

郑隆炘 毛鄂浣

S H U
X U E
S I
W E I
Y U
S H U
X U E
F A N
F A
L U N
G A I
L U N

数
学
思
维
与
数
学
方
法
论
概
论

中学数理化教师提高丛书

华中理工大学出版社

中学数理化教师提高丛书

数学思维与 数学方法论概论

郑隆妍 毛鄂浣

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

数学思维与数学方法论概论/郑隆忻,毛鄂澹
武汉:华中理工大学出版社, 1997.6
ISBN 7-5609-1509-4

I. 数…

Ⅰ. ①郑… ②毛… ③曹… ④余… ⑤巴…

Ⅱ. 数学方法论-中学-教学参考资料

N.O1

数学思维与数学方法论概论

郑隆忻 毛鄂澹

责任编辑: 周怀治 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

武汉市青联彩印厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:11.5 字数:285 000

1997年6月第1版 1997年6月第1次印刷

印数:1-4 500

ISBN 7-5609-1509-4/O·167

定价:11.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书将数学思维论与数学方法论有机结合,通过对数学中的逻辑思维、形象思维、灵感思维、创造性思维,建立数学体系的方法,数学常用的主要方法,数学美学方法,中学数学思维模式分析,数学思维与方法论在数学教改中的应用等内容的阐述,对数学思维论与数学方法论的基本规律进行了正确揭示,对其理论进行了深入分析与研究,并联系中学数学教育的实际,以高、初等数学中的典型问题为实例进行说明,具有观点新颖,论据有力,针对性强的特点.

序 言

这套丛书的出版是一件很有意义的工作。由于笔者工作范围之限，只能对数学方面提出一点看法。如果还多少有一些想法对其他学科也有些作用，则甚至有一些喜出望外了。

自文化大革命结束以来，中学教育无论在数量和质量方面都有了飞跃的进展。比之当时百废待兴的局面自然是今非昔比。尽管在未来几十年中改革和发展都还会有极多复杂的情况出现，但是总可以采取比较“正规”的，按教育客观规律办事的方法，而临时性的措施应该更少一些了。因此，中学教师的继续教育问题就亟待更有系统地提出与解决了。

当然，可以要求中学教师都有更高的学历；如果满足不了，也可以用某种形式来补一补课；也可以开一些研讨会等等来帮助解决某些问题，但是根本之图是要求中学教师能多读一点书。这样就提出了一问题，读什么书？怎样读书才能有用？有不少人认为教什么就学什么就行了，不少人（包括高等师范院校相当一批师生在内）已经感到念这么多高等数学是没有用的。有不少人认为这违反了“师范性”反而造成思想不安、队伍不稳，如此等等。也有完全相反的看法，认为只有多念更高深的数学课程，本科完了还有研究生，这样才能从“根本上”提高水平，从“根本上”稳定队伍，从“根本上”解决师范性问题。那么什么是“师范性”呢？为人“师表”，应该有什么样的“规范”呢？作为一个教师，特别是一个中学教师，他的工作对象是“人”，是十来岁思想最活跃、最具可塑性的人，要去塑造一个人，有思想政治的要求，有道德情操的要求，当然还有生活能力、劳动技能等等，而从数量上“作大头”的仍是科学文化方面的要求。对于一个数理化教师，不但要求他以自己的思想情操去感化学

生,更要求他能从自己的专业方面去塑造一个人.当然,例如一个数学教师不应该以为自己的学生将来很多人成为数学家.但是,数学不只是谋生技能,更不能只是进入高一级学校的敲门砖.从这门科学中,我们看到人类是怎样解决他们面临的许多问题,又怎样从具体问题形成了许许多多数学定理、数学理论,……人们曾经不只是为了某个具体的目的去研究一个个具体的数学问题,而是追求深层次的真理,又怎样由此而造出美好的世界.这就是创造.我们现在常说要培养“能力”.其实,哪里有什么“抽象的能力”,如果不进行创造的实践而侈谈“能力”的培养,犹之乎不下水而谈游泳的道理一样.一个十来岁的孩子解一个简单的数学题,他可能在创造,而范进六十中举,那怕是中了状元也没有什么创造,也谈不上什么能力.当然,写八股文也算一种“能力”吧!问题不在于是念高等数学还是初等数学,而在于如何对待这孩子能够接受的知识,是一个态度问题.我不相信这里有什么固定的方法,更没有什么诀窍.可以看一看每一个事业有成的人,几乎都受到一两位中学教师的影响,而这位教师的影响,最深刻的不仅在于具体的知识,而在于他的情操,他对待科学的态度等等,即在于他自己的科学素质.

