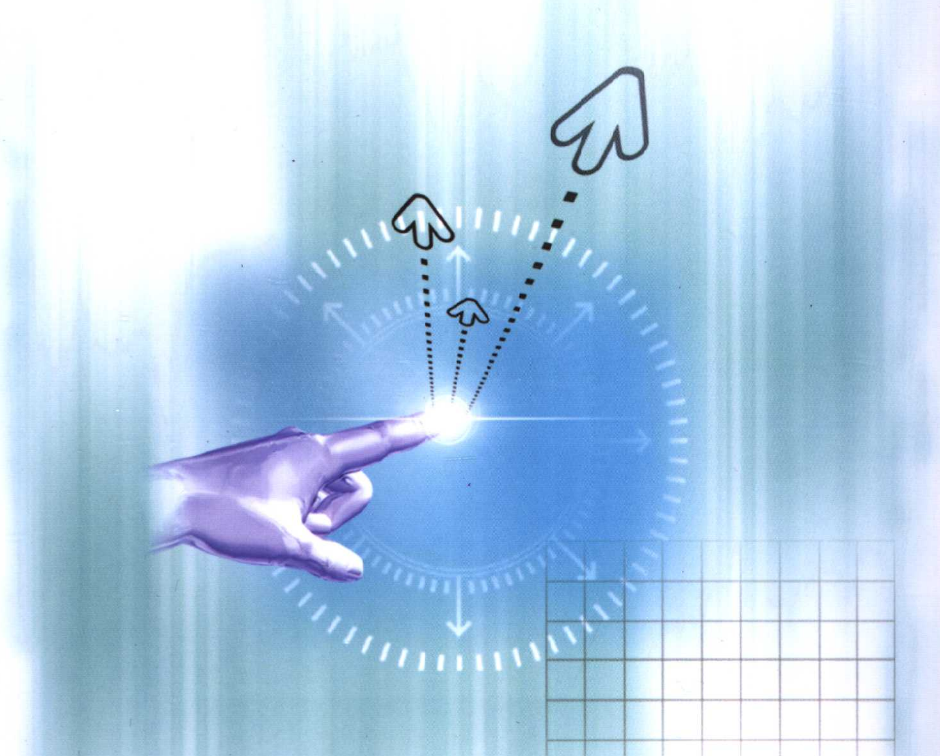
大学生素质教育系列教材

复变函数学习指导

主编 马立新 副主编 姜曰华 高秀莲 王兵



FUBIANHANSHUXUEXIZHIDAO

山东大学出版社
Shandong University Press

大学生素质教育系列教材

复变函数学习指导

主　编　马立新
副主编　姜曰华　高秀莲
　　　　王　兵

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数学习指导/马立新主编．—济南：山东大学出版社，2004.5

ISBN 7-5607-2770-0

Ⅰ．复...
Ⅱ．马...
Ⅲ．复变函数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 037708 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
山东旅科印务有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　7.5 印张　200 千字
2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印数:1—3000 册
定价:15.00 元

《大学生素质教育系列教材》编委会

序

20世纪末，在高等教育领域兴起的以文化素质教育为切入点的素质教育正在全面推进，素质教育的理念不断升华，围绕素质教育的、教学改革不断深化。

素质教育体现了以人为本、直接着眼人的发展的教育思想，关心的是人最根本的质性方面的发展（“素”本身含有原本、根本之义）。因此，开展规范性的素质教育，不仅能够丰富知识、启迪智慧，而且能让学生的精神更加高尚、形象更加完美。素质教育准确而鲜明地体现了马克思关于共产主义是以“每个人的全面而自由发展为基本原则的社会形式”的论断，体现了党的十六届三中全会确立的科学发展观，是我国全面建设小康社会的必然要求。

素质教育直接对高等教育的课程及其结构改革提出了新的任务。大学课程大体可分为人文课程、自然课程和社会课程三大类。长期以来，人文课程被忽视、削弱，这是我国高等教育的一大缺憾，因此，在基于素质教育的课程改革与建设中，应着力抓好人文课程的改革与建设，构建高素质人才培养的课程体系。作为人才培养的依托和凭借，课程改革与建设是高等教育教学改革的核心和重点，是保证和提高教育质量的基础和前提。课程改革与建设的水平和成效关系到学校能否培养出高素质的人才，进而影响到学校

