Convex Programming

Pivoting Algorithms for Portfolio and Network Optimization

凸规划

——投资组合与网络优化的旋转算法

张忠桢 著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

凸 规 划

——投资组合与网络优化的旋转算法

Convex Programming

Pivoting Algorithms for
Portfolio and Network Optimization

张忠桢 著

武 汉 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

凸规划:投资组合与网络优化的旋转算法/张忠桢著. —武汉:武汉大学出版社,2004.4

ISBN 7-307-04100-6

Ⅰ.凸… Ⅱ.张… Ⅲ.线性规划 Ⅳ.O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118030 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:程小宜　　版式设计:支　笛

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:10.625　字数:264 千字

版次:2004 年 4 月第 1 版　　2004 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04100-6/O·286　　定价:15.00 元

前　言

十年以前，当笔者研究线性方程组、线性不等式组和线性规划的解法时，得到一个计算直交投影的递推公式，并用这个公式解以上问题．对于具有 m 个方程、n 个变量的线性方程组，求其最小欧氏范数解和最小二乘解大约各需要 n^2m（$n\geqslant m$）和 $n^2m+\frac{n^3}{3}$（$n\leqslant m$）次乘法和加法运算，其优点是计算精度高．但是对于含有不等式的后两种问题，每次迭代使用这个公式，计算量未免过大．后来，笔者将这两种问题的解法改造成为以旋转运算为基础的算法，称为旋转算法，并将它们用于计算各种资产组合选择和网络优化问题．

用旋转算法和单纯形算法解线性规划是等价的，因为用单纯形算法解标准线性规划对应于用旋转算法解其对偶问题．问题在于将原始线性规划转化为标准线性规划会使问题规模变大．按照单纯形算法，如果线性规划含有不等式约束（不包括对单个变量的上、下界约束），需添加松弛变量或剩余变量将不等式化为等式；如果有自由变量，需将每个自由变量换为两个非负变量；还要求每个变量下界为零．得到标准线性规划后，往往还得添加人工变量才能启动单纯形算法程序．经过这样一系列处理后，不仅问题规模变大，而且难以分析实际计算的问题与原始问题之间的对应关系．

用旋转算法解任何线性规划无需添加变量改变其形式，而且在处理问题的方式上与单纯形算法不一样．旋转算法中的入、出

基向量是各个约束的系数向量（行向量），是一种行处理方法．单纯形算法中的入、出基向量是约束方程组系数矩阵的列向量，是一种列处理方法．这种方法把所有一般约束捆绑在一起，难以发现和删除冗余约束．若增加约束还得添加变量．用旋转算法解含有等式约束的线性规划，在预处理阶段，每经过一次旋转运算就将一个等式或者换为基等式或者删掉，在以后的计算过程中再也无需考虑这个等式．一个线性规划含有自由变量意味其对偶约束是等式．用单纯法求解时，将一个自由变量换成两个非负变量，在迭代过程中这些变量可能不断入基和出基，这就增加了迭代次数．旋转算法处理有界变量十分方便，无论变量的下界是否为零或是否有上界，都可直接进行计算．由于旋转算法与单纯形算法有着内在联系，旋转算法借用或部分借用了单纯形算法的许多术语，如基和基锥、基向量和非基向量、基约束和非基约束、基本不等式组和基本解、人工不等式等，但含义均不相同．

本书关于线性不等式组的解法与线性规划的解法类似．从几何上看，线性不等式组的解法开始于一个基锥．如果基锥的顶点落在所有其他不等式确定的半空间内，则它是不等式组的解；否则，将此点沿着基锥的一条棱转移到一个违反不等式确定的半空间的边界上，产生一个新的基锥，然后开始下一轮迭代．线性规划则要求基锥与目标函数确定的超平面之间有一定关系．从代数上看，线性规划面临的问题是一个矩阵外加一行和一列，每次在矩阵中找一个非零元素进行一次旋转运算（相当于线性代数中矩阵的初等变换），一旦附加行和附加列的所有元素非负，就找到问题的最优解．不等式组则是一个矩阵外加一列，没有附加行．线性不等式组与线性规划是等价的，线性不等式组可转化为线性规划，线性规划可转化为线性不等式组．因此，一旦找到一个问题的有效解法也就找到另一个问题的有效解法．有的人可能认为将不等式组转化为线性规划求解更好，因为目标函数可以起导向作用，使得基本解（即基锥顶点）对应的目标函数值非增或非

减. 但目标函数也限制了基本解的活动范围. 直接解不等式组可使基本解在一个更大范围内转移，迭代次数可能较少.

