

北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1 + 1

——初二代数同步讲解与测试

主编 张志朝 花文明

天津人民出版社

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已有三年，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征求专家、教师、学生和家長意见的基础上，作了较大程度的修改。

本书以新数学大纲为指导，按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题方法等，其中对例题的分析处理十分到位，不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答，更重要的是解题后的说明，它是作者解题的体会和感受，是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中，作者言简意赅地揭示巧思的思维过程；如何灵活地选用数学方法；对于可转化或引申的题目，给出其转化或引申的形式及其解法；对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示，帮助学生领悟作者选题的意图，使学生做到立足基础，抓住关键，突破难点，研究方法，以一题代一类，真正使学生做到举一反三，触类旁通，从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型，增加了一些体现近几年中考命题方向的新题，并补充了一些与生产生活密切相关的应用题，可以说题型十分丰富，且综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中,应结合教科书,努力掌握知识点的各种用法及注意事项,对某些重点难点要进行仔细的分析、研究,结合例题,做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时,要结合教科书及讲解内容进行独立思考,首先考虑应选择何种解题思路与策略,然后实施解题,并注意解题的规范性,解题结束后可与题解对照,弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案?为什么这样解而不是那样解?还可以怎样解?怎样才对?从一个点进行发散性联想思维。课后还应对一些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问,及时解决。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,虽然我们兢兢业业,勉力为之,但因水平有限,难免有错漏之处,诚望批评指正,以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系。联系电话:010-64925885,64925887,64923723,64948723;通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱;邮编:100101。

宋伯涛

2004年5月于北师大

目 录

CONTENTS

第8章 因式分解

本章教材分析	1
8.1 提公因式法	1
学习目标	1
中考要求	1
知识点精讲	1
典例剖析	2
疑难问题举例	6
错解点击	6
本节小结	7
同步测试	8
同步测试解答	8
8.2 运用公式法	10
学习目标	10
中考要求	10
知识点精讲	10
典例剖析	11
疑难问题举例	13
错解点击	16
本节小结	17
同步测试	17
同步测试解答	18
8.3 分组分解法	20
学习目标	20
中考要求	21
知识点精讲	21
典例剖析	24
疑难问题举例	27
错解点击	30
本节小结	31
同步测试	31
同步测试解答	33

本章专题总结	36
知识结构总结	36
思想方法总结	36
注意事项总结	37
解题方法指导	38
因式分解常见错误剖析	44
本章综合检测题	46
本章综合检测题解答	48

第9章 分 式

本章教材分析	51
9.1 分 式	51
学习目标	51
中考要求	51
知识点精讲	51
典例剖析	53
疑难问题举例	54
错解点击	56
本节小结	57
同步测试	57
同步测试解答	59
9.2 分式的基本性质	61
学习目标	61
中考要求	62
知识点精讲	62

典例剖析	63	同步测试解答	112
疑难问题举例	64	9.6 探究性活动:$a=bc$型	
错解点击	65	数量关系	115
本节小结	66	学习目标	115
同步测试	66	中考要求	115
同步测试解答	68	知识点精讲	115
9.3 分式的乘除法	69	典例剖析	116
学习目标	69	疑难问题举例	117
中考要求	70	错解点击	119
知识点精讲	70	本节小结	120
典例剖析	72	同步测试	120
疑难问题举例	74	同步测试解答	122
错解点击	76	9.7 可化为一元一次方程的	
本节小结	77	分式方程及其应用	123
同步测试	77	学习目标	123
同步测试解答	79	中考要求	123
9.4 分式的加减法	82	知识点精讲	124
学习目标	82	典例剖析	126
中考要求	82	疑难问题举例	131
知识点精讲	82	错解点击	134
典例剖析	86	本节小结	135
疑难问题举例	91	同步测试	135
错解点击	95	同步测试解答	137
本节小结	96	本章专题总结	142
同步测试	96	知识结构总结	142
同步测试解答	99	思想方法总结	143
9.5 含有字母系数的		注意事项总结	144
一元一次方程	104	解题方法指导	144
学习目标	104	分式常见错误剖析	154
中考要求	104	本章综合检测题	157
知识点精讲	104	本章综合检测题解答	159
典例剖析	106		
疑难问题举例	108	第10章 数的开方	
错解点击	109	本章教材分析	163
本节小结	110	10.1 平方根	163
同步测试	110	学习目标	163

