普通工科高等院校教学辅导用书

高等数学自学辅导与习题选解（下册）

（配《高等数学》第三版）

郭景德　刘浩荣　编著

同济大学出版社

普通工科高等院校教学辅导用书

高等数学自学辅导与习题选解
（下册）

（配《高等数学》（第三版））

郭景德
刘浩荣 编著

同济大学出版社

内容提要

本书根据同济大学出版社已出版的《高等数学》(第三版)及所配《高等数学习题集》编写的配套辅导参考书.下册内容有多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、常数项级数与幂级数、傅立叶级数和微分方程等6章,每章由内容提要、例题解析、各类习题的选解和综合练习题及解答参考等组成.本书旨在帮助读者掌握原教材中各章的基本知识要点及有关的基本概念,拓宽解题的思路和方法,提高解题的能力.特别是在学习中遇到完成习题作业有困难时,可随时查阅"习题选解",以便得到解题思路和方法的启迪或借鉴.

本书可供高等工科类专业的学生,特别是使用上述《高等数学》教材及所配习题集的读者作为学习高等数学课程的辅导用书,也可作为工程技术人员及各类"高等数学"自学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学辅导与习题选解.下册/郭景德,刘浩荣编著.—上海:同济大学出版社,2004.4

ISBN 7-5608-2760-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①郭…②刘… Ⅲ.高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第001191号

高等数学自学辅导与习题选解(下册)

郭景德 刘浩荣 编著

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐 栩 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 江苏启东印刷厂印刷

开　本 787mm×960mm 1/16

印　张 24

字　数 480000

印　数 1—4100

版　次 2004年4月第1版 2004年4月第1次印刷

书　号 ISBN 7-5608-2760-8/O·250

定　价 26.00元

前　言

为了便于使用由同济大学出版社已出版的高等工科类教材《高等数学》(第三版)及所配的《高等数学习题集》,我们特地编写了这套《高等数学自学辅导与习题选解》(上、下册),旨在帮助读者掌握教材中的各章知识要点及有关的基本概念,拓宽解题的思路和方法,着重于提高解题的能力.下册内容有多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、常数项级数与幂级数、傅立叶级数和微分方程等6章,各章由内容提要;例题解析;习题选解;综合练习题及解答参考等四部分内容组成.为与原教材配套使用时查找方便,本书仍按原教材的章节序号编排,且亦分上、下册出版.

在编写本书时,编者除了对各章的内容加以精辟地归纳总结外,还精心地增补了若干例题加以解析.这些例题中,有的题型较新,更具有典型性及综合性;有些例题的解题方法,既有分析引导,又给出多于一种的解法,便于读者分析比较和总结,提高解题的能力.对于初学"高等数学"的读者,常会遇到完成习题作业中不会解题的困难.为了克服这类困难,只要查找有关章节的"习题选解",便可得到解题思路和方法的启迪或借鉴,困难便可迎刃而解.此外,本书的各章还配有少量的"综合练习题及解答参考",可供读者作巩固提高之用.

本书对于初学"高等教学"的读者,特别是使用同济大学出版社出版的上述《高等数学》教材及所配《高等数学习题集》的读者,更是一套不可缺少的学习辅导用书.

本书由同济大学数学系刘浩荣教授和郭景德副教授合作编写.在编写出版的过程中,曾参考或引用过原同济大学函授数学教研室所编著出版的函授《高等数学》教材及《高等数学自学及解题指导》等有关资料;也得到了同济大学出版社,特别是李炳钊副编审的大力支持.我们在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中缺点或错误在所难免,恳请读者或同行批评指正.