1952年美国学者马科维兹在《Journal of Finance》上发表了一篇划时代文章，题目是“Portfolio Selection”，主张以收益率的方差作为风险的度量，并提出以极小化风险为目标的资产组合选择模型，称为均值方差模型. 这是一个凸二次规划，许多人一直认为计算量很大，至少比解同等规模的线性规划困难. 为了减少计算量，有的学者利用因子模型构造一个近似的协方差矩阵进行计算，有的利用线性变换产生一个二次项较少的目标函数，有的则干脆修改风险的定义，使用线性规划模型. 本书介绍如何用旋转算法解均值方差资产组合选择模型Kuhn-Tucker条件的线性部分并使互补松弛条件得以满足. 这一方法与G. B. Dantzig和P. Wolfe 1963年提出的主旋转算法类似，后来这一类问题称为线性互补问题. 与单纯形算法类似，用主旋转算法解线性互补问题也要添加非负变量将每个一般不等式化为等式，使问题规模变大. 我们的处理方法则相反，尽可能减少模型中的变量，使模型的结构更为紧凑. 这不仅可减少计算量，而且使得理论分析十分方便，容易发现问题的特点，从而设计出更有效的算法. 如果说本书介绍的一种全表格形式的运算方法在计算量上与传统方法没有很大差异的话，那么随后介绍的逆矩阵法应该是一种实质性的改进. 它使得每次迭代的计算量由n^2减少为k^2+kn，这里n是资产组合选择模型中资产的数目，k不超过各资产收益率的期数(样本容量)加4. 对于实际问题，使用的观测值的期数通常不超过60. 因此，对于大规模资产组合选择问题，逆矩阵法每次迭代的计算量是资产数目的线性函数，即$O(n)$. 笔者利用三批股市数据就不同规模问题进行过计算，包括上海证券交易所1996年5月3日以前245只股票60期周末收盘价（少部分为模拟数据)、1998年8月31日至2000年1月10日之间410只股票70期周末收盘价、上海和深圳证券交易所2000年4月28日至

2001 年 9 月 28 日之间 1072 只股票 70 期周末收盘价等数据. 实验结果表明，对于较大规模的问题（$n\geqslant 200$），迭代次数不超过 $\frac{n}{3}$，计算过程十分稳定. 即使按全表格形式计算，总的计算量比用高斯消元法解同等规模的线性方程组还小. 本书还在均值方差模型中引入光滑的凸交易成本和凸借款成本，介绍如何用序列二次规划法求解. 对于较大规模的问题，其计算量也比用高斯消元法解同等规模的线性方程组小. 在国外有关资产组合优化的文献中，目前还只能见到具有分段线性凸交易成本和光滑凹交易成本模型的算法，但后者的计算量要大很多. 值得注意的是，均值方差模型的逆矩阵法很容易推广并应用于大规模线性规划和一般凸二次规划，使每次迭代的计算量显著减少.

二次规划常作为子问题计算更为复杂的非线性规划，即在每次迭代中以一个二次规划的解作为搜索方向求出下一个点，这种方法称为序列二次规划法. 理论和实际计算结果表明，目标函数的海色（Hesse）矩阵正定时，算法的效果很好. 但对于许多非线性函数，二阶偏导数的计算很复杂，而且得到的海色矩阵可能是不定的. 为此，常用含有目标函数或 Lagrange 函数二次项信息的正定矩阵代替二次规划中的海色矩阵. 序列二次规划法是计算一般非线性规划的一种很有效的方法，本书则提供一种解二次规划的简单明了的方法，很容易用计算机实现.