中考要求	243	同步测试	280
知识点精讲	243	同步测试解答	282
典例剖析	245	11.6 二次根式的混合运算	285
疑难问题举例	249	学习目标	285
错解点击	250	中考要求	285
本节小结	251	知识点精讲	285
同步测试	251	典例剖析	286
同步测试解答	253	疑难问题举例	291
11.3 二次根式的除法	255	错解点击	293
学习目标	255	本节小结	294
中考要求	255	同步测试	295
知识点精讲	255	同步测试解答	296
典例剖析	257	*11.7 二次根式$\sqrt{a^2}$的化简	298
疑难问题举例	260	学习目标	298
错解点击	260	中考要求	299
本节小结	262	知识点精讲	299
同步测试	262	典例剖析	302
同步测试解答	264	疑难问题举例	308
11.4 最简二次根式	267	错解点击	310
学习目标	267	本节小结	311
中考要求	267	同步测试	312
知识点精讲	267	同步测试解答	314
典例剖析	268	本章专题总结	319
疑难问题举例	269	知识结构总结	319
错解点击	270	思想方法总结	320
本节小结	271	注意事项总结	320
同步测试	271	解题方法指导	321
同步测试解答	272	二次根式常见 错误剖析	334
11.5 二次根式的加减法	274	本章综合检测题	336
学习目标	274	本章综合检测题解答	338
中考要求	274		
知识点精讲	274		
典例剖析	275		
疑难问题举例	278		
错解点击	279		
本节小结	280		



第8章 因式分解

本章教材分析

因式分解是多项式中最基本的知识和方法,它包括因式分解的有关概念,整式乘法与因式分解的区别和联系.因式分解有三种方法:提公因式法,运用公式法和分组分解法.

多项式的因式分解是代数式中的重要内容,它与前一章整式和后一章分式联系极为密切.因式分解是在整式四则运算的基础上进行的,因式分解就是多项式乘法的逆变形.这部分内容在分式通分和约分时有着直接的应用,在解方程以及研究函数性质等方面也经常用到.

本章的重点是因式分解的三种方法,难点是三种基本方法的综合运用和解题技巧的掌握.

8.1 提公因式法



学习目标

1. 正确理解因式分解的意义及它与整式乘法的区别和联系.
2. 能够用提公因式法把多项式进行因式分解.



中考要求

灵活掌握和运用因式分解的三种基本方法,考查这部分知识的试题常以判断题、填空题、选择题的形式出现.



知识点精讲

1. 因式分解的概念

把一个多项式化成几个整式乘积的形式,这种式子变形叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式.

注意:因式分解的结果是几个整式的乘积,与整式乘法相比较,在变形上正好是互逆的过程.



例如, $(3x-2)(3x+2)=9x^2-4$, $a(x+y-z)=ax+ay-az$, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 等都是整式乘法, 反过来, $9x^2-4=(3x+2)(3x-2)$, $ax+ay-az=a(x+y-z)$, $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ 等都是因式分解.

2. 提公因式法

(1) 公因式: 一个多项式各项都含有的因式叫做这个多项式的公因式.

(2) 提公因式法: 如果一个多项式的各项有公因式, 可以把公因式提到括号外面, 将多项式写成因式乘积的形式, 这种分解因式的方法叫做提公因式法.

注意: (1) 提公因式法的关键是正确找出公因式.