编　者

2003 年 12 月

目　录

第十一章　多元函数微分法及其应用

一、内容提要 …… (1)
二、例题解析 …… (10)
三、习题选解 …… (19)
习题(十一)(19)　复习思考题(十一)(35)　自我检测题(七)(39)
四、综合练习题及解答参考 …… (42)

第十二章　重积分

一、内容提要 …… (48)
二、例题解析 …… (55)
三、习题选解 …… (70)
习题(十二)(70)　复习思考题(十二)(85)　自我检测题(八)(94)
四、综合练习题及解答参考 …… (98)

第十三章　曲线积分与曲面积分

一、内容提要 …… (109)
二、例题解析 …… (117)
三、习题选解 …… (128)
习题(十三)(128)　复习思考题(十三)(140)　自我检测题(九)(147)
四、综合练习题及解答参考 …… (150)

第十四章　常数项级数与幂级数

一、内容提要 …… (156)
二、例题解析 …… (164)
三、习题选解 …… (188)
习题(十四)(188)　复习思考题(十四)(204)　自我检测题(十)(211)
四、综合练习题及解答参考 …… (216)

第十五章 傅立叶级数

一、内容提要 …………………………………………………… (235)

二、例题解析 …………………………………………………… (240)

三、习题选解 …………………………………………………… (250)

习题(十五)(250) 复习思考题(十五)(261) 自我检测题(十一)(266)

四、综合练习题及解答参考 ………………………………… (270)

第十六章 微分方程

一、内容提要 …………………………………………………… (281)

二、例题解析 …………………………………………………… (288)

三、习题选解 …………………………………………………… (319)

习题(十六)(319) 复习思考题(十六)(343) 自我检测题(十二)(353)

四、综合练习题及解答参考 ………………………………… (358)

第十一章　多元函数微分法及其应用

一、内容提要

(一) 多元函数的概念、极限和连续

1. **二元函数的定义**　设 D 是 xOy 面上的一个点集，如果对于 D 内的任意一点 $P(x,y)$，变量 z 按照一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**(或称 z 是点 P 的函数)，记作

$$z=f(x,y)\quad(\text{或 } z=f(P)),$$

点集 D 称为该函数的**定义域**，x,y 称为**自变量**.

点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数的图形，一般情况下它是一张曲面.

类似地，可定义三元及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数，统称为**多元函数**.

2. **二元函数的极限**

(1) **关于聚点的概念**　设 E 是平面上的一个点集，P_0 是平面上一个定点(P_0 可以属于 E，也可以不属于 E). 如果在 P_0 的任一邻域内，总含有无穷多个属于 E 的点，则称 P_0 是点集 E 的**聚点**.

(2) **二元函数极限的定义**　设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域是点集 D，点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点(点 P_0 可以不属于 D)，A 是某一确定的常数. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)(P\in D)$，恒有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时(或 $P\to P_0$ 时)，函数 $z=f(x,y)$ 有**极限** A，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\quad(\text{或}\lim_{\rho\to 0}f(x,y)=A).$$

3. **二元函数的连续性**

(1) **二元函数连续的定义**

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$的定义域是 D,点 $P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点,且 $P_0\in D$,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**连续**.

定义 2 设二元函数 $z=f(x,y)$的定义域是 D,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点($P_0\in D$),自变量 x,y 在 x_0,y_0 处分别取得增量 Δx 和 Δy($P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$),函数相应的全增量为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0,$$

则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**连续**.

如果函数在区域 D 内每一点处都连续,则称函数在 D 内连续. 函数不连续的点称为**间断点**.

(2) 闭区域上连续函数的性质及初等函数连续性均与一元函数的有关结论相类似.

(二) 偏导数

1. **偏导数的定义** 设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义,当自变量 y 保持定值 y_0,而自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,函数相应的增量

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

称为函数 $z=f(x,y)$关于自变量 x 的偏增量. 如果当 $\Delta x\to 0$ 时,比式$\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$的极限存在,则称此极限值是函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处**对 x 的偏导数**,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\left(\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},z'_x(x_0,y_0),f'_x(x_0,y_0)\right),\text{即}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f'_y(x_0,y_0),z'_y(x_0,y_0),$$

它的定义为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处都存在对 x 的偏导数，那么，这个偏导数仍是 x,y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的**偏导函数**(简称对 x 的偏导数)，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x \text{ 或 } f'_x$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数(简称对 y 的偏导数)记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y \text{ 或 } f'_y.$$

2. **偏导数的求法**　求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，只要将 $f(x,y)$ 中的 y 看成常数，对 x 求导；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，只要将 $f(x,y)$ 中的 x 看成常数对 y 求导. 偏导数的计算实际上是一元函数的求导. 二元函数求偏导数的方法，可类推到三元和三元以上函数的情形.

