数学物理方程的例题与习题

杨振德

河南教育出版社

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$(1-x^2)u_{xx}-2xyu_{xy}+(1-y^2)u_{yy}=0$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u|_{t=0}=u'_t|_{t=0}=0,\ x\geqslant 0,$$

$$u|_{x=0}=A\sin wt\ ,\ t\geqslant 0.$$

数学物理方程的例题与习题

数学物理方程的例题与习题

杨振德

河 南 教 育 出 版 社

数学物理方程的例题与习题

杨振德

责任编辑　刘宗贤　张国旺

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米　32开本　16.75印张　385千字

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数1——003,110册

ISBN 7-5347-0677-7/G·567

定　价　6.30元

序　　言

数学物理方程是理论联系实际的一门重要学科，也是理科、工科、师范等各类高等院校的基础课程，同时又是攻读电大、函大和自学成才学生的必学内容。根据多年来教这门课的经验，每次备课都要选课和做题。可是每次选的题有一些是过去教学过程中已使用过的，由于资料欠存，只好重选再做，花了很多时间，去重复已做过的事情，特别是新教这门课的教师得不到应有的帮助。因此，迫切需要有一本较完善的习题集，作为教学上的参考，以便将更多的时间，用于分析教材和研究问题上，更好地提高教学质量。于是我根据自己长期从事于《数学物理方程》课程的教学实践整理和编写了《数学物理方程的例题与习题》这本书。

全书共分十一章，每章自成体系，自我完善，与其它章节联系较少，便于教师参考和读者自学。这就使本书能较好地适应多方面读者的需要。读者可按实际需要选学或参考有关内容。本书的编写方式有自己的特点，每章内容分三部分（例题选讲、题解、习题），每个习题都附有答案及提示。

原稿经过曹策问教授的详细审阅，提出了不少宝贵意见。同时，在编写本书的过程中，得到校、系领导和教研室同志们的大力支持；河南省优选法统筹法与经济数学研究会的领导和同志们

对本书的出版，给予了热情的帮助与支持；黄河大学科研处的同志对原稿内容提出了修改与补充意见。谨此一并表示感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，缺点和错误一定不少，恳请批评指正。

编　者

1989年4月

目　录

第一章　数学物理方程的推导 ……………………（1）
　一　例题选讲 ……………………（1）
　二　题解 ……………………（9）
　三　习题、答案与提示 ……………………（36）
第二章　二阶线性偏微分方程的分类 ……………………（40）
　一　例题选讲 ……………………（40）
　二　题解 ……………………（44）
　三　习题、答案与提示 ……………………（67）
第三章　偏微分方程的解法 ……………………（71）
　一　例题选讲 ……………………（71）
　二　题解 ……………………（72）
　三　习题、答案及提示 ……………………（84）
第四章　行波法 ……………………（87）
　一　例题选讲 ……………………（87）
　二　题解 ……………………（90）
　三　习题、答案及提示 ……………………（120）
第五章　双曲型方程的解法 ……………………（124）
　一　例题选讲 ……………………（125）
　二　题解 ……………………（131）

三　习题、答案及提示 …………………………………（211）
第六章　抛物型方程的解法 …………………………（215）
一　例题选讲 ……………………………………………（215）
二　题解 …………………………………………………（220）
三　习题、答案及提示 …………………………………（299）
第七章　椭圆型方程的解法 …………………………（305）
一　例题选讲 ……………………………………………（305）
二　题解 …………………………………………………（313）
三　习题、答案及提示 …………………………………（390）
第八章　拉普拉斯变换解法 …………………………（394）
一　例题选讲 ……………………………………………（394）
二　题解 …………………………………………………（400）
三　习题、答案及提示 …………………………………（416）
第九章　富里哀变换解法 ……………………………（421）
一　例题选讲 ……………………………………………（423）
二　题解 …………………………………………………（428）
三　习题、答案及提示 …………………………………（462）
第十章　格林函数解法 ………………………………（466）
一　例题选讲 ……………………………………………（473）
二　题解 …………………………………………………（479）
三　习题、答案及提示 …………………………………（492）
第十一章　变分法 ……………………………………（498）
一　例题选讲 ……………………………………………（503）
二　题解 …………………………………………………（516）
三　习题、答案及提示 …………………………………（525）

第一章　数学物理方程的推导

一　例题选讲

数学物理方程的导出，就是运用微元分析法将物理规律归结为偏微分方程．其步骤为：首先，确定描写物理规律的物理量u；其次，从研究的系统中取出有代表性的一小部分（叫做“微元”），通过简化，分析这一小部分与附近部分之间的相互作用，并应用物理定律得出u所满足的方程；最后，经过简化整理，即得数学物理方程．