(2) 找公因式的方法: ① 公因式的系数是多项式各项系数的最大公约数; ② 字母取各项中都含有的相同的字母; ③ 相同字母的指数取次数最低的.

例如, 把多项式 $9x^3y-3x^2y^2+12x^2y^3z$ 因式分解, 各项系数的最大公约数是 3, 各项都含有的相同字母是 x, y , x 的指数最低是 2, y 的指数最低是 1, 因此, 多项式 $9x^3y-3x^2y^2+12x^2y^3z$ 的公因式为 $3x^2y$.

3. 提公因式法分解因式的一般步骤

(1) 找出公因式; (2) 提公因式并确定另一个因式. 提公因式时, 可用原多项式除以公因式, 所得的商即是提出公因式后, 剩下的另一个因式; 也可用公因式分别去除原多项式的每一项, 求得剩下的另一个因式.

例如, 因式分解 $8a^3b^2-12ab^3c$, 提公因式 $4ab^2$ 时, 用 $4ab^2$ 分别去除原多项式的每一项, 得 $(8a^3b^2 \div 4ab^2 - 12ab^3c \div 4ab^2) = (2a^2 - 3bc)$, 即 $8a^3b^2 - 12ab^3c = 4ab^2(2a^2 - 3bc)$.



典例剖析

题型 1 概念判断

例 1 下列由左到右的变形, 哪些是因式分解? 哪些不是? 为什么?

(1) $a(x+y)=ax+ay$;

(2) $x^2+2xy+y^2-1=x(x+2y)+(y+1)(y-1)$;

(3) $ax^2-9a=a(x+3)(x-3)$;

(4) $x^2-y^2-1=(x+y)(x-y)-1$;

(5) $x^2-2x+2y-y^2=(x^2-y^2)-2(x-y)$.

解: 因为 (1)、(2)、(4)、(5) 的右边都不是整式乘积的形式, 所以它们都不是因式分解. 其中 (1) 是乘法运算; 只有 (3) 的右边是因式乘积形式, 并且左边是多项式, 所以 (3) 是因式分解.

说明: ① 因式分解是针对多项式而言的, 是多项式的一种恒等变形, 被分解的是多项式, 分解的结果应该是整式的积, 如:

$$xy-x-y+1=xy\left(1-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}\right)$$

虽然分解成了积的形式,但其中一个因式 $(1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{xy})$ 不是整式,所以,这种恒等变形不是因式分解.

②因式分解的结果必须是积的形式,如

$$x^2 - y^2 - 1 = (x+y)(x-y) - 1$$

也不是因式分解.因为,等式的右边是 $(x+y)(x-y)$ 与1的差,不是积的形式.

题型2 提公因式

例2 代数式 $15a^3b^3(a-b)$, $5a^2b(b-a)$, $-120a^3b^3(a^2-b^2)$ 的公因式是 ()

A. $5ab(a-b)$

B. $5a^2b^2(b-a)$

C. $5a^2b(b-a)$

D. $120a^3b^3(a^2-b^2)$

分析:公因式的系数应取各项系数的最大公约数,字母取各项的相同的字母,且取相同字母的最低次幂.

解:先确定系数15,5,120的最大公约数是5,再确定相同的字母及其指数,对相同字母 a 来讲,最低次幂为 a^2 ;对相同字母 b 来讲,最低次幂为 b ;对相同因式 $(b-a)$ 来讲,最低次幂为 $b-a$,这里 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.因此这三个代数式的公因式为 $5a^2b(b-a)$ 故选C.

说明:掌握提公因式的法则要领,先确定系数,再确定相同的字母及指数.

题型3 用提公因式法分解因式

例3 把下列各式分解因式:

(1) $3x^2 - 6xy + x$;

(2) $-4m^3 + 16m^2 - 26m$.