我们常说把大学的知识和中学知识结合起来,其实这是培养高的科学素质的根本之途.有一些历史的经验:19世纪末到本世纪初的德国大数学家克莱因,写了一部名著《高观点下的初等数学》.应该感谢湖北教育出版社,愿意赔本出这本书,其实这是作者多年利用假期为中学教师讲课的教材,而且实际上是把自已的研究成果都讲给教师们听.直至今日我们再读这本书仍感到富有启发,使人思如泉涌,可以懂得许多自以为再也没有问题的东西,一句话,可以懂得什么叫把大学和中学结合起来.我愿向每一个有志于提高自己数学水平的数学教师推荐这本书,条件是这位教师应该读过相当于大学一二年级的数学课程.另一个范例是前苏联的经验.其中最宝贵的是,第一流的数学家,甚至是数学大师,也都愿意为中学教师的提高尽心尽力,最近一位同志翻译了前苏联的大

数学家辛钦写的《数学分析八讲》，看一下这位名重一时，贡献卓著的概率论大师，是怎样讲最基本的数学分析知识，从什么是实数，什么是函数开始，而且并不超过大学一年级的内容，看一下他的讲法和我们自己对这门最基本的数学课程的理解，相距何在，就知道为了提高自己的“素质”还要下多少功夫。现在大家都在讲素质教育，如果在科学文化方面也要提出素质问题而不只是谋生技能，更不是进入高一级学校的敲门砖的话，那么最重要的是教师的素质。

这里我们有意不谈对数学有特殊重要性的解题、训练问题，也没有讲到特殊作用的数学竞赛问题，这是需要专门讨论的。但是可以说一句，这不会和上面讲的一切矛盾。

十分高兴，现在有一批有志者在本世纪之末开始编写这一套丛书，决心在这个方向上走上踏实的一步。尽管征途漫漫，困难重重，也不能以上面提到的大师们和他们的经典著作来要求于这丛书。但方向是正确的，工作是十分有意义的，希望读者会从这丛书中得到启发，得到益处，更希望有更多的有志者投入这个工作。

齐民友

1996. 6. 1 于珞珈山

前 言

数学思维是人脑对数学对象的本质属性与内在联系的问题概括、间接的反映过程。数学思维论是研究数学思维的性质、内容和发展规律,探索数学思维训练的途径和方法的一门科学。

数学方法是进行科学抽象的一种方法,它运用数学概念、符号、公式、理论对所研究的对象进行量与结构的分析,并对其结果进行判断,以便从量与形及其之间关系上去认识研究对象的运动变化规律。数学方法论是研究数学的发现规律、数学结构的思想方法以及数学的发现、发明与创造的一门科学。

数学思维论与数学方法论两者之间既有联系,又有区别。数学思维论属思维科学范畴,它的许多内容已成为数学教育理论的一个重要组成部分,与数学方法论、教育学、心理学紧密联系,目前已成为数学教育课程体系中的一门课程。数学方法论属数学哲学范畴,它以数学本体论和认识论为理论基础,研究数学中具有普遍意义的各种思想方法及其相互关系。近年来,数学方法论受到数学教育界的关注,目前也成为高等师范院校的一门课程。

本书包括数学思维论与数学方法论两个部分,同时,又有机地将两者结合与相互渗透,使之成为一个整体。既然是概论,一则要简明扼要地介绍这两门分支的主要内容,二则理论与实践的高度不能降低,要具有一定的科学性、时代性、系统性与实用性,三则要紧密结合中学数学教育实践。

数学思维论与数学方法论在国内的教坛上也发展了10多年,特别是师范院校、教育学院的数学教育专业,开设这两类课程的条件已成熟。第一,这10年来,国内已出版了一批这方面的专著与教材,如徐利治教授的《数学方法论选讲》,先后讲授多次,有较大影