3. **偏导数的几何意义**　曲面 $z=f(x,y)$ 和平面 $y=y_0$ 的交线在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线关于 x 轴的斜率等于 $f'_x(x_0,y_0)$；曲面 $z=f(x,y)$ 和平面 $x=x_0$ 的交线在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线关于 y 轴的斜率等于 $f'_y(x_0,y_0)$.

4. **高阶偏导数**　设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处都存在偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$，如果这两个偏导数对 x，对 y 的偏导数存在，那么，称这些偏导数是 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 依照求偏导数的顺序不同，二阶偏导数有以下四种：

(1) 对 x 的二阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，常用的记号有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad z''_{xx},\quad f''_{xx}.$$

(2) 对 y 的二阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，常用的记号有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad z''_{yy},\quad f''_{yy}.$$

(3) 先对 x,再对 y 的二阶偏导数$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$,常用的记号有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad z''_{xy},\quad f''_{xy}.$$

(4) 先对 y,再对 x 的二阶偏导数$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,常用的记号有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad z''_{yx},\quad f''_{yx}.$$

后两个二阶偏导数又称为二阶混合偏导数.如两个二阶混合偏导数 f''_{xy} 和 f''_{yx} 在 D 内连续,则有 $f''_{xy}=f''_{yx}$.类似地,可给出更高阶偏导数的概念和记号.例如,给出三元函数 $u=f(x,y,z)$,u'''_{xyy} 表示 u 先对 x 求偏导数,再对 y 求两次偏导数.

(三) 全微分

1. **全微分的定义** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义,点 $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 在该领域内.如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 均与 $\Delta x,\Delta y$ 无关,仅与 x,y 有关,$o(\rho)$ 是比 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 高阶的无穷小(当 $\rho\to 0$ 时),则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微分**,称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**微分**,记作 $\mathrm{d}z$,即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

2. **全微分存在的必要条件和充分条件及其计算公式**

(1) **必要条件** 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 x 处可微分,则函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续,且两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$存在,并有以下计算公式:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

这里规定 $\mathrm{d}x=\Delta x$,$\mathrm{d}y=\Delta y$.

此公式可推广到三元及三元以上的函数的情形.如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分的计算公式为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

(2) **充分条件**　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在且连续,则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分.

(四) 多元复合函数的求导法则

1. 复合函数的中间变量均为一元函数的情形

(1) 如果函数 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$ 均在点 t 处可导,函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导,且有求导公式:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

导数 $\frac{dz}{dt}$ 又称为**全导数**.

(2) 如果函数 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, $w=\omega(t)$ 均在点 t 处可导,函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 在点 t 处可导,且全导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

(3) 如果函数 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$ 均在点 t 处可导,函数 $z=f(t,u,v)$ 在对应点 (t,u,v) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[t,\varphi(t),\omega(t)]$ 在点 t 处可导,且全导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

2. 复合函数的中间变量是多元函数的情形

(1) 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处具有偏导数,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在,且有以下求偏导数的计算公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 设函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都存在,函数 $z=f(u)$ 在对应点 u 处有连续的导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y)]$ 的两个偏导数存在,且有计算公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(3) 设函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\omega(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都

存在,函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在,且有计算公式:

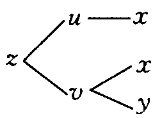
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

3. 复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数的情形

这种情形比较复杂,仅列举两种情况.

(1) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导,$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都存在,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x,y)]$ 的两个偏导数存在,并有计算公式:

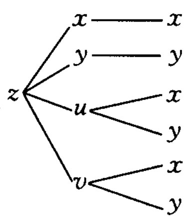
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

此复合函数的结构图为 

可借助于函数的结构图导出上面的公式.