分析:因为多项式 $3x^2 - 6xy + x$ 的公因式是 x , $(3x^2 - 6xy + x) \div x = 3x - 6y + 1$,所以(1)式因式分解的结果是 $x(3x - 6y + 1)$;因为 $-4m^3 + 16m^2 - 26m$ 的公因式为 $-2m$, $(-4m^3 + 16m^2 - 26m) \div (-2m) = 2m^2 - 8m + 13$,所以(2)式因式分解的结果是 $-2m(2m^2 - 8m + 13)$.

解:(1) $3x^2 - 6xy + x = x(3x - 6y + 1)$;

(2) $-4m^3 + 16m^2 - 26m = -2m(2m^2 - 8m + 13)$.

说明:①“1”作为项的系数通常省略不写,但单独成一项时,它在因式分解时不能漏掉.如(1)中的因式 $(3x - 6y + 1)$ 不能写成 $(3x - 6y)$.

②分解必须彻底,即在指定范围内分解到不能再分解为止.如多项式 $-4m^3 + 16m^2 - 26m$ 因式分解的结果是 $-2m(m^2 - 8m + 13)$,而不是 $-m(4m^2 - 16m + 26)$.不要忘记提取各项系数的最大公约数.

③多项式的第一项的系数是负数时,一般要提出“-”号,使括号内的第一项是正的,在提出“-”号时,多项式的各项都要变号.

例4 把下列各式分解因式:



$$(1) -10x^4y^2z^3 - 35x^2y^3z^2 + 15x^3yz;$$

$$(2) 2(x-y)(a-2b+3c) - 3(x+y)(2b-a-3c).$$

分析: (1) 式按公因式提取法规则知公因式为 $-5x^2yz$.

(2) 是否需要打开括号相乘呢? 这样很麻烦, 现注意到前后两式, 每一式子都是两个多项式乘积形式而 $(2b-a-3c) = -(a-2b+3c)$, 因而整个式子产生公因式 $(a-2b+3c)$.

$$\text{解: (1)} \quad -10x^4y^2z^3 - 35x^2y^3z^2 + 15x^3yz$$

$$= -5x^2yz(2x^2yz^2 + 7y^2z - 3x);$$

$$(2) \quad 2(x-y)(a-2b+3c) - 3(x+y)(2b-a-3c)$$

$$= (a-2b+3c)[2(x-y) + 3(x+y)]$$

$$= (a-2b+3c)(5x+y).$$

说明: 公因式要提“全”、提“净”, 若第(1)题只提取 $5x^2y$ 或只提取 $5xyz$ 等均会导致错误, 并且这里 $5x^2yz$ 前的符号为“-”, 是考虑到括号内的式子第一项系数一般为正数才如此处理, 提出“-”时, 每项的符号均要改变. 第(2)题提取 $(a-2b+3c)$ 为公因式, 要多观察, 并且提取后, 后面括号内的式子应合并同类项.

例5 把下列各式分解因式:

$$(1) (m-n)(5ax+ay-1) - (n-m)(3ay-ax+1);$$

$$(2) (m-n)^4 + m(m-n)^3 + n(n-m)^3.$$

分析: (1) 式中, 注意到 $-(n-m) = m-n$, 故此式中的公因式可提取为 $(m-n)$.

(2) 式中, 同样注意到 $(n-m)^3 = -(m-n)^3$ 的特征, 因而该式中的公因式提取为 $(m-n)^3$.

$$\text{解: (1)} \quad (m-n)(5ax+ay-1) - (n-m)(3ay-ax+1)$$

$$= (m-n)(5ax+ay-1) + (m-n)(3ay-ax+1)$$

$$= (m-n)[(5ax+ay-1) + (3ay-ax+1)]$$

$$= (m-n)(4ax+4ay) = 4a(m-n)(x+y);$$

$$(2) \quad (m-n)^4 + m(m-n)^3 + n(n-m)^3$$

$$= (m-n)^4 + m(m-n)^3 - n(m-n)^3$$

$$= (m-n)^3[(m-n) + m-n]$$

$$= (m-n)^3(2m-2n)$$

$$= (m-n)^3 \cdot 2(m-n)$$

$$= 2(m-n)^4.$$

说明: ① 提出公因式后, 如果括号内有同类项, 应该合并同类项 (如第(1)、(2)小题), 如果括号内合并同类项后成为单项式, 这时, 应将单项式因式写在多项式因式的前面 (如第(1)小题分解的结果).