本书大多数网络优化问题的数学模型是线性规划. 对于一个具有 n 个节点 m 条弧的网络，如果按全表格形式运算，每次迭代的计算量为 $O(nm)$. 事实上，完成一次迭代的关键是要求出枢轴行和枢轴列. 在旋转算法中，枢轴行是入基向量关于基向量表达式中的系数构成的行，枢轴列是所有非基向量关于基向量表达式中出基向量的系数构成的列. 通过在所有等式和不等式约束与网络的节点和弧之间建立起对应关系，可以直接从图中读出枢轴行和枢轴列，从而完成一次迭代，这种算法称为图算法. 图算

法每次迭代包括以下 4 个步骤：

（1） 由非基向量偏差确定一个向量入基；

（2） 从图中读出枢轴行（仅需读出基不等式相应的系数）；

（3） 按最小比值规则确定一个基向量出基，并计算新基向量的成本；

（4） 从图中读出枢轴列并计算新非基向量的偏差.

以上四步的计算量为 $O(n)$ 或 $O(m)$，与传统图算法每次迭代的计算量相同. 传统图算法建立在单纯形算法或互补松弛定理的基础之上，本书则提供一种更为简明和通用的理论基础. 与传统图算法一样，在最坏的情形下，本书大多数图算法的迭代次数是指数型的. 在《Mathematical Programming》杂志上可以看到许多多项式时间的图算法，但是大多数太复杂，远未达到完美的境地. 本书仅介绍 M. L. Balinski 关于指派问题的一种计算量为 $O(n^3)$ 的图算法，可以看到，为了从理论上得到一种多项式的最优化算法，需要做多么精细的分析. 本书还介绍旅行售货员问题和一般邮递员问题的解法. 熟悉了均值方差模型的逆矩阵法，不难用其减少这两种问题每次迭代的计算量.

本书的优点在于各种算法及其原理十分简洁，实际计算效率高且容易学习理解，可以取代运筹学教科书中约 40% 的内容，如线性规划、整数线性规划、网络优化、二次规划和若干更为一般的非线性规划的解法等内容. 我们还看到，国内外各种版本的投资学教科书中，几乎没有一本有如何利用三种风险资产（不允许卖空）构造一个有效投资组合的算例，因为现有的算法太复杂. 本书提供几个这样的算例，包括资产有上界限制的例子，给出了计算的全过程.

全书分为七章. 第一章介绍线性代数和微分学的一些基础知识. 第二、三两章分别介绍线性不等式组和线性规划的解法. 第四章介绍均值方差和均值绝对偏差资产组合选择问题的解法，以及净投资为零的无风险最大套利组合问题. 第五章介绍一些基本

图论知识以及图与向量间的对应关系. 第六、七两章介绍一些网络优化问题的图算法.

全书结构严谨，深入浅出，所有算法都有相应的定理为基础. 为便于初学者掌握，仅用到一些较基本的数学知识，并且大多数问题都有简单的例子说明算法的计算步骤. 阅读本书只需具备线性代数、概率论和微分学的一些基础知识. 本书可作为应用数学、经济学、管理科学以及许多工程技术学科大学本科生和研究生的教材或教学参考书. 对于熟悉最优化理论与方法的教师和科技人员，本书将给他们以耳目一新的感觉，因为书中大部分问题的算法及有关理论是其他书籍所没有的.

笔者于 2000～2002 年期间承担国家自然科学基金资助项目“具有交易成本的组合投资优化模型及其算法”（项目编号：79970004）. 本书第四章以及第一、二两章部分内容是该期间的研究成果. 本书的出版还得到武汉理工大学研究生教材出版基金的资助，在此表示感谢！

张忠桢

2004 年 3 月于武汉

目 录

第一章　基础知识

1.1　向量的线性相关性

1.1.1　向量的运算

向量的运算包括数乘向量、向量的加法以及向量的内积运算．本书仅考虑实向量．

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是两个 n 维向量，k 是一个实数，k 与 $\boldsymbol{x}$ 的乘积记为 $k\boldsymbol{x}$，称为**数乘向量**，规定

$$k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n);$$

$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和记为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，称为**向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的加法**，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n).$$