(2) 设函数 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数都存在,函数 $z=f(x,y,u,v)$ 具有连续的偏导数,则复合函数 $z=f[x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 的两个偏导数存在,且有计算公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

此复合函数的结构图为 

可借助函数的结构图导出上面的公式.

4. 求复合函数的高阶偏导数时应注意

函数对中间变量的偏导数 $f'_u(u,v)$ 及 $f'_v(u,v)$ 都仍是 u,v 的函数,其函数结构与原来的函数 $f(u,v)$ 的结构相同,因此它们对自变量再求偏导数时,应使用上述的复合函数的求导法则.

(五) 隐函数的求导公式

1. 设一元隐函数 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}\quad (F'_y\neq 0).$$

2. 设二元隐函数 $z=f(x,y)$是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}\quad (F'_z\neq 0).$$

3. 由方程组确定的隐函数的求导公式

这种情形比较多,仅举一个例子.设方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

确定隐函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_x\\ G'_u & G'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_y & F'_v\\ G'_y & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_y\\ G'_u & G'_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}}.$$

公式不要死记硬背,应会通过方程两边对 x(或对 y)求偏导数,然后解方程组求得.

(六) 方向导数和梯度

1. **方向导数的求法**　如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$处是可微分的,则它沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在,且有计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

其中,θ 是 x 轴的正方向到 $\boldsymbol{l}$ 方向的转角(规定沿逆时针方向旋转的转角为正的,顺时针方向的转角为负的).

推广到三元函数 $u=f(x,y,z)$,有以下计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{l}$ 方向的**方向余弦**.

2. **梯度** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处具有连续的偏导数,则函数在点 P 的梯度为

$$\mathrm{grad}\,f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

在点 P 处,沿着梯度的方向上的方向导数最大,方向导数的最大值为梯度的模 $|\mathrm{grad}\,f(x,y)|$.

推广到三元函数 $u=f(x,y,z)$,函数 u 在点 $P(x,y,z)$ 的梯度为

$$\mathrm{grad}\,u(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

(七) 微分法在几何上的应用

1. **空间曲线的切线与法平面方程**

设空间曲线 Γ 的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),$$

$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均可导,且导数不全为零,曲线上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 对应的参数为 t_0,则曲线 Γ 在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. **空间曲面的切平面与法线方程**

设曲面 Σ 的方程为

$$F(x,y,z)=0,$$

其中,$F(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数,且 F'_x,F'_y,F'_z 不同时为零,则曲面在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

若曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，可把曲面方程写成

$$z-f(x,y)=0 \quad \text{或} \quad f(x,y)-z=0,$$

则公式中的三元函数为$F(x,y,z)=z-f(x,y)$或$F(x,y,z)=f(x,y)-z$.

3. **多元函数的极值**

(1) **二元函数极值存在的必要条件**　设函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微分且取得极值，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

(2) **二元函数极值存在的充分条件**　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个领域内连续，且有一阶和二阶连续的偏导数，又$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$（此时(x_0,y_0)称为函数的驻点），记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,y_0), \quad C=f''_{yy}(x_0,y_0),$$

则

当$\Delta=B^2-AC<0$时，则点(x_0,y_0)是极值点. 且当$A<0$时，$f(x_0,y_0)$为极大值，当$A>0$时，$f(x_0,y_0)$为极小值；

当$\Delta=B^2-AC>0$时，则点(x_0,y_0)不是极值点；

当$\Delta=B^2-AC=0$时，点(x_0,y_0)可能是极值点，也可能不是极值点.

4. **最大值与最小值的求法**

(1) 闭区域上可微函数的最大值（最小值）的求法：先求出区域内函数的一切驻点，并求出驻点处的函数值，再求出函数在边界上的最大值和最小值，比较这些函数值，最大的函数值就是最大值，最小的就是最小值.

(2) 实际问题中的最大值（最小值）的求法：在实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数在区域D内有最大值（最小值），而函数在D内只有一个符合要求的驻点，那么，在该驻点处的函数值，就是函数在D内的最大值（最小值）.