的生存和发展。

素质教育的课程建设首先需要建立相应的教材体系。根据高等院校的教学实际,我们拟设立教材建设基金,在近期推出一套特色鲜明的《大学生素质教育系列教材》。出版《大学生素质教育系列教材》的目的有三:(1)培养学生对学术和文化长远发展的兴趣;(2)拓宽基础、沟通文理,让学生掌握一些学术领域最基本的思维方法和思想体系,即有合理的知识能力结构;(3)进行科学人文精神的素质教育,培养学生丰富、高雅的情趣,最终把学生培养成具有全面素质的人才。据此,我们制定了遴选素质教育教材的六条标准:(1)有利于学生了解人类最基本的知识领域和思维方法;(2)有利于加强学生的人文素质、创新能力和基础知识;(3)有利于促进不同学科的交叉渗透;(4)有利于培养学生的思辨能力;(5)有利于引导学生了解学科前沿的最新成果、趋势和信息;(6)有利于学生从综合角度增强对现有一级学科的理解。

《大学生素质教育系列教材》的编写、出版和使用,必将促进高等院校素质教育的深入开展。诚望广大教师不辜负时代赋予的历史使命,把握《大学生素质教育系列教材》的主旨,热忱参与系列教材的建设,为学校的改革发展作出贡献。

山东大学出版社为该系列教材的顺利出版提供了诸多便利,并投入大量人力进行策划和编辑工作。在此表示深深的谢意。

阎秉科

2004 年 3 月

目　　录

第一章　复数与复变函数

一、内容提要

(一) 复数域

1. 复　数

(1) 形如

$$z=x+\mathrm{i}y \text{ 或 } z=x+y\mathrm{i}$$

的数,称为复数,其中 x 和 y 是任意的实数,i 合于 $\mathrm{i}^2=-1$,称为虚单位. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,常记为:

$$x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$$

(2) 复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等,是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等,即

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$$

必须且只需

$$x_1=x_2, y_1=y_2$$

(3) 虚部为零的复数就可看作实数,因此,全体实数是全体复数的一部分;虚部不为零的复数称为虚数;实部为零且虚部不为零

的复数称为纯虚数.

(4) 复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$. 于是

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$$

(5) 复数运算:

对于 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2, \overline{z_2}=x_2-\mathrm{i}y_2$, 有

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &=\cdots(\text{按多项式乘法展开}, \mathrm{i}^2 \text{ 换为}-1) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\ \overline{z_2}}{z_2\ \overline{z_1}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0)$$

注 全体复数并引进上述运算就称为复数域,常用 C 表示. C 也表示复平面.

2. 复平面

我们可以借助于横坐标为 x,纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 由于 x 轴上的点对应着实数,故 x 轴称为实轴;y 轴上的非原点的点对应着纯虚数,故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面.

注 1 引进复平面之后,我们在"数"和"点"之间建立了联系. 以后在研究复变函数时,常可借助于几何直观,还可采用几何术语. 这也为复变函数应用于实际提供了条件,丰富了复变函数论的内容.

注 2 在复平面上,从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量),这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

3. 复数的模与辐角

(1) 复数的模

用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$,其中 x,y 顺次等于 $\overrightarrow{OZ}$ 沿 x

轴与 y 轴的分量. 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，以符号 $|z|$ 或 r 表示.

① $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$ 且 $|z|=0$ 的充要条件是 $z=0$.

② $|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|$.

③ 三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$
$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$

④ $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的距离，记为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

(2) 复数的辐角

实轴正向到非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 间的夹角 θ 合于

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

称为复数 z 的辐角，记为

$$\theta=\arg z$$

以 $\arg z$ 表其中的一个特定值，并称合条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的一个为 $\arg z$ 的主值，或称之为 z 的主辐角. 于是

$$\theta=\arg z=\arg z+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

注意：当 $z=0$ 时，辐角无意义.

复数的三种形式：

$z=x+\mathrm{i}y$（代数形式）

$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（指数形式）

$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$（三角形式）

4. 复数的乘幂与方根

(1) 非零复数 z 的正整数次幂 z^n

设 $z=re^{i\theta}$,则

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(2) 非零复数 z 的 n 次方根$\sqrt[n]{z}$

$$(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

即非零复数 z 的 n 次方根共有 n 个,它们沿中心在原点、半径为$\sqrt[n]{r}$的圆周均匀地分布着,即他们是内接于该圆周的正 n 角形的 n 个顶点.

5. 复数的共轭

复数 $x+yi$ 和 $x-yi$ 称为互为共轭复数.复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$. 于是

$$x-iy=\overline{x+iy}$$

显然

$$|\bar{z}|=|z|,\arg\bar{z}=-\arg z$$

这表明在复平面上,z 与 $\bar{z}$ 两点对于实轴是对称点.

