工科课程提高与应试丛书

ENGINEERING COURSE

数字信号处理

典型题解析及自测试题

吴冬梅 张敏瑞 石 釜 编

涵盖课程重点及难点

精设典型题详解及评注

选配课程考试模拟及全真试卷

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书以目前国内较流行的几种《数字信号处理》教材为蓝本，采用本章纲目、内容提要、重要概念解读、典型题解析、习题、模拟考试题等方式，高度概括了数字信号处理课程所涉及的基本概念、基本原理、解题方法和技巧，并配有参考答案。书中习题具有典型性、代表性，注重突出概念，强调解题思路。使用此书，读者可在较短的时间内达到掌握和巩固数字信号处理课程内容的目的，是广大学生及自学者应试的好帮手。

本书可作为工科院校本科数字信号处理课程同步学习指导书，也可用作考研辅导及相关教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理典型题解析及自测试题/吴冬梅等编．—西安：西北工业大学出版社，2004.9

（工科课程提高与应试丛书）

ISBN 7-5612-1774-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．数字信号—信号处理—高等学校—解题　Ⅳ．TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 039487 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
电　　话：(029)88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限公司
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：10
字　　数：249 千字
版　　次：2004 年 11 月　第 1 版　2004 年 11 月　第 1 次印刷
定　　价：15.00 元

前 言

数字信号处理是理论和实际紧密结合、内容丰富、发展迅速、应用广泛的一门课程，是电子、信息、通信等专业的必修课，也是相关专业研究生入学考试科目之一。该课程的特点是理论性强、高度抽象、用到的相关基础知识多，使许多学习者感到难学、难懂、难掌握。因此，学习这门课程时应当多做练习和实验。本书正是为了帮助大学本科学生学习该课程和准备参加研究生入学考试的考生编写的。使用此书，可在较短的时间内达到掌握和巩固数字信号处理课程内容的目的，是广大学生及自学者应试的好帮手。

本书由三部分组成，第一部分典型题解析，共分 7 章。内容主要有：时域离散信号和时域离散系统，离散系统的 z 域及频域分析，章离散傅里叶变换，快速傅里叶变换，IIR 数字滤波器的设计，FIR 数字滤波器的设计，数字滤波器的网络结构与实现；第二部分自测试题，提供了 6 套模拟试题；第三部分考研真题，提供了近年一些高校的考研真题；最后在附录中给出了各章习题、模拟试题和考研真题的答案。

本书第五，六，七章由吴冬梅编写，第一，二，三，四章由石鋆编写，第二、三部分由张敏瑞编写，高腾完成了部分考研试题的解答。全书由吴冬梅统稿。李白萍教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，在此谨致衷心感谢。同时感谢李远征、阎红梅、王书朋、黄兴、邵钢锤、明岸华为本书所作的工作和帮助。

对本书选用的参考文献的著作者，表示真诚的感谢。

由于编者水平有限，书中错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2004年3月

目　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

第三部分　考研真题

附　录

第一部分　典型题解析

第一章　时域离散信号和时域离散系统

1.1　本章纲目

时域离散信号

时域离散系统

模拟信号数字处理方法

1.2　内容提要

1.2.1　时域离散信号

1. 时域离散信号的定义

对模拟信号进行等间隔采样，采样间隔为 T，得到

$$x_a(t)\,|_{t=nT} = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

这里 n 取整数。对于不同的 n 值，$x_a(nT)$ 是一个有序的数字序列，该数字序列就是时域离散信号。实际信号处理中，这些数字序列值按顺序放在存储器中，此时 nT 代表的是前后顺序。为简化，采样间隔可以不写，形成 $x(n)$ 信号，$x(n)$ 可以称为序列。

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

对于具体信号 $x(n)$ 也代表第 n 个序列值，n 可以是取整数值

的其他量（例如位移），因而可以把 n 单纯地看成是数字序列的下标。在非整数的 n 值上没有对 $x(n)$ 加以定义，并不意味着 $x(n)$ 的值等于零。

2. 常用的典型序列

（1）单位取样序列 $\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & 其他\end{cases}$

（2）单位阶跃序列 $u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\0, & 其他\end{cases}$

（3）矩形序列 $R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & 其他\end{cases}$

（4）实指数序列 $x(n)=a^n u(n)$，a 为实数。

（5）正弦序列 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$ 或 $x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi)$