例 1　设有一长度为l的均质柔软的绳索，绳的一端固定在以匀速ω转动的垂直轴上，由于惯性离心力的作用，该绳的平衡位置为水平线．试推导该绳相对于水平位置的横振动方程．

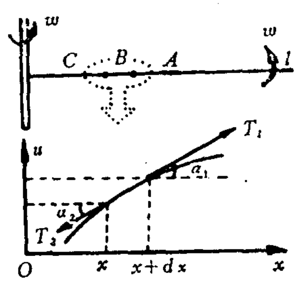

图 1

【分析】由于研究的为柔软轻微的绳，因此绳的重量可略去不计，绳随垂直轴以ω作匀速转动，绳不振动时位于水平面上．当绳作横振动时，横向位移u在绳上各点不同，在同一点u也随时而变，故知横向位移u是x与t的函数，所以本题要推导

的横振动方程，即是 $u(x, t)$ 随 x 与 t 变化的偏微分方程。

【思路】 应用微元分析方法，任取绳中一小段 B 为对象（见图1）。研究 B 段与 A 段和 C 段的相互作用，根据牛顿力学建立运动方程式，即得 $u(x, t)$ 所满足的微分方程。

【解法】 取 $u(x, t)$ 为绳的横向位移的物理量。以下我们分三步来考虑：

第一步　在绳上任取从 x 到 $x+dx$ 的一段 B 作为微元，其长度为

$$ds=\sqrt{dx^2+du^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx,$$

因为是微小振动，故 $u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 很小，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 可略去，于是

$ds\approx dx$，若 ρ 为绳的线密度，则小段 B 的质量为 $m=\rho dx$，

第二步　分析 B 段与邻近两段的相互作用。绳的 B 段受 A 与 C 段的作用为张力 T_1 和 T_2，又因绳是柔软的，T_1 和 T_2 沿切线方向。

由于绳在水平方向（纵向）以匀速 ω 转动，即纵向张力的合力为向心力，故

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=(\rho dx)\omega^2x, \tag{1}$$

又因绳在垂直方向（横向）作微小振动，其加速度为 $u_{tt}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$。由牛顿第二定律得

$$T_1\sin\alpha_1-T_2\sin\alpha_2=(\rho dx)u_{tt}, \tag{2}$$

上述(1)与(2)两式，即为 $u(x, t)$ 所满足的运动方程。

第三步　简化运动方程。

由于振动是微小的，则 $\alpha_1\approx0$，$\alpha_2\approx0$，即得到 $\cos\alpha_1\approx1$，

$\cos\alpha_2\approx 1$，$\sin\alpha_1\approx \mathrm{tg}\alpha_1=u_x\mid_{x+dx}$，$\sin\alpha_2\approx \mathrm{tg}\alpha_2=u_x\mid_x$， 故得

$$\begin{cases} T_2-T_1=\rho dx\omega^2 x, \\ T_1 u_x\mid_{x+dx}-T_2 u_x\mid_x=\rho dx u_{tt}, \end{cases}$$

于是可得

$$\begin{cases} dT=\rho\omega^2 x dx, & (3) \\ [Tu_x]_{x+dx}-[Tu_x]_x=\rho dx\cdot u_{tt}. & (4) \end{cases}$$

由(3)式得

$$T=\int_x^l \rho\omega^2 x dx=\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2). \tag{5}$$

由(4)式得

$$\frac{\partial}{\partial x}[Tu_x]=\rho u_{tt}. \tag{6}$$

将(5)代入(6)可得

$$\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)u_x]=u_{tt}$$

即

$$u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\ \frac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)u_x]=0.$$

【讨论】该题中如果绳的两端都是固定的，不振动时位于水平直线上，即在纵向（水平方向）受力是平衡的，则由(1)得

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0,$$

简化后为$T_2=T_1=T$，即张力为常数，故得

$$u_{tt}-a^2 u_{xx}=0.$$

其中 $a^2=T/\rho$，即为绳的自由振动方程.

例 2 设有电阻率为 γ 的均质导体，导体内通有均匀分布的直流电，其电流密度为 j. 试推导出导体内的热传导方程.