响,此书1983年由华中理工大学出版社出版.此外还有郑毓信教授的《数学方法论入门》(浙江教育出版社1985年版)、解恩泽、赵树智教授的《数学思想方法纵横论》(科学出版社1987年版)、刘兆明主编的《中学数学方法论》(湖北教育出版社1987年版)、李翼忠教授的《中学数学方法论》(广东高等教育出版社1988年版)、解恩泽、徐本顺教授主编的《数学思想方法》(山东教育出版社1989年版)、张楚廷教授的《数学方法论》(湖南科学技术出版社1989年版)、徐利治、王前教授的《数学与思维》(湖南教育出版社1990年版)、张乃达的《数学思维教育学》(江苏教育出版社1990年版)、郑隆忻教授的《形象、灵感、审美与数学创造》(湖北教育出版社1990年版)、朱学志教授等的《数学的历史、思想和方法》(哈尔滨出版社1990年版)、郑毓信教授的《数学方法论》(广西教育出版社1991年版)、李玉琪主编的《数学方法论》(南海出版公司1991年版)、徐利治教授等的《数学方法论教程》(江苏教育出版社1992年版)、关成志教授主编的《数学思维概论》(辽宁教育出版社1993年版)等.第二,不少师范院校、教育学院在开设这两门课的过程中,积累了丰富的经验.第三,这方面的学术研讨活动也比较活跃,不仅有高等学校教师参加,而且不少中学教师也积极参加研讨,发表论文.

数学思维论与数学方法论进入数学教育领域,至少有以下三个方面的作用.第一,适应基础教育由单纯的应试教育向全面的素质教育转轨的需要.21世纪是科技高度发展,国际经济竞争非常激烈的时期,而这归根结底是国民素质的竞争.面向21世纪,基础教育改革的紧迫任务是走向全面的素质教育.作为基础教育的重要内容数学教育,也应从过去单纯培养“英才”——升学为主的教育转向为“大众”——提高素质为主的教育.“大众数学”、“为一切人的数学”当今已成为世界数学教育的主流.数学教育除了为高级学校培养专门人才打下基础之外,主要是为社会各个层次岗位的工作人员提供“大众数学”.同时,培养受教育者善于分析问题、会归纳总结、能分类评估、养成严密推理的科学方法与严谨的工作

作风,主要靠数学等学科的教育与长期严格的思维训练来完成。第二,是数学教育改革中把传统的知识型教学转化为能力型教学的关键。前苏联数学教育家 A. 斯托利亚尔认为,数学教学应看作“数学活动的教学”,即看作某种思维活动的教学。数学教育学的任务是形成和发展那些具有数学思维(或数学家思维)特点的智力活动结构,并且促使数学中的发现。这个看法是带建设性的。数学教育的目的,不仅仅是使学生掌握必要的数学基础知识与基本技能,而且更重要的在于促进学生思维的发展,掌握数学思想方法。数学的教学过程,是学生在教师指导下,进行数学思维活动,学习数学家思维活动的结果,并发展数学思维能力的过程。只有应用数学思维论与数学方法论指导数学教育,才能更好地实现这个过程。第三,是提高数学师资队伍水平的必不可少的一环。从知识的结构上看,数学思维与数学方法是数学知识体系的核心部分,是属于深层次结构的知识,它由理性类的元科学知识(知识之知识)与哲学知识(知识之母)所组成。从某种意义上讲,数学思维与数学方法是数学知识体系的灵魂。日本数学教育家米山国藏说的好:“无论是对于科学工作者、技术人员,还是数学教育工作者,最重要的就是数学的精神、思想和方法,而数学知识是第二位。”素质教育要求中学数学教师由教学的“一面手”成为教育的“多面手”,数学教师既要有深厚扎实的专业知识,又要有各方面的广博知识,形成一专多能的现代教育人才知识能力的格局。这中间,数学思维论与数学方法论的知识,以及有较强的独立工作能力与创造精神,是占有十分重要地位的。

正如我国数学家徐利治教授指出的:“可以乐观地预期,在中国逐步发展成为数学大国的历史进程中,‘数学方法论’这一学科必将在中国茁壮成长起来,并将起到引导科学研究和推进教学改革的历史作用。”

《数学思维与数学方法论概论》包括 10 章,对思维与数学思维,数学中的逻辑思维、形象思维、灵感思维,数学创造性思维,建

立数学体系的方法,数学常用的主要方法,数学美学方法,中学数学思维模式分析,数学思维与方法论在数学教育改革中的应用等作了系统介绍,力图运用科学的哲学观点与教育科学理论知识,对两个分支的基本规律进行正确揭示,对其理论进行深入分析与研究,并运用典型实例加以说明.在写作的过程中,注重对每一个基本概念的科学阐述,对特点进行必要的剖析,力求观点新颖,论据有力,忠于科学,系统完整.同时,联系中学数学教育实际,以高、初等数学典型实例阐述,努力做到“源于中学,高于中学,以高带低,以高讲低.”考虑到本书兼有专著与继续教育教材的双重功能,我们注意了理论的严格有序与阐述上的通俗易懂,所安排的章节保持了相对独立性,但注意整体上的统一,并成为一系统.