其中 ω_0 称为数字角频率（简称数字频率），单位是 rad，反映了序列周期性变化的快慢。正弦序列是否具有周期性，取决于 ω_0 的值。

当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$ 为整数时，则 $x(n)$ 的周期为 N；

当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{P}{Q}$ 为有理数时（P，Q 为互素的整数），则 $x(n)$ 的周期为 P；

当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时，$x(n)$ 为非周期序列。

（6）复指数序列 $x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n}=\mathrm{e}^{\sigma n}(\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n)$，其周期性的判别与正弦序列相同。

（7）周期序列 $x(n)=x(n+rN)$（r 为任意整数，N 为正整数）。

3. 序列的运算

（1）乘法和加法：序列之间的乘法和加法，是指它的同序号的

序列值对应相乘和相加。

(2) 移位、翻转及尺度变换：

移位：$y(n) = x(n-m)$，$x(n)$ 右移 m 位。

$y(n) = x(n+m)$，$x(n)$ 左移 m 位。

翻转：$y(n) = x(-n)$，与 $x(n)$ 关于竖轴对称。

尺度变换：$y(n) = x(mn)$，是 $x(n)$ 序列每隔 m 点取一点形成的，相当于时间轴压缩了 m 倍。

(3) 序列的线性卷积 $x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$

1.2.2　时域离散系统

1. 线性时不变系统

(1) 离散时间系统的定义。离散时间系统是一种把输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的惟一变换或运算，常用 $T[\ ]$ 表示，即 $y(n) = T[x(n)]$。

(2) 线性系统。满足齐次性和叠加性的系统称为线性系统。用数学语言描述为

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

(3) 时不变(移不变) 系统。若系统的响应与输入信号施加于系统的时刻无关，则称该系统为非时变或非移变系统。即是说，系统的运算关系 $T[\ ]$ 在整个运算过程中不随时间而变化，用数学语言描述如下

如果 $y(n) = T[x(n)]$，则 $T[x(n-m)] = y(n-m)$

既满足线性条件又满足时不变条件的系统，称为线性时不变系统。

2. 系统的因果性和稳定性

(注：z 域在第二章详细讲述，为了复习方便，将 z 域判定方法与时域放在一起。)

(1) 因果系统。输出的变化不领先于输入的变化的系统称为因果系统。即因果系统的输出只取决于现在时刻和过去时刻的输入而与未来时刻的输入无关。其充要条件是

时域:$h(n)=0,\quad n<0$

z 域:$H(z)$ 的收敛域包括 ∞ 点,即收敛域:$R_{x-}<|z|\leqslant\infty$。

(2) 稳定系统。输入有界,输出必定有界的系统称稳定系统。即当稳定系统的输入 $|x(n)|\leqslant M$ 时(M 是任一正的常数),系统的输出 $|y(n)|<\infty$。其充要条件是:

时域:$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

z 域:$H(z)$ 的收敛域包含单位圆

同时满足因果、稳定的系统称因果稳定系统。$H(z)$ 的收敛域为:$r<|z|\leqslant\infty$,$(r<1)$

即对于因果稳定系统的系统函数,其全部极点在单位圆内。

3. 时域离散线性时不变系统的输入输出关系

时域离散线性时不变系统的每一种描述函数($h(n)$, $H(z)$, $H(e^{j\omega})$)都是其输入到输出的变换函数。

(1) 时域:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

或

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)-\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k),\quad a_k,b_k\ \text{为常数}$$

(2) 频域:
$$Y(z)=X(z)\cdot H(z)$$
$$Y(e^{j\omega})=x(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$$

1.2.3 模拟信号数字处理方法

将模拟信号经过采样和量化编码形成数字信号,再采用数字

信号处理技术进行处理，处理完毕，如果需要，再转换成数字信号，这种处理方法称为模拟信号数字处理方法，如图 1.1 所示。

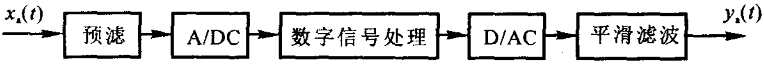

图 1.1　模拟信号数字处理框图

1. 采样定理

离散时间信号常由连续时间信号经周期取样得到。连续时间信号 $x_a(t)$ 经周期取样得到取样信号，取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 的频谱为

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s)$$

其中，T 是取样周期，$X_a(j\Omega)$ 是连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱。上式表明取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 的频谱是连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱的周期延拓，延拓的周期为取样角频率 Ω_s。