② 提公因式后, 括号内的式子经合并同类项整理后, 若仍有公因式, 则应继续

提取公因式,直到多项式的每一个因式都不能再分解为止(如第(1)小题).

③因式分解时,如果有相同的因式,应将相同的因式写成幂的形式(如第(2)小题).

例6 把下列各式分解因式:

$$(1) (a^2 + ab - ac) + (ab + b^2 - bc) + (c^2 - ca - cb);$$

$$(2) a(a-b)^5 + ab(b-a)^4 - a^3(b-a)^3;$$

$$(3) 2n(m-2n)(3m-2n) - 3m(2n-3m)(2n-m).$$

分析: (1) 观察每一括号均可产生一公因式, 分别分解为 $a(a+b-c)$, 及 $b(a+b-c)$ 及 $c(c-a-b) = -c(a+b-c)$, 即三个括号分解后, 可提出公因式 $(a+b-c)$, 再行分解;

(2) $\because (b-a)^4 = (a-b)^4$, 而 $-(b-a)^3 = (a-b)^3$, $\therefore$ (2) 式的公因式为 $a(a-b)^3$;

$$(3) \text{ 式中观察, } (2n-3m) = -(3m-2n), (2n-m) = -(m-2n),$$

$$\therefore (2n-3m)(2n-m) = [- (3m-2n)] \cdot [- (m-2n)] \\ = (3m-2n)(m-2n).$$

$\therefore$ (4) 式的公因式为 $(m-2n)(3m-2n)$.

解: (1) $(a^2 + ab - ac) + (ab + b^2 - bc) + (c^2 - ca - cb)$

$$= a(a+b-c) + b(a+b-c) + c(c-a-b)$$

$$= a(a+b-c) + b(a+b-c) - c(a+b-c)$$

$$= (a+b-c)(a+b-c)$$

$$= (a+b-c)^2;$$

$$(2) a(a-b)^5 + ab(b-a)^4 - a^3(b-a)^3$$

$$= a(a-b)^5 + ab(a-b)^4 + a^3(a-b)^3$$

$$= a(a-b)^3 [(a-b)^2 + b(a-b) + a^2]$$

$$= a(a-b)^3 [a^2 + b^2 - 2ab + ba - b^2 + a^2]$$

$$= a(a-b)^3 (2a^2 - ab)$$

$$= a(a-b)^3 \cdot a(2a-b)$$

$$= a^2(2a-b)(a-b)^3;$$

$$(3) 2n(m-2n)(3m-2n) - 3m(2n-3m)(2n-m)$$

$$= 2n(m-2n)(3m-2n) - 3m[-(3m-2n)] \cdot [- (m-2n)]$$

$$= 2n(m-2n)(3m-2n) - 3m(3m-2n)(m-2n)$$

$$= (m-2n)(3m-2n)(2n-3m)$$

$$= (m-2n)(3m-2n)[- (3m-2n)]$$

$$= - (m-2n)(3m-2n)^2.$$

题型4 提公因式法的应用

例7 如图8-1, 将一边长为 m 的三个小长方形可以拼接成一个大长方形:

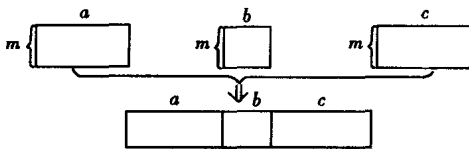


图 8-1

这个拼图过程以图形面积的形式表达出了关于多项式因式分解的一个等式. 你能把这个等式写出来吗?

分析: 根据长方形的面积计算方法就能表示出来.