本书是数学思维论与数学方法论融合在一起写作的初步尝试,书中总结概括了近年来这两个分支的许多研究成果,我们衷心感谢这些成果的作者,没有他们的工作,此书不可以完成,同时,本书也提出作者的许多观点,收集了作者近几年发表的有关论文,以及著作中的观点,对一些正在讨论、有争议的问题,作者力求给予全面、客观的评述.

本书的写作分工是:前言、第1、4、5、9、10章,郑隆妍;第2、7章,毛鄂澹;第8章,曹荆洪;第6章,余醒华;第3章,巴英.最后由郑隆妍、毛鄂澹统一定稿.

本书得到许多专家和同行的指导与关心,得到华中理工大学出版社的支持与帮助,作者在此表示深切谢意.限于认识的局限,我们写的这本书一定会有不少缺点甚至错误,恳切期待来自各方面的批评与建议,以使本书质量不断提高.

作者

1996. 4. 30.

目 录

第一章 思维与数学思维	(1)
§ 1.1 思维的特点及其分类	(1)
§ 1.2 数学思维的特点与品质	(4)
§ 1.3 数学思维的功能	(16)
§ 1.4 数学思维的发展	(30)
第二章 数学中的逻辑思维	(37)
§ 2.1 归纳与演绎	(37)
§ 2.2 比较与分类	(51)
§ 2.3 分析与综合	(58)
§ 2.4 抽象与概括	(69)
§ 2.5 特殊化与一般化	(77)
第三章 数学中的形象思维	(84)
§ 3.1 形象思维的涵义、特点与作用	(84)
§ 3.2 想象与联想	(98)
§ 3.3 数学猜想和猜想法	(108)
第四章 数学中的灵感思维	(121)
§ 4.1 数学中灵感思维的涵义与特点	(121)
§ 4.2 数学中的立体思维方法	(128)
§ 4.3 数学中的直觉思维	(135)
第五章 数学创造性思维	(146)
§ 5.1 数学创造性思维的概念与特点	(146)
§ 5.2 数学创造活动的阶段与基本方法	(153)
§ 5.3 数学创造性思维若干特殊形式	(162)
§ 5.4 培养学生数学创造性思维的若干思考	(173)

第六章 建立数学体系的方法	(180)
§ 6.1 关系映射反演原理.....	(180)
§ 6.2 公理化方法.....	(190)
§ 6.3 数学模型法.....	(200)
§ 6.4 结构主义方法.....	(209)
第七章 数学常用的主要方法	(220)
§ 7.1 观察与实验.....	(220)
§ 7.2 化归方法.....	(229)
§ 7.3 逐次逼近法.....	(238)
§ 7.4 举反例.....	(245)
§ 7.5 性质与构作分离.....	(253)
第八章 数学美学方法	(259)
§ 8.1 数学美的涵义、特点与内容.....	(259)
§ 8.2 数学美学方法及其在数学发现与发明中的重要作用	(270)
§ 8.3 数学教育中的美育.....	(279)
第九章 数学思维与数学方法论在数学教学中的应用	(292)
§ 9.1 数学教学应再现数学知识的发生过程.....	(292)
§ 9.2 解题教学与数学思维.....	(298)
§ 9.3 关于“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高 学生素质”的教改实验.....	(303)
第十章 中学数学思维模式分析	(308)
§ 10.1 变换问题思维模式.....	(308)
§ 10.2 构造解题思维模式.....	(314)
§ 10.3 “以退为进”思维模式.....	(323)
§ 10.4 分解与组合思维模式.....	(328)
§ 10.5 整体化思维模式.....	(332)
§ 10.6 交集法与补集法思维模式.....	(337)
§ 10.7 开放型问题解题的思维模式.....	(340)

人名英汉对照表.....	(346)
参考文献.....	(349)

第一章 思维与数学思维

在这一章里,我们将介绍思维的概念、特点及其分类,研究数学思维的内容(品质、能力、方法)、功能及其发展.

