $\boldsymbol{BX}$ 与 $\boldsymbol{XB}$ 的计算结果更加简单.

解 $\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}.$

设 $\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\Leftrightarrow\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$.

其中 $\quad \boldsymbol{BX}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\0&0&0\end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{XB}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_{11}&x_{12}\\0&x_{21}&x_{22}\\0&x_{31}&x_{32}\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{XB}$ 推出 $x_{21}=0,x_{31}=0,x_{32}=0;x_{11}=x_{22}=x_{33},x_{12}=x_{23}$.从而所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵形如

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\0&x_{11}&x_{12}\\0&0&x_{11}\end{pmatrix},\text{其中 } x_{11},x_{12},x_{13}\text{为任意常数}.$$

评注 本题计算思路的关键是利用单位矩阵在矩阵乘法中的特殊作用,此外正确地运用矩阵加法与乘法的分配律也是非常重要的.对于结构特殊的矩阵,通过分解可以简化矩阵的乘法计算.在后面有关方阵的方幂和矩阵求逆的计算中,还会用到这种思路.

例 2 设对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互不相同.证明:与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

解 显然,与 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为 n 阶矩阵,设

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

与 A 可交换.由 $AX = XA$,有

$$\begin{pmatrix} a_1 x_{11} & a_1 x_{12} & \cdots & a_1 x_{1n} \\ a_2 x_{21} & a_2 x_{22} & \cdots & a_2 x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n x_{n1} & a_n x_{n2} & \cdots & a_n x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_{11} & a_2 x_{12} & \cdots & a_n x_{1n} \\ a_1 x_{21} & a_2 x_{22} & \cdots & a_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 x_{n1} & a_2 x_{n2} & \cdots & a_n x_{nn} \end{pmatrix}$$

得到 $a_i x_{ij} = a_j x_{ij}$,或$(a_i - a_j)x_{ij} = 0,(i,j = 1,2,\cdots,n)$,
由于当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$,从而由上式必可推出:$x_{ij} = 0,(i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n)$,
即 X 的主对角线以外的元全为零.故

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{pmatrix},$$ 其中 x_{ii} 为任意常数$(i = 1,2,\cdots,n)$.

例 3 设 $A = (a_{ij})$为 n 阶矩阵,称 A 的主对角线上所有元的和为 A 的迹,记作 $\operatorname{tr} A$,即 $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.证明:对任意 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$和 $B = (b_{ij})$,$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
(教材:习题一(A)15 题(4))

证明 设 $AB = C = (c_{ij})$,$BA = D = (d_{ij})$.则由矩阵乘法知

$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$,从而

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr} C &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr} D \\ &= \operatorname{tr}(BA),\end{aligned}$$

即 $$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

证毕

评注 本题证明的基础是矩阵乘法,同时运用了交换求和顺序的技巧.

例 4 设 A,B 均为 n 阶矩阵,证明:

(1) 若 A 为对称矩阵,B 为反称矩阵,则 AB 为反称矩阵的充分必要条件是 A 与 B 可交换;

(2) 若 A,B 满足 $A^2 = E, B^2 = E$,则$(AB)^2 = E$ 的充分必要条件是 A 与 B

可交换.

证明 (1) 已知 $A^{T}=A, B^{T}=-B$.

必要性(由 $(AB)^{T}=-AB$,证明 $AB=BA$):

由于 $(AB)^{T}=-AB$,另一方面

$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}=-BA$,从而得到

$-AB=-BA$,即 $AB=BA$;

充分性 (由 $AB=BA$,证明 $(AB)^{T}=-AB$):

由于 $AB=BA$,故

$$(AB)^{T}=(BA)^{T}=A^{T}B^{T}=A(-B)=-AB,$$

即 AB 为反称矩阵.

(2) 已知 $A^{2}=E, B^{2}=E$.

必要性 (由 $(AB)^{2}=E$,证明 $AB=BA$):

由于 $(AB)^{2}=E$,即

$$(AB)^{2}=(AB)(AB)=ABAB=E,$$

分别用 A 左乘,B 右乘式 $ABAB=E$ 两边,得到

$$A^{2}BAB^{2}=AEB=AB,$$

即

$$EBAE=BA=AB.$$

充分性 (由 $AB=BA$,证明 $(AB)^{2}=E$):

由于 $AB=BA$,故

$$(AB)^{2}=(AB)(AB)=A(BA)B=A(AB)B=A^{2}B^{2}=EE=E,$$

即

$$(AB)^{2}=E.$$

证毕

例 5 (单项选择题).下列结论中,不正确的是( )

(A) 设 A 为 n 阶矩阵,则 $(A-E)(A+E)=A^{2}-E$

(B) 设 A, B 均为 $n\times 1$ 矩阵,则 $A^{T}B=B^{T}A$

(C) 设 A, B 均为 n 阶矩阵,且满足 $AB=O$,则 $(A+B)^{2}=A^{2}+B^{2}$

(D) 设 A, B 均为 n 阶矩阵,且满足 $AB=BA$,则对任意正整数 k, m,有 $A^{k}B^{m}=B^{m}A^{k}$.