另外,有下列公式:

(1) $\overline{(\bar{z})}=z,\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad(z_2\neq0)$

(3) $|z|^2=z\bar{z},\mathrm{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\mathrm{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$表示对于复数 $a,b,c,\cdots$的任一有理运算,则

$$\overline{R(a,b,c,\cdots)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$$

6. 复数在几何上的应用(略)

(二) 复平面上的点集

1. 平面点集的几个基本概念

定义 1.1 由不等式$|z-z_0|<\rho$所确定的平面点集,就是以

z_0 为心，以 ρ 为半径的圆，称为点 z_0 的 ρ—邻域，常记为 $N_\rho(z_0)$.

定义 1.2　考虑点集 E. 若平面上一点 z_0 的任意邻域都有 E 的无穷多个点，则称 z_0 为 E 的聚点或极限点；若 z_0 属于 E，但非 E 的聚点，则称 z_0 为 E 的孤立点；若 z_0 不属于 E，又非 E 的聚点，则称 z_0 为 E 的外点.

定义 1.3　若点集 E 的每个聚点皆属于 E，则称 E 为闭集；若点集 E 的点 z_0 有一邻域全含于 E 内，则称 z_0 为 E 的内点；若点集 E 的点皆为内点，则称 E 为开集；若在点 z_0 的任意邻域内，同时有属于点集 E 和不属于点集 E 的点，则称 z_0 为 E 的边界点；点集 E 的全体边界点所组成的点集称为 E 的边界.

注 1　点集 E 的边界常记为 ∂E.

注 2　点集 E 的孤立点必是 E 的边界点.

定义 1.4　若有正数 M，对于点集 E 内的点 z 皆合 $|z|\leqslant M$，即若 E 全含于一圆之内，则称 E 为有界集，否则称 E 为无界集.

2. 区域与约当(Jordan)曲线

定义 1.5　具备下列性质的非空点集 D 称为区域：

(1) D 为开集；

(2) D 中任意两点可用全在 D 中的折线连接.

定义 1.6　区域 D 加上它的边界 C 称为闭域，记为

$$\overline{D}=D+C$$

注　区域都是开的，不包含它的边界.

定义 1.7　设 $x(t)$，$y(t)$是实变数 t 的两个实函数，在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

或由复数方程

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)(\text{简记为 } z=z(t)) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.1}$$

所决定的点集 C，称为 z 平面上的一条连续曲线. (1.1)式称为 C

的参数方程，$z(\alpha)$，$z(\beta)$分别称为 C 的起点和终点；对满足 $\alpha<t_1<\beta$，$\alpha<t_2<\beta$，$t_1\neq t_2$ 的 t_1 和 t_2，当 $z(t_1)=z(t_2)$成立时，点 $z(t_1)$称为此曲线 C 的重点；凡无重点的连续曲线，称为简单曲线或约当曲线；$z(\alpha)=z(\beta)$的简单曲线称为简单闭曲线.

注 简单曲线是 z 平面上的一个有界闭集.

定义 1.8 设连续弧 AB 的参数方程为

$$z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

任取实数列(t_n)：

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta \tag{1.2}$$

并且考虑 AB 弧上对应的点列：

$$z_j=z(t_j)\quad(j=0,1,2,\cdots,n)$$

将它们用一折线 Q_n 连接起来，Q_n 的长度

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\left|z(t_j)-z(t_{j-1})\right|$$

如果对于所有的数列(1.2)，I_n 有上界，则 AB 弧称为可求长的. 上确界 $L=\sup I_n$ 称为 AB 弧的长度.

定义 1.9 设简单(或简单闭)曲线 C 的参数方程为

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

又在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上，$x'(t)$，$y'(t)$存在、连续且不全为零，则 C 称为光滑(闭)曲线.

注 光滑(闭)曲线 C 具有连续转动的切线.

定义 1.10 由有限条光滑曲线衔接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线.

注 1 简单折线是逐段光滑曲线.

注 2 逐段光滑曲线必是可求长曲线，但简单曲线(或简单闭曲线)却不一定可求长.

定理 1.1 (约当定理)任一简单闭曲线 C 将 z 平面唯一地分成 C，$I(C)$及 $E(C)$三个点集，它们具有如下性质：

(1) 彼此不交；

(2) $I(C)$是一个有界区域(称为 C 的内部)；

(3) $E(C)$是一个无界区域(称为 C 的外部)；

(4) 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$，另一个端点属于 $E(C)$，则 P 必与 C 有交点.

定义 1.11　设 D 为复平面上的区域. 若在 D 内无论怎样划简单闭曲线，其内部仍全含于 D，则称 D 为单连通区域；非单连通区域称为多连通区域.

(三) 复变函数

1. 复变函数的概念

定义 1.12　设 E 为一复数集，若对 E 内每一复数 z，有唯一确定的复数 w 与之对应，则称在 E 上确定了一个单值函数 $w=f(z)(z\in E)$. 如对 E 内每一复数 z，有几个或无穷多个 w 与之对应，则称在 E 上确定了一个多值函数 $w=f(z)(z\in E)$. E 称为函数 $w=f(z)$的定义域. 对于 E，w 值的全体所成集 M 称为函数 $w=f(z)$的值域.