【分析】由热传导的性质可知，热量是从高温向低温流动的。因此热传导问题归结为求物体内的温度分布问题。要推导导体内的热传导方程，也就是要推导在传热过程中温度所满足的偏微分方程。由于我们研究的是通电问题，根据焦耳—楞次定律，电流不断产生热量，所以就是要建立一个有热源的非齐次偏微分方程式。

【思路】应用微元分析的方法，首先从我们所研究的导体中取出一个微小部分为对象。再由热传导定律及热平衡方程，焦耳—楞次定律等，分析这个微小部分和附近部分之间在热传导过程中的关系，得出温度 u 所满足的方程。经过整理简化，求得 u 所满足的偏微分方程式。

【解法】在导体内任取一个小的平行六面体（见图 2），取坐标系 $oxyz$，使坐标面与这六面体的面平行。

设在小平行六面体内点 $M(x, y, z)$ 及时间 t 的温度为 $u(x, y, z, t)$，我们从三方面来分析小平行六面体与附近部分之间在热传导方面的关系：

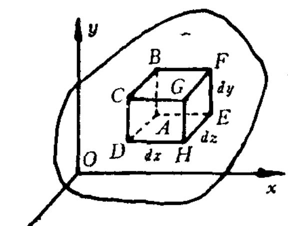

图 2

(1) 由于温度差引起的流入小平行六面体的热量：根据富里哀定律，沿方向 n 的热流强度 q（单位时间内通过单位面积的热量），与其沿该方向的温度梯度大小成正比，但方向相反，即 $q_n = -k\dfrac{\partial u}{\partial n}$，其中 k 为热传导系数。

首先，考虑沿 x 方向，通过截面 $ABCD$ 的热流强度为 $q_x\big|_x = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$，流过截面 $EFGH$ 的热流强度为 $q_x\big|_{x+dx} =$

$-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx}.$

其次，考虑在dt时间内，流过截面$ABCD$进入小平行六面体的热量为$q_x\big|_x dydzdt$，流过截面 $EFGH$ 流出小平行六面体的热量为$q_x\big|_{x+dx}dydzdt$. 因此，在时间dt内，小平行六面体在 x 轴方向净流入的热量为

$$
\begin{aligned}
&q_x\big|_x dydzdt-q_x\big|_{x+dx}dydzdt\\
&=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x dydzdt+k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx}dydzdt\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdydzdt=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)dtdV.
\end{aligned}
$$

同样可得，在dt时间内，沿 y 与 z 方向进入小平行六面体的热量分别为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)dtdV,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)dtdV.$$

（2）由于电流的热效应，使小平行六面体内热量有增加. 由焦耳一楞次定律，在dt时间内，小平行六面体电流产生的热量为

$$I^2Rdt=(jdydz)^2\cdot\gamma\frac{dx}{dydz}\cdot dt=j^2\gamma dVdt.$$

（3）流入小平行六面体的热量和电流的热效应，使小六面体的温度升高，在 t 到$t+dt$时间内，温度的变化率为$\frac{\partial u}{\partial t}$，温度升高为$\frac{\partial u}{\partial t}dt$，由此知道，小平行六面体所吸收的热量为

$c\rho\, dV \dfrac{\partial u}{\partial t} dt$（$c$ 为比热，ρ 为密度）。

由上述（1）、（2）、（3）三式，根据能量定律，得热平衡方程

$$c\rho dV \frac{\partial u}{\partial t} dt=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dV dt+j^2\gamma dV dt.$$

由于导体是均质的，故 k 为常数，则有

$$c\rho u_t-k\Delta u=j^2\gamma.$$

【讨论】我们上面所得到的方程为线性非齐次方程。

如果没有通电，则得

$$u_t-a^2\Delta u=0, \qquad \left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right)$$

如果温度达到稳定情况，则得

$$\Delta u=0, \qquad \text{（拉普拉斯方程）}$$

例 3（定解问题）设有长度为 l 的均质柔软细弦，两端固定，且按下面给定的条件做微小的横向振动。试分别写出其定解问题：

（1）受线密度为 $F(x)\sin\omega t$ 的横向力作用；

（2）在 $x=x_0$ 处受谐变力 $F_0\sin\omega t$ 的作用；

（3）在 $x=x_0$ 处以力 F_0 将弦拉开，然后突然刹手；

（4）在 $x=x_0$ 处受冲量为 I 的初始冲击。

【分析】设弦的横位移为 $u(x, t)$。边界条件已确定，即为

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0.$$

因而该问题关键在于判定所给的四种不同情况应在方程中反映出来，还是在初始条件中反映出来。

【思路】我们在研究某一物理现象时，某种干扰是应考虑作为方程中的非齐次项，还是应考虑作为初始条件，主要区别在于：方程中的非齐次项是对“任一时刻”，并对弦上“任一点”都满足；而初始条件仅仅是在“初始时刻”对弦上“任一点”所满足。这就是解决上述四种不同的定解问题的关键。