解: $ma + mb + mc = m(a + b + c)$.

说明: 这个等式从左边到右边是多项式的因式分解, 从右边到左边是乘法分配律, 这说明多项式的因式分解与整式乘法正好相反. 它很好地体现了数形结合思想.

例 8 已知 $V = IR_1 + IR_2 + IR_3$, 当 $R_1 = 29.7$, $R_2 = 32.4$, $R_3 = 37.9$, $I = 2.5$ 时, 利用因式分解求 V 的值.

分析: 本题利用计算器计算很方便. 用笔算直接乘就比较麻烦了, 注意观察到 I 是公因式, 先提公因式则比较简便.

解: $V = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3)$

当 $R_1 = 29.7$, $R_2 = 32.4$, $R_3 = 37.9$, $I = 2.5$ 时,

$V = 2.5 \times (29.7 + 32.4 + 37.9) = 2.5 \times 100 = 250$.

说明: 当一个多项式有公因式时, 先提公因式可简化求值计算.



疑难问题举例

例 9 证明: $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.

分析: 欲证 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除, 只要证明 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能分解出“45”这个因式即可.

$\because 81 = 3^4, \therefore 81^7 = (3^4)^7 = 3^{28}; \because 27 = 3^3, \therefore 27^9 = (3^3)^9 = 3^{27}; 9^{13} = (3^2)^{13} = 3^{26}, \therefore 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26}$, 显然, 3^{26} 是此算式中各项的公因式, 提出公因式再计算即可.

解: $\because 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} = 3^{26}(3^2 - 3 - 1) = 3^{26} \times 5$
 $= 3^{24} \times 3^2 \times 5 = 3^{24} \times 45,$

$\therefore 81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.



错解点击

例 10 把下列各式分解因式:

(1) $(a-b)^2 - (b-a)^3$;

$$(2) -9a^3 + 6a^2b - 3a;$$

$$(3) (2x+y)(4x+y) + (2x+y)\left(\frac{y}{2} - x\right).$$

错解: (1) $(a-b)^2 - (b-a)^3 = (a-b)^2 - (a-b)^3$
 $= (a-b)^2(1-a+b);$

$$(2) -9a^3 + 6a^2b - 3a = -3a(3a^2 - 2ab);$$

$$(3) \text{原式} = (2x+y)\left(4x+y+\frac{y}{2}-x\right)$$

$$\text{或原式} = (2x+y)\left(3x+\frac{3}{2}y\right).$$

点击: (1) 没有注意到 $(b-a)^3$ 应等于 $-(a-b)^3$.

(2) 没有注意到漏了一项. 事实上 $-3a(3a^2 - 2ab) = -9a^3 + 6a^2b$ 与原式相比少了一项.

(3) 第一种错误是没有合并同类项, 第二种错误是合并同类项之后没有把第二因式再提取系数 $\frac{3}{2}$, 从而使 $(3x + \frac{3}{2}y) = \frac{3}{2}(2x+y)$, 导致结果不完整.

正解: (1) $(a-b)^2 - (b-a)^3 = (a-b)^2 + (a-b)^3$
 $= (a-b)^2(1+a-b);$

$$(2) \text{原式} = -3a(3a^2 - 2ab + 1);$$

$$(3) \text{原式} = (2x+y)\left[(4x+y) + \left(\frac{y}{2} - x\right)\right]$$

$$= (2x+y)\left(3x + \frac{3}{2}y\right) = \frac{3}{2}(2x+y)^2.$$

说明: 提公因式法分解因式时要善于观察每一多项式的特征, 合理地提取, 提取后的因式往往需要变形、合并同类项, 为下一步的分解打好基础, 必须遵循分解到不能分解为止.



本节小结

本节主要学习了因式分解的概念和因式分解的第一种方法——提公因式法. 提公因式时, 要对数字系数和字母分别进行考虑. 如果是整数系数, 就应该提最大公约数; 字母考虑两条: ①取各项相同的字母, ②各项相同字母的指数取最低的.