定义 1.13　如对 z 平面上点集 E 的任一点 z，有 w 平面上点集 F 的点 w，使得 $w=f(z)$，则称 $w=f(z)$把 E 变(映)入 F(简记为 $f(E)\subseteq F$)，或称 $w=f(z)$是 E 到 F 的入变换.

定义 1.14　如果为 $f(E)\subseteq F$，且对 F 的任一点 w，有 E 的点 z，使得 $w=f(z)$，则称 $w=f(z)$把 E 变(映)成 F(简记为 $f(E)=F$)，或称 $w=f(z)$是 E 到 F 的满变换.

定义 1.15　若 $w=f(z)$是 E 到 F 的满变换，且对 F 中的每一点 w，在 E 中有一个(或至少有两个)点与之相对应，则在 F 上确定了一个单值(或多值)函数，记作 $z=f^{-1}(w)$，它就称为函数 $w=f(z)$的反函数或称为变换 $w=f(z)$的逆变换；若 $z=f^{-1}(w)$也是 F 到 E 的单值变换，则称 $w=f(z)$是 E 到 F 的双方单值变换

或一一变换.

2. 复变函数的极限与连续性

定义 1.16 设 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点. 如存在一复数 w_0，使对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，只要 $0<|z-z_0|<\delta$，$z\in E$，就有

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon$$

则称 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 有极限 w_0，并记为

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=w_0$$

注 1 由于复变函数极限的定义与数学分析中单元实变函数的极限定义相似，我们可以仿照证明下述结论：

(1) 若极限存在，必然唯一；

(2) 若 $f(z)$，$g(z)$ 沿点集 E 于点 z_0 有极限，则其和、差、积、商(在商的情形，要求分母的极限不等于零)沿点集 E 在 z_0 仍然有极限，并且其极限值等于 $f(z)$，$g(z)$ 在点 z_0 的极限值的和、差、积、商.

注 2 极限 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)$ 与 z 趋于 z_0 的方式无关.

下述定理给出了复变函数极限与其实部和虚部极限的关系：

定理 1.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 于点集 E 上有定义，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为 E 的聚点，则

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=\eta=a+\mathrm{i}b$$

的充要条件是

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y)\in E)}} u(x,y)=a,\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\((x,y)\in E)}} u(x,y)=b$$

定义 1.17 设 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，$z\in E$. 若

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\(z\in E)}} f(z)=f(z_0)$$

即对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，只要 $|z-z_0|<\delta, z\in E$ 就有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

则称 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 连续.

注 3　这里，由于复变函数连续的定义与数学分析中单元实变函数连续定义相似，我们可以仿照证明下述结论：

(1) 若 $f(z), g(z)$ 沿点集 E 于点 z_0 连续，则其和、差、积、商(在商的情形，要求分母在 z_0 不等于零)沿点集 E 在点 z_0 连续.

(2) 如函数 $\eta=f(z)$ 沿点集 E 于点 z_0 连续，且 $f(E)\subseteq G$，函数 $w=g(\eta)$ 沿点集 G 于点 $\eta_0=f(z_0)$ 连续，则复合函数 $w=g[f(z)]=F(z)$ 沿点集 E 于点 z_0 连续.

定理 1.3　设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 于点集 E 上有定义，则 $f(z)$ 沿 E 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是二元实变函数 $u(x,y), v(x,y)$ 沿点集 E 于点 (x_0,y_0) 连续.

定义 1.18　如函数 $f(z)$ 在点集上各点均连续，则称 $f(z)$ 在 E 上连续.

下列三个定理常用：

定理 1.4[波尔查诺(Bolzano)—维尔斯特拉斯定理]　每一个有界无穷点集，至少有一个聚点.

定理 1.5(闭集套定理)　设无穷闭集列 $\{\overline{F_n}\}$，至少一个为有界且 $\overline{F_n}\supset\overline{F_{n+1}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(\overline{F_n})=0$($d(\overline{F_n})$ 是 $\{\overline{F_n}\}$ 的直径)，则必有唯一的一点 $z_0\in\overline{F_n}(n=1,2,\cdots)$.

定理 1.6[海涅—波莱尔(Heine-Borel)覆盖定理]　设有界闭集 E 的每一点 z 都是圆 K_z 的圆心，则这些圆(K_z)中必有有限个圆把集 E 盖住，换句话说，E 的每一点至少属于这有限个圆中的一个.

定理 1.7　在有界闭集 E 上连续的函数 $f(z)$，具有下列三个性质：