分析 (A) 由矩阵加法与乘法的分配律,

左边 $=(A-E)(A+E)=A^{2}+AE-EA-E^{2}=A^{2}+A-A-E=A^{2}-E=$ 右边

(B) 由于 $A^{T}B$ 与 $B^{T}A$ 均为一阶矩阵,而一阶矩阵的转置仍为其自身,即 $(A^{T}B)^{T}=B^{T}A$,且 $(A^{T}B)^{T}=A^{T}B$,从而 $A^{T}B=B^{T}A$

(C) 由 $(A+B)^{2}=(A+B)(A+B)=A^{2}+AB+BA+B^{2}$,若 $AB=O$,则

不一定必有 $BA=O$ $\left(例如 A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},则 AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\right.$ $\left.而 BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.\right)$因此,$(A+B)^2=A^2+B^2$ 不一定成立.故(C)不正确.对于(D),当 $AB=BA$ 时,可利用数学归纳法证明 $A^kB^m=B^mA^k$(见例8).

解 应选(C).

2. 求方阵的方幂(1)[①]

例6 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,对任意正整数 $n\geqslant 2$,求 A^n-2A^{n-1}.

解 $n=2$ 时,$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A$,

由此可推出:$A^n=A^2A^{n-2}=(2A)A^{n-2}=2A^{n-1}$,从而

$$A^n-2A^{n-1}=O_{3\times 3}.$$

注 此题求解中,得到 $A^2=2A, A^3=A^2A=2A^2=2^2A,\cdots$,可归纳出 $A^n=2^{n-1}A$,这也是一种求 A^n 的方法.

例7 设 $\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm T}$,矩阵 $A=\alpha\alpha^{\mathrm T}$,对于正整数 n,求 A^n.

分析 由于 $\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm T}$,故 $A=\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 为3阶矩阵,但 $\alpha^{\mathrm T}\alpha$ 为一阶矩阵,即一个数.而

$$\begin{aligned}A^n&=(\alpha\alpha^{\mathrm T})(\alpha\alpha^{\mathrm T})\cdots(\alpha\alpha^{\mathrm T})=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}\\&=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^{n-1}\alpha^{\mathrm T}=(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^{n-1}\alpha\alpha^{\mathrm T}=(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^{n-1}A.\end{aligned}$$

解 由于 $\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm T}, A=\alpha\alpha^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}A^n&=(\alpha\alpha^{\mathrm T})(\alpha\alpha^{\mathrm T})\cdots(\alpha\alpha^{\mathrm T})=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha\\&=(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^{n-1}\alpha\alpha^{\mathrm T}=(\alpha^{\mathrm T}\alpha)^{n-1}A,\end{aligned}$$

其中 $\alpha^{\mathrm T}\alpha=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$,从而

$$A^n=2^{n-1}A=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$

① 在第四章还会给出另外的计算方法,故此处标记(1).

评注 灵活运用矩阵乘法满足结合律,是此题计算思路的关键.

例 8 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,证明

(1) 对任意正整数 k,m, $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$

(2) 对任意正整数 m, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m=\sum\limits_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{A}^{m-k}\boldsymbol{B}^k$(方阵的二项式展开式).

证明 (1) 先证明对任意正整数 m,有 $\boldsymbol{AB}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}$.

对 m 作数学归纳法.当 $m=1$ 时,由已知条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,即当 $m=1$ 时结论成立.假设当 $m=l$ 时结论成立,即 $\boldsymbol{AB}^l=\boldsymbol{B}^l\boldsymbol{A}$,则当 $m=l+1$ 时,

$\boldsymbol{AB}^{l+1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^l\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{AB}^l)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}^l\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^l(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^l(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{B}^{l+1}\boldsymbol{A}$,

故当 $m=l+1$ 时结论也成立,由归纳法原理,对一切正整数 m,有 $\boldsymbol{AB}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}$.