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 是 n 维向量，k 和 l 是实数，容易验证向量的加法和数乘向量运算满足以下运算规律：

（ⅰ）$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$（交换律）；

（ⅱ）$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$（结合律）；

（ⅲ）$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$（其中 $\boldsymbol{0}$ 是 n 个分量均为 0 的向量，称为零向量）；

（ⅳ）$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{x}$ 与其负向量 $-\boldsymbol{x}$ 之和等于零向量）；

（ⅴ）$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$；

（ⅵ）$(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$；

（ⅶ）$(kl)\boldsymbol{x}=k(l\boldsymbol{x})$；

(viii) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

本书将向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的(欧氏)范数或长度记为$|\boldsymbol{x}|$，依定义，

$$|\boldsymbol{x}|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的内积是一个实数，记为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$，规定

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

如果 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 直交(或正交)，记为 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$.

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离定义为

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 是n 维向量，k 和 l 是实数. 向量的内积运算和范数满足以下规律:

(i) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$;

(ii) $(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})+l(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})$;

(iii) $|k\boldsymbol{x}|=|k||\boldsymbol{x}|$;

(iv) $|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{x}|=0$.

对于向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，可证明以下公式成立:

公式 1.1.1 (平行四边形公式)

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=2|\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{y}|^2.$$

公式 1.1.2 (勾股定理) 当 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ 时，

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2.$$

公式 1.1.3 (许瓦茨不等式) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$.

公式 1.1.4 (三角不等式)

$$||\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}||\leqslant|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|.$$

1.1.2 向量的线性相关性

如果没有特殊说明，以下提到的向量都是 n 维向量. 设 $\boldsymbol{a}_1$,

$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是一组向量，如果存在一组不全为0的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

则称此组向量**线性相关**，否则称此组向量**线性无关**.

对于向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$和 $\boldsymbol{c}$，如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m,$$

则称 $\boldsymbol{c}$ 能够表示为$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的**线性组合**，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为**组合系数**. 如果这样一组系数是惟一的，就称 $\boldsymbol{c}$ 能表示为$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的惟一线性组合.

根据以上定义可得到以下结论：

结论 1.1.1 两个或两个以上向量线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量能够表示为其余向量的线性组合.

结论 1.1.2 若一组向量含有零向量，则此组向量线性相关.

结论 1.1.3 若一组向量线性相关，则包含此组向量的更大的向量组也线性相关.

结论 1.1.4 一个线性无关向量组的任意部分向量线性无关.

结论 1.1.5 若一组 n 维向量线性无关，那么在每个向量后面添加一个分量，得到的 $n+1$ 维向量组也线性无关.

结论 1.1.6 若干两两直交的非零向量线性无关.

结论 1.1.7 若向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关，而向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{c}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{c}$ 能够表示为$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的惟一线性组合.

结论 1.1.8 若向量 $\boldsymbol{c}$ 可表示为向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的惟一线性组合，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关.

结论 1.1.9 设向量 $\boldsymbol{c}$ 能够表示为 m 个线性无关向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的如下线性组合：

$$c = k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m,$$

那么，$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_m$线性无关的充分必要条件是$k_1 \neq 0$.

结论 1.1.10 $n+1$ 或 $n+1$ 个以上的 n 维向量线性相关.

结论 1.1.11 若 r 个线性无关向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$中的每一个可表示为 s 个向量$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$的线性组合，则 $r \leqslant s$.

结论 1.1.12 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$和$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$是两组线性无关的向量. 若 $r < s$，则可从 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$中找出一个向量与 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$构成一组线性无关的向量.

定义 如果 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$中有 r 个向量线性无关，并且其余每个向量都可以表示为这 r 个向量的线性组合，就称这 r 个向量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$的一个最大线性无关向量组，简称**最大无关组**.

结论 1.1.13 在一个向量组中，任意两个最大无关组的向量个数相同.

结论 1.1.14 若一个向量可表示为一组向量的线性组合，则它也可表示为其中一个最大无关组的线性组合.

定义 向量组中一个最大无关组所含向量的数目称为这个向量组的**秩**.