当连续时间信号 $x_a(t)$ 是最高频率为 Ω_0 的带限信号，且 $\Omega_s < 2\Omega_0$ 时，周期延拓后的频谱必互相重叠，重叠部分的频率成份的幅值与原信号不同，称为频谱混叠现象。非带限连续时间信号经周期取样后，得到的取样信号的频谱必然存在混叠现象。为了使周期延拓后的频谱不产生混叠失真，应要求取样频率足够高。在信号的频带受限的条件下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即 $\Omega_s \geqslant 2\Omega_0$。当 $\Omega_s = 2\Omega_0$ 时称为奈奎斯特频率，如图 1.2 所示。

考虑到信号的频谱不是锐截止的，最高截止频率以上还有较小的高频分量，为此可选 $\Omega_s = (3 \sim 4)\Omega_0$。另外，可以在采样之前加一保护性的低通滤波器，滤去高于 $\Omega_s/2$ 以上无用的高频分量，以及滤去其他的一些杂散信号。这就是在图 1.1 中采样之间前预滤波的原因。

2. 信号恢复

如果取样信号的频谱不存在混叠，那么取样信号通过一个截

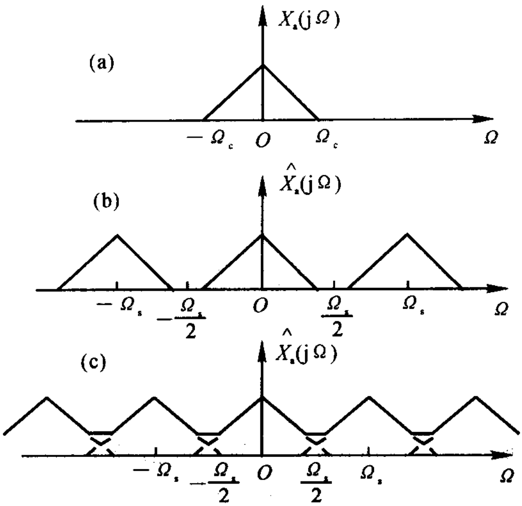

图 1.2　信号采样前后的频谱图

止频率 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器，就可将取样信号频谱中的基带频谱取出来，从而无失真地恢复原来的模拟信号，如图 1.3 所示。

从取样信号 $\hat{x}_a(nT)$ 恢复原信号 $x_a(t)$ 的取样内插公式为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nt) S_a(t-nT)$$

其中，$S_a(t-nT)$ 是内插函数

$$S_a(t-nT) = \frac{\sin[\pi/T(t-nT)]}{\pi/T(t-nT)}$$

1.3　重要概念解读

1. 数字域频率与模拟频率

如果 1 将正弦序列 $x(n) = \cos(\omega n)$ 看作对连续正弦信号

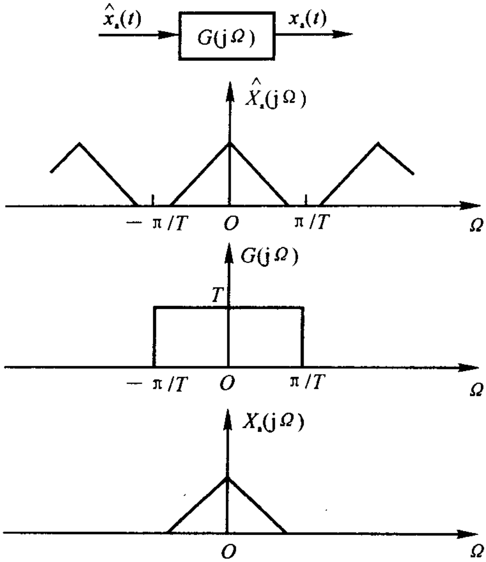

图 1.3　采样恢复的频谱说明图

$x_a(t)=\cos(\Omega t)$ 的等间隔采样，即

$$x(n)=\cos(\omega n)=x_a(nT)=\cos(\Omega nT)$$

则
$$\omega=\Omega T$$

数字频率 Ω 与模拟角频率 ω 成线性关系，ω 的单位为 rad/s，所以 Ω 的单位应为 rad(采样间隔 T 以 s 为单位)，ω 表示在一个采样间隔 T 上正弦波相位的变化量。

2. 数字低频与数字高频

当满足采样定理时 $\frac{1}{T}\geqslant 2f_c$，模拟信号的最高频率 f_c 对应的数字频率 $\omega_c=2\pi f_c T\leqslant\pi$。当取奈奎斯特采样频率 $f_s=2f_c$ 时，$\omega_c=2\pi f_c T=\frac{2\pi f_c}{f_s}=\pi$。