对因式分解的概念的理解应注意以下几个方面:

1. 因式分解的对象是多项式, 对于单项式不存在因式分解的问题.
2. 因式分解是多项式的一种恒等变形, 而不是运算, 不可看作是整式乘法的逆运算, 但可看作“逆变形”, 从变化过程来看, 因式分解是一种“扩”的趋势, 而整式乘法是一种“缩”的趋势.

3. 因式分解的结果是“整式积”的形式, 即因式分解不得超越“整式”的范围, 其



“积”是从整体上看，而非部分的积。如果反方向看的话，最后一步运算应是“乘”而非“加减”。

- 因式分解应在一定范围内(一般是有理数范围)一直分解到不能再分解为止。
- 因式分解中如有相同的因式应写成“幂”的形式。



同步测试

1. 下列从左到右的变形,属于因式分解的是 ()

- $a(a+b-1)=a^2+ab-a$
- $a^2-a-2=a(a-1)-2$
- $-4a^2+9b^2=(-2a+3b)(2a+3b)$
- $a+b+c=\frac{1}{5}(5a+5b+5c)$

2. 把下列各项因式分解,正确的是 ()

- $x^2y+7xy+y=y(x^2+7x)$
- $3a^2b-3ab+6b=3b(a^2-a+2)$
- $8xyz-6x^2y=2xyz(4-3x)$
- $-2a^2+4ab-6ac=-2a(a+2b-3c)$

3. 分解因式: $m(m-n)^2-2(m-n)^3-n(m-n)^2=$ _____.

4. 分解因式: $7a^3b-28a^2b^2+63ab^3=$ _____.

5. 分解因式: $p(1-p)^3(1+p)^2-p^2(p-1)^2(1+p)^3=$ _____.

6. 分解因式: $(x-y)^2-2y+2x=$ _____.

7. 分解因式: $x^2(x-y)-2x(x-y)^2+(x-y)^3=$ _____.

8. 分解因式: $3m^2(x-y)^2+6m(y-x)^3=$ _____.

9. 分解因式: $3x(x-y)^3+2x(y-x)^3-y(x-y)^3=$ _____.

10. 已知: $a-b=3, ab=-2$, 求 $a^3b^2-a^2b^3$ 的值.

11. 利用简便方法计算求值:

$$\frac{1}{5} \times 25.6 \times 13 + 24.4 \times 0.2 \times 13 - 13 \times 40 \times \frac{1}{5}$$

12. 某班 48 名学生平均分成四个小组到敬老院打扫卫生,回收垃圾. 第一小组平均每人回收垃圾 2.75kg, 第二小组平均每人回收垃圾 2.27kg, 第三小组平均每人回收垃圾 2.25kg, 第四小组平均每人回收垃圾 2.73kg. 根据以上数据, 试求这次活动该班学生共回收垃圾多少 kg?



同步测试解答

1. 分析: A. 从左到右是整式乘法运算, 不是因式分解; B. $a^2-a-2=a(a-1)-2$, 只把前两项化成积的形式, 而整个式子仍是代数和的形式, 即整个式子并没有进

行因式分解;C.从左到右是把多项式化成整式乘积的形式,根据因式分解定义可知,它是因式分解;D. $a+b+c=\frac{1}{5}(5a+5b+5c)$,也不是因式分解.

答案:C.

2. A是错的.因为 $(x^2y+7xy+y)\div y=x^2+7x+1$,所以提公因式 y 所得另一个因式应该是 x^2+7x+1 ,而不是 x^2+7x ,即 $x^2y+7xy+y=y(x^2+7x+1)$;B是正确的;C是错的.公因式是 $2xy$,而不是 $2xyz$;D是错的.如果多项式的第一项的系数是负的,一般要提出“-”号,使括号内的第一项的系数是正的.但要注意提出“-”号时,多项式的各项都要变号,D应该是 $-2a^2+4ab-6ac=-2a(a-2b+3c)$.