结论 1.1.15 若一个向量组中的每个向量可以表示为另一向量组的线性组合，则前一向量组的秩不大于后一向量组的秩.

结论 1.1.16 若向量 $\boldsymbol{c}$ 可表示为向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$的非负线性组合，即存在非负实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$\boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m,$$

则可以从 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 中找到一组线性无关的向量，使得 $\boldsymbol{c}$ 是这组向量的非负线性组合.

结论 1.1.17 设向量 $\boldsymbol{c}$ 可以表示为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$的如下线性组合：

$$\boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_l \boldsymbol{a}_l + k_{l+1} \boldsymbol{a}_{l+1} + \cdots + k_m \boldsymbol{a}_m,$$

其中 $k_{l+1}, \cdots, k_m$非负. 则 $\boldsymbol{c}$ 可表示为

$$c = \sum_{i \in I_0} w_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I_1} w_i \boldsymbol{a}_i,$$

其中 $I_0 \subset \{1,2,\cdots,l\}$，$I_1 \subset \{l+1,l+2,\cdots,m\}$，$I_0 \cup I_1$ 中的向量是 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$ 中的一个最大无关组，且 $w_i \geqslant 0$，$i \in I_1$.

结论 1.1.18 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知向量. 则方程组

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

的所有解满足方程 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{c}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的线性组合.

结论 1.1.19 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{c}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知向量，$b_1,b_2,\cdots,b_m,c_0$ 是标量. 则方程组

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

的所有解满足方程 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} = c_0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{c}$ 可表示为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的线性组合且 c_0 可表示为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的同一线性组合.

1.2 矩阵的旋转运算

1.2.1 矩阵的一些概念

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 是第 i 行、第 j 列的元素，$i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$. $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**. 若 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性无关，称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**. 同样，若 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关，称 $\boldsymbol{A}$ **列满秩**. 可以证明，$\boldsymbol{A}$ 的行秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的列秩. $\boldsymbol{A}$ 的行秩或列秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**. 秩等于行数或列数的矩阵称为**满秩矩阵**.

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的行数等于列数等于 n，称 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶**方阵**，其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线元素**，其他元素称为非对角线元素. 一个满秩方阵称为**非奇异矩阵**. 若存在方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$AB = BA = I,$$

则称 A **可逆**，并称 B 为 A 的**逆矩阵**，记为 A^{-1}，这里的 I 是单位矩阵. 可以证明，A 为非奇异矩阵的充分必要条件是 A 可逆.

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素如果满足 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$ 或者说 $A^{T}=A$，则称 A 为**对称矩阵**，这里的 T 是转置符. 设 A 为 n 阶对称矩阵. 如果对于任何 n 维向量 x（列向量），均有 $x^{T}Ax\geqslant 0$，则称 A **半正定**；若等号仅当 $x=0$ 时成立，则称 A **正定**.

可以证明以下结论成立：

结论 1.2.1 设 A 为对称矩阵，则以下诸命题等价：

(i) A 为半正定矩阵；

(ii) 有矩阵 B 使 $A=B^{T}B$；

(iii) A 的所有(顺序)主子式非负；

(iv) A 的所有特征值非负.

结论 1.2.2 设 A 为对称矩阵，则以下诸命题等价：

(i) A 为正定矩阵；

(ii) 有列满秩矩阵 B 使 $A=B^{T}B$；

(iii) A 的所有(顺序)主子式为正；

(iv) A 的所有特征值大于 0.

1.2.2 矩阵的旋转运算

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵. 用 a_i 表示 A 的第 i 行，e_i 表示 n 阶单位矩阵的第 i 行，则

$$a_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n, \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{1.2.1}$$

对于某个 $r\in\{1,2,\cdots,m\}$，$s\in\{1,2,\cdots,n\}$，如果 $a_{rs}\neq 0$，则可由(1.2.1)的第 r 式解得

$$e_s = \left(\frac{1}{a_{rs}}\right)a_r + \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n}\left(-\frac{a_{rj}}{a_{rs}}\right)e_j. \tag{1.2.2}$$

将其代入(1.2.1) 的其余各式，整理后可得