§ 1.1 思维的特点及其分类

一、思维的概念

1. 什么是思维

现在比较普遍认为,思维是人脑借助语言实现的对客观事物概括,间接的反映,是反映对象本质和规律的认识过程.其实,人的大脑思考问题时的内部活动就是思维.

哲学是从思维主体和客体二者之间的关系,即存在和意识的关系来讨论思维的.思维的哲学解释有两点:其一,思维是物质活动的形式,其二,思维是理性认识活动.

心理学主要研究人的思维正常发生和发展的条件和原因以及各种心理现象对思维的影响.思维的科学解释是:思维是具有意识的人脑对于客观现象的本质属性、内部规律的自觉的、间接的和概括的反映.

思维科学是以揭示思维的客观规律为基本内容的科学,它研究人的可控意识.现代思维科学认为,思维是人的信息加工过程,是意识和意识之间的一种相互作用的关系,或者说是发生在人脑中的信息变换.

2. 思维的本质

苏富忠在《思维论》中认为,思维的本质与以下五个方面相互联系:思维最根本的归属是心理过程中的操作过程,是一种自觉的控制活动;思维赖以展开的根本依据是统一在整个机体结构中的心理结构,特别是其中的知识结构和意向体系;思维总是由一定的课题所诱发并始终是针对着一定的课题而展开的;人们为了解决自己选定的课题必须运用一定的方法来操作已有的知识要素、意向要素等信息,从而展开思维,这是思维规定的核心部分;思维的终极目标是追求课题与已有心理结构、自身行为或相应外界对象相统一的现实成果。

上面的论述从根本的归属、展开的依据、展开的对象、操作的方式、终极目标五个方面全面地揭示思维的实质。思维不仅仅是对客观事物概括、间接的反映,它还是一个自觉主动的心理过程中的操作过程,它依赖于机体中的心理结构,展开的诱发因素与对象是课题,展开心理操作的方式是思维方法,终极目标是课题与新的对立面的统一关系。

二、思维的特点

1. 思维的概括性

思维最明显的特点是概括性。所谓概括,是指从某些具有若干相同属性的事物中抽象出来的本质属性,扩大到具有这些相同属性的一切事物,从而形成关于这类事物的普遍概念的推演过程。关于概括,我们在第二章还要专门论述。思维之所以能揭示事物的本质属性,主要来自抽象和概括的过程,即思维的概括和反映。

比如说,我们给出一堆篮球、足球、排球、乒乓球,它们大小不等、颜色不同、材料各异,我们感官开始感觉到的是大小、颜色、材料等个别属性,撇开这些个别属性,抽出共性,发现它们共同本质特征是:都是距定点(球心)的距离等于定长的点组成的空间集合。

这就是球面。这种抽出共性，抓住事物之间的内部联系，就是思维的概括性。

随着思维的发展，会逐渐出现更高水平的概括。没有抽象概括，就没有思维。概括水平是衡量思维水平的重要标志。

2. 思维的间接性

思维的另一个特点是间接性。所谓间接性，是指人们借助已有的知识经验，来认识尚未感知或不能直接感知的事物，并进一步预测事物的未来变化。也就是说，思维远远超脱于感性认识之外。思维的这种间接性，使思维能够反作用于实践、指导实践，变成科学与理论，并揭示事物的进一步发展。我们常说的，举一反三，闻一知十就是指间接性的认识。

比如，原子的内部构造，我们不能直接感觉到或知觉到，但是科学家凭借思维的作用，加上实验，却可把它研究出来。天王星发现之后，人们发现它的轨道不规则，有没有另一行星产生摄动？天文学家借助已有的计算公式与经验进行判断，终于发现了海王星。

思维的两个基本特征互相依赖，两者之间的关系是辩证统一的。如果不获得对现实的概括认识，自然就无从进行间接的认识，反过来，如果不获得对现实的间接认识，也就无法进行概括的认识。

三、思维的分类

思维在其存在方式维度上具有多样性，这就决定了思维的种类繁多，应用不同的标准与尺度，分出的类别就不同。一般可选用以下四个标准进行分类。

1. 按思维的展开方式分类

思维的展开方式指从全貌上看思维过程的展开，这样区分，思维包含压缩方式的思维与舒展方式的思维。压缩方式的思维是省掉众多展开环节而直接领悟事物的本质或整体作出的判断，也称