再证明 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$.

对 k 作数学归纳法.当 $k=1$ 时,由上面结论知 $\boldsymbol{AB}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}$,即当 $k=1$ 时结论成立.假设当 $k=t$ 时结论成立,即 $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^t$,则当 $k=t+1$ 时,

$\boldsymbol{A}^{t+1}\boldsymbol{B}^m=(\boldsymbol{AA}^t)\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^m)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^t)=(\boldsymbol{AB}^m)\boldsymbol{A}^t=(\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^{t+1}$,故当 $k=t+1$ 时结论也成立.由归纳法原理,对一切正整数 k,有 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$.

(2) 对 m 作数学归纳法.

$m=1$ 时 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^1=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$;当 $m=2$ 时,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,有

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$,即当 $m=2$ 时结论成立.

假设当 $m=t$ 时结论成立,即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^t &= \sum_{k=0}^{t}\mathrm{C}_t^k\boldsymbol{A}^{t-k}\boldsymbol{B}^k\\ &=\mathrm{C}_t^0\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^0+\mathrm{C}_t^1\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_t^2\boldsymbol{A}^{t-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_t^{t-1}\boldsymbol{AB}^{t-1}+\mathrm{C}_t^t\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{B}^t,\end{aligned}$$

当 $m=t+1$ 时,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{t+1}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\
&=(\mathrm{C}_t^0\boldsymbol{A}^t+\mathrm{C}_t^1\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_t^2\boldsymbol{A}^{t-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_t^{t-1}\boldsymbol{AB}^{t-1}+\mathrm{C}_t^t\boldsymbol{B}^t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\
&=(\mathrm{C}_t^0\boldsymbol{A}^{t+1}+\mathrm{C}_t^1\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_t^2\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_t^{t-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{t-1}+\mathrm{C}_t^t\boldsymbol{AB}^t)+\\
&\quad(\mathrm{C}_t^0\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_t^1\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}^2+\\
&\quad\mathrm{C}_t^2\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}^3+\cdots+\mathrm{C}_t^{t-1}\boldsymbol{AB}^t+\mathrm{C}_t^t\boldsymbol{B}^{t+1})\\
&=\mathrm{C}_t^0\boldsymbol{A}^{t+1}+(\mathrm{C}_t^1+\mathrm{C}_t^0)\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}+(\mathrm{C}_t^2+\mathrm{C}_t^1)\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}^2+\\
&\quad\cdots+(\mathrm{C}_t^{t-1}+\mathrm{C}_t^{t-2})\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{t-1}+(\mathrm{C}_t^t+\mathrm{C}_t^{t-1})\boldsymbol{AB}^t+\mathrm{C}_t^t\boldsymbol{B}^{t+1}\\
&=\mathrm{C}_{t+1}^0\boldsymbol{A}^{t+1}+\mathrm{C}_{t+1}^1\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_{t+1}^2\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{B}^2+\\
&\quad\cdots+\mathrm{C}_{t+1}^{t-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{t-1}+\mathrm{C}_{t+1}^t\boldsymbol{AB}^t+\mathrm{C}_{t+1}^{t+1}\boldsymbol{B}^{t+1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^{k} A^{t+1-k} B^{k}.$$

(倒数第三式到第二式利用了组合的性质：$C_t^k + C_t^{k-1} = C_{t+1}^k$，及 $C_t^0 = C_{t+1}^0 = 1$，$C_t^t = C_{t+1}^{t+1} = 1$)即当 $m = t+1$ 时结论也成立．从而由归纳法原理，对任意正整数 m，有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \boldsymbol{A}^{m-k}\boldsymbol{B}^k$.

证毕

例 9 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，对正整数 n，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解

由于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

设为 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$，

对于 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

从而当 $n \geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{B}^n = \boldsymbol{O}_{3\times 3}$. 由例 8(2)，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= (a\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^n \\
&= (a\boldsymbol{E})^n + C_n^1 (a\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B} + C_n^2 (a\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2 \\
&= a^n\boldsymbol{E} + C_n^1 a^{n-1}\boldsymbol{EB} + C_n^2 a^{n-2}\boldsymbol{EB}^2 \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + C_n^1 a^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C_n^2 a^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & C_n^1 a^{n-1} b & C_n^2 a^{n-2} b^2 \\ 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

现证明该结论正确，对 n 作数学归纳法.

$n = 1$ 时，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$；$n = 2$ 时，$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} =$