答案:B.

说明:“1”作为项的系数通常省略,但如果单独成一项时,它在因式分解时不能漏掉.

3. 解: $m(m-n)^2-2(m-n)^3-n(m-n)^2$

$$=(m-n)^2[m-2(m-n)-n]$$

$$=(m-n)^2[-m+n]=(m-n)^2[-(m-n)]=-(m-n)^3.$$

4. 解: $7a^3b-28a^2b^2+63ab^3=7ab(a^2-4ab+9b^2)$.

5. 解: $p(1-p)^3(1+p)^2-p^2(p-1)^2(1+p)^3$

$$=p(1-p)^3(1+p)^2-p^2(1-p)^2(1+p)^3$$

$$=p(1-p)^2(1+p)^2[(1-p)-p(1+p)]$$

$$=p(1-p)^2(1+p)^2(1-p-p-p^2)$$

$$=p(1-p)^2(1+p)^2(1-2p-p^2).$$

6. 解: $(x-y)^2-2y+2x=(x-y)^2+2(x-y)=(x-y)(x-y+2)$.

7. 解: $x^2(x-y)-2x(x-y)^2+(x-y)^3$

$$=(x-y)[x^2-2x(x-y)+(x-y)^2]$$

$$=(x-y)(x^2-2x^2+2xy+x^2+y^2-2xy)=y^2(x-y).$$

8. 解: $3m^2(x-y)^2+6m(y-x)^3$

$$=3m^2(x-y)^2-6m(x-y)^3$$

$$=3m(x-y)^2[m-2(x-y)]$$

$$=3m(x-y)^2(m-2x+2y).$$

9. 解: $3x(x-y)^3+2x(y-x)^3-y(x-y)^3$

$$=3x(x-y)^3-2x(x-y)^3-y(x-y)^3$$

$$=(x-y)^3(3x-2x-y)$$

$$=(x-y)^4.$$

10. 解: $\because a^3b^2-a^2b^3=a^2b^2(a-b)=(ab)^2(a-b)$

当 $a-b=3, ab=-2$ 时, 原式 $=(-2)^2 \times 3=12$.

$$\begin{aligned}
 11. \text{解: 原式} &= 0.2 \times 13 \times (25.6 + 24.4 - 40) \\
 &= 0.2 \times 13 \times 10 \\
 &= 26.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \text{解: 共回收垃圾为} \\
 2.75 \times 12 + 2.27 \times 12 + 2.25 \times 12 + 2.73 \times 12 \\
 = 12 \times (2.75 + 2.27 + 2.25 + 2.73) \\
 = 12 \times 10 = 120 \text{ (kg)}.
 \end{aligned}$$

8.2 运用公式法



学习目标

理解因式分解的平方差公式、完全平方公式的意义,掌握每个公式的特点,并能熟练运用公式将多项式进行因式分解.



中考要求

灵活运用公式进行分解因式.考查比较简单的题型是直接运用公式分解因式,比较复杂的题型是需要经过一些变形,凑成某个公式的形式,然后再进行因式分解.



知识点精讲

1. 运用公式法

由于整式乘法与因式分解是互逆的过程,因此,把乘法公式反过来用,就可以把某些多项式分解因式,这种分解因式的方法叫做运用公式法.

注意:运用公式来分解因式,关键是掌握每个公式的特点(如:项数、符号、系数和指数各有什么特点),公式中的字母不仅可以表示数,也可以表示单项式、多项式.

2. 因式分解公式

(1)平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

注意公式的特点:

左边为二项式,是两个数平方的差;右边是这两个数的和与差的积,运用这个公式可以把形式是平方差的二项式分解因式.

例如: $9a^2 - 1 = (3a)^2 - 1^2 = (3a+1)(3a-1)$

又如: $(x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y)$