若 $x(n)=\cos(\omega n)$，当 $\omega=0$ 时，$\cos(\omega n)$ 变化最慢(不变化)；

当 $\omega=\pi$ 时，$\cos(\omega n)$ 变化最快。所以在序列频谱分析和数字滤波器描述中，在主值区上，将 $\omega=0$ 附近称为数字低频，而将 $\omega=\pi$ 附近称为数字高频。

3. 系统可逆性

在信道均衡和去卷等应用中，一个重要的系统性质是可逆性。如果一个系统的输入可以惟一地从其输出求出，我们称这个系统是可逆的。为了保证一个系统是可逆的，对不同的输入需产生不同的输出。换句话说，给定任何两个输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，且 $x_1(n)\neq x_2(n)$，必有 $y_1(n)\neq y_2(n)$ 成立。

1.4　典型题解析

【例 1.1】　判断下列序列是否是周期序列。若是，请确定它的最小周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}n+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $x(n)=\exp\left[\mathrm{j}\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)\right]$

(3) $x(n)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)+\sin\left(\dfrac{n\pi}{18}\right)$

【分析】　对于正弦函数 $x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi)$ 或 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$ 的周期性主要是根据 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 值来判断。

【解】　(1) 由 $x(n)=A\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}n+\dfrac{\pi}{6}\right)$，可得 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{5\pi/8}=\dfrac{16}{5}$ 是有理数，所以 $x(n)$ 是周期序列，最小周期 $N=16$。

(2) 由 $x(n)=\exp\left[\mathrm{j}\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)\right]=\cos\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)=-\cos\dfrac{n}{8}-\mathrm{j}\sin\dfrac{n}{8}$，可得 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{1/8}=16\pi$ 是无理数，

所以 $x(n)$ 是非周期序列。

(3) 由 $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)$，可得

$$N_1=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/12}=24,\quad N_2=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/18}=36$$

这个和的周期是

$$N=\frac{N_1N_2}{\gcd(N_1,N_2)}=\frac{24\times 36}{\gcd(24,36)}=\frac{24\times 36}{12}=72$$

【评注】 若有两个序列的乘积，其中周期分别为 N_1，N_2，其基本周期仍可用上公式计算，即 $N=\frac{N_1N_2}{\gcd(N_1,N_2)}$。

【例 1.2】 试判断下列系统是否是线性时不变系统。

(1) $y(n)=2x(n)+3$

(2) $y(n)=x(n-n_0)$，n_0 为常数

(3) $y(n)=x(-n)$

(4) $y(n)=\sum_{i=0}^{n}x(i)$

(5) $y(n)=x(n)\sin(\omega n)$

【分析】 利用定义来证明：① 线性应满足齐次性和叠加性，；② 时不变性应满足输入与输出的位移相同。

【解】 (1) 非线性时不变系统。

令输入为 $x(n-m)$，输出为 $y'(n)=2x(n-m)+3$，因为

$$y(n-m)=2x(n-m)+3=y'(n)$$

所以系统是时不变的。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3$$

$$T[ax_1(n)]=2ax_1(n)+3,\quad T[bx_2(n)]=2bx_2(n)+3$$

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是非线性的。

(2) 线性时不变系统。

令输入为 $x(n-m)$，输出为 $y'(n)=x(n-m-n_0)$，因为

$$y(n-m)=x(n-m-n_0)=y'(n)$$

所以系统是时不变的。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性的。

(3) 线性时不变系统。

令输入为 $x(n-m)$，输出为 $y'(n)=x(-n+m)$，因为

$$y(n-m)=x(-n+m)=y'(n)$$

所以系统是时不变的。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(-n)+bx_2(-n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性的。

(4) 线性时变系统。

令输入为 $x(n-m)$，输出为 $y'(n)=\sum_{i=0}^{n}x(i-m)$，因为

$$y(n-m)=\sum_{i=0}^{n-m}x(i)\neq y'(n)$$

所以系统是时变的。又因为

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{i=0}^{n}[ax_1(i)+bx_2(i)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以系统是线性的。

(5) 线性时变系统。

令输入为 $x(n-m)$，输出为 $y'(n)=x(n-m)\sin(\omega n)$，因为

$$y(n-m)=x(n-m)\sin[\omega(n-m)]\neq y'(n)$$