5. **多元函数条件极值的求法**

现要求二元函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值，通常有两种求法：

(1) **降元法**　从条件方程$\varphi(x,y)=0$中解出$y=y(x)$（或$x=x(y)$），代入$z=f(x,y)$中，消去y（或x）转化成无条件极值的问题.

(2) **拉格朗日乘数法**　作辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

建立方程组

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0,\\F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0,\\\varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

解方程组,求得 x,y,则点(x,y)就是可能的极值点.

拉格朗日乘数法可推广到三元或三元以上的函数及附加条件多于一个的情形.

注意 用拉格朗日乘数法,只是求出可疑极值点,但未给出判定它是否为极值点的充分条件,所以一般情况下,该法只用于求实际问题中的最大值(最小值).

二、例题解析

例 1 求函数 $z=\ln(x-y^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域.

解 要使函数有定义,必须是 $\ln(x-y^2)$和$\sqrt{1-x^2-y^2}$同时有意义,于是有

$$\begin{cases}y-x^2>0,\\1-x^2-y^2\geqslant0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}y>x^2,\\x^2+y^2\leqslant1,\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y>x^2 且 x^2+y^2\leqslant1\}$.

例 2 设 $f(x,y)=x^2\sin(x+y)$,求 $f(e^x,x^2+y^2)$.

解 因为函数与自变量和因变量用什么字母表示无关,因此函数 $f(x,y)=x^2\sin(x+y)$和 $f(u,v)=u^2\sin(u+v)$是同一个函数. 设 $u=e^x,v=x^2+y^2$,代入 $f(u,v)$中,便得

$$f(e^x,x^2+y^2)=e^{2x}\sin(e^x+x^2+y^2).$$

例 3 设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln x^x}$,求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解 要求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$,须先求出 $f(x,y)$. 因为

$$f(x-y,\ln x)=\frac{x-y}{x^2}\,\frac{e^{x-y}}{\ln x}=\frac{(x-y)e^{x-y}}{(e^{\ln x})^2\ln x},$$

设 $u=x-y,v=\ln x$,代入上式,得

$$f(u,v)=\frac{ue^u}{(e^v)^2\cdot v}=\frac{u}{v}e^{u-2v},$$

故

$$f(x,y)=\frac{x}{y}e^{x-2y}.$$

（**注**　也可以由 $u=x-y, v=\ln x$ 中，解出 $x=e^u, y=e^v-u$，代入函数 $f(x-y,\ln x)$ 的右边，求出 $f(u,v)$.）

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}\right)e^{x-2y}+\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{x-2y})=\dfrac{1}{y}e^{x-2y}+\dfrac{x}{y}e^{x-2y}=\dfrac{1+x}{y}e^{x-2y}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)e^{x-2y}+\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}(e^{x-2y})=-\frac{x}{y^2}e^{x-2y}+\frac{x}{y}e^{x-2y}(-2)=\frac{-x-2xy}{y^2}e^{x-2y}.$$

例 4　讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在？

解　取路径 $y=x$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0,$$

再取路径 $y=x^2-x$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1.$$

因为点 $P(x,y)$ 沿着不同的路径趋近于零时，极限不相同，所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

例 5　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sin(x^2+y^2)}$.

解　因为
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+y^2}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+0+0}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\xlongequal{u=x^2+y^2}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sin(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+y^2}}=-\frac{1}{2}.$$

例 6　设 $z=(y+\sin^2 y)^{\ln x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=\pi}}$.

解　z 对 x 求偏导数时，y 是常数，函数 z 属于指数类型的复合函数；而对 y 求偏导数时，x 是常数，这时，z 又属于幂函数类型的复合函数. 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(y+\sin^2 y)^{\ln x}\ln(y+\sin^2 y)\frac{\partial}{\partial x}(\ln x)=\frac{1}{x}(y+\sin^2 y)^{\ln x}\ln(y+\sin^2 y),$$