【解法】

（1）当弦受力为 $F(x)\sin\omega t$ 时，显见是一个连续的外力作用。在该力的作用下弦做强迫振动，方程中的非齐次项为 $F(x)\sin\omega t/\rho$，ρ 为单位长度上弦的质量。初位移和初速度为零。故定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=F(x)\sin\omega t/\rho, \\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0, \\ u\big|_{t=0}=0, \qquad u_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

（2）在x_0处受谐变力$F_0\sin\omega t$ 的作用，只与 t 有关，而与 x 无关（仅与x_0有关），故可用δ 函数，将方程中的非齐次项改为 $F_0\sin\omega t\cdot\delta_{(x-x_0)}/\rho$，即对$x_0$点受力为 $F_0\sin\omega t$，对其它各点受力为零。故得定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=F_0\sin\omega t\cdot\delta(x-x_0)/\rho, \\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=l}=0, \\ u\big|_{t=0}=0, \qquad u_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

（3）在弦上x_0处用力 F_0 将它拉开，然后突然放手，弦开始做横向振动，在此过程中无外力作用，故弦是做自由振动，即方程为齐次的，因在x_0处F_0将弦拉开一个初位移为 h，但不能认为初始条件就是$h(u\big|_{t=0}=h)$，这是因为弦在其它各处，当 $t=0$ 时而$u\neq h$，也就是$u(x_0,\ 0)=h$，$u(x,\ 0)\neq h$，为了给出弦上各点所

满足的初始条件，必须将区间（0，l）分为两个区间（0，x_0）及（x_0，l）两段来考虑

$$u=x\mathrm{tg}\alpha_1=x\cdot\frac{h}{x_0},\quad (0<x<x_0)$$

$$u=(l-x)\mathrm{tg}\alpha_2=(l-x)\cdot\frac{h}{(l-x_0)}.\qquad (0<x<l).$$

在x_0处作用力 F_0，而位移为h，处于平衡时为

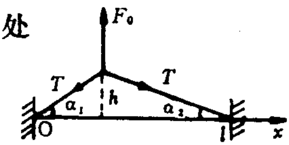

图 3

$$F_0=T\sin\alpha_1+T\sin\alpha_2,$$

其中T为张力，因微振动故

$$\sin\alpha_1\approx\mathrm{tg}\alpha_1=h/x_0,$$

$$\sin\alpha_2\approx\mathrm{tg}\alpha_2=h/(l-x_0),$$

从而得

$$F_0\approx T(h/x_0+h/(l-x_0))=Thl/x_0(l-x_0).$$

即

$$h=F_0x_0(l-x_0)/Tl.$$

于是初位移为

$$u=F_0(l-x_0)x/Tl,\qquad (0<x<x_0)$$

$$u=F_0x_0(l-x)/Tl,\qquad (x_0<x<l)$$

故得定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\begin{cases} F_0(l-x_0)x/Tl, & (0<x<x_0) \\ F_0x_0(l-x)/Tl, & (x_0<x<l) \end{cases} \\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

（4）在x_0处初始冲量为I，弦受初始冲量后开始振动，不受

外力作用，做自由振动，故方程为齐次的。由于一瞬间的冲击作用，来不及产生初始位移，作用即消失了。但在x_0处速度发生了改变，因冲量作用于 x_0 点处，故冲量的密度分布函数可表为$I\delta(x-x_0)$，在Δx上的冲量为$I\delta(x-x_0)\Delta x$。由动量定理知，质点动量的改变，等于它所受力的冲量，即$\rho\Delta x.((u_t|_{t=0})=I\delta(x-x_0)\Delta x$。当$\Delta x\longrightarrow 0$时，得 $u_t|_{t=0}=I\delta(x-x_0)/\rho$。故得定解问题为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,\\ u_t|_{t=0}=I\delta(x-x_0)/\rho.\end{cases}$$

【讨论】为了说明方程中的非齐次项与初始条件的区别．现对上面的第(4)种情况加以分析，弦在 x_0 处受到初始冲量 I 的作用，可视为初始条件，而方程是齐次的．但也可用 δ 函数，把一个瞬时力转化为连续力，即有一连续力$I\delta(t-0)$作用在x_0处，此时可将它作为方程的非齐次项来表示，初始速度仍为零．故得定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=I\delta(x-x_0)\delta(t-0)/\rho,\\ u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

这两种表述是完全等价的。

二　题　解

1.设有一绷紧的弦，在垂直方向有外力$f(x,t)$作用，试导出弦