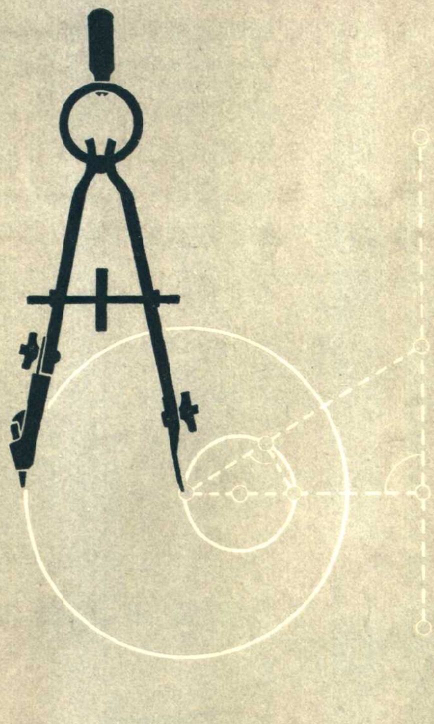
圆规作图

〔苏〕考斯托夫斯基著

数学通俗讲话



科学普及出版社

内 容 提 要

这本小册子是研究单用圆规解几何作图题的。本书是作者根据他过去給参加数学竞賽会的中学生所作的讲演而写成的。~~可供~~中学数学教师和中学高年級学生对本书会感覚兴趣。本书也可供师范学院或大学物理数学系的学生研究初等数学課程时参考之用。

总号：096

圓規作图

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

著　　者：〔苏〕考斯托夫斯基

譯　　者：王联芳

出 版 者：科学普及出版社

（北京市西直門外郝家灣）

北京市书刊出版业营业許可証出字第112号

发 行 者：新华书

印 刷 者：北京市通县印刷

开　本：787×1092 1/32　　印张：1 7/8

1965年4月第1版　　字数：40,000

1965年4月第1次印刷　　印数：30,150

統一书号：13051·057

定　价：（2）0.19 元

引　　言

几何作图是数学教育的重要因素，是研究几何的强大工具。

几何作图工具只用圓規直尺的传統限制，起源于远古。著名的欧几里得几何学(公元前三世紀)就是以規尺完成几何作图为基础的；同时規尺被看作是平等的工具；对于完成个别的作图，用圓規和直尺，或单用圓規，或单用直尺，是完全一样的。

人們久已注意到圓規是比直尺更精确、更完善的工具，也注意到某些作图可以不用直尺而只用圓規完成。例如，分圓周为六等分，作一已知点关于已知直綫的对称点等等。人們久已注意到这样的事实：在金屬薄片上雕刻，在天文仪器用的分度圓盘上刻度，經常单独使用圓規；后者对单用圓規完成几何作图的研究也許起了推动的作用。

几何中研究单用圓規解作图题的部分叫作**圓規几何学**。

第一章　单用圓規的作图

§1. 关于单用圓規解几何作图題的可能性、基本定理

在这一节里将引出圓規几何学的基本定理的証明，为此先要研究单用圓規解决的一些作图題。

单用圓規，当然不可能由已知二点画連續直綫；虽然后文将証明，单用圓規可以在一已知直綫上作出一个、两个、以至一般地任意多个不論多稠密的点*。因此，直綫的作图，不完全包括在模尔——馬斯开龙尼理論之內。

在圓規几何学中，直綫或綫段由二点决定，而不是以連續直綫(以直尺作之)給出的。**只要作出直綫上的两个任意点，我們便認为直綫已作出。**

为簡便起見，今后我們約定：凡“以点A为圓心，以BC为半徑画圓(或画一圓弧)”，写作“画圓(A，BC)”或“作圓(A，BC)”，我們还把符号(A，AB)写作(A，B)。

为求看图明显，我們将引用一些虛直綫(但在作图中不用虛直綫)。

作图題 1　作已知点C关于已知直綫AB的对称点。

作法　作圓(A，C)和(B，C)，即以A、B为圓心，作通过点C的二圓(图1)。設二圓的另一交点为C_1，則C_1为所求之点。

---

*就实践观点而言，若作出了直綫的某些点，没有理由認为該直綫已作出。

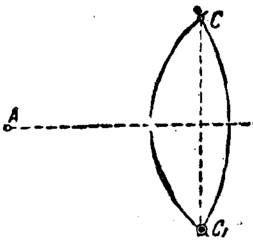


图 1

附注 为了确定已給的三点A，B，X是否在一条直綫上，需要在直綫AB之外任取一点C，并作C关于AB的对称点C_1。显然，如果綫段CX和C_1X相等，点X就在直綫AB上。

作图题2 作綫段，使它2倍、3倍、4倍、以至n倍于已知綫段$AA_1=r$（n为任意自然数）。

作法（第一法） 保持圆規两脚的开度（$=r$）不变，作圓（A_1，r）。作A的对徑点A_2，为此，作弦$AB=BC=CA_2=r$（图2），綫段$AA_2=2r$。然后作圓（A_2，r），設此圓与圓（C，r）交于点D。圓（D，r）和（A_2，r）相交得点A_3。綫段$AA_3=3r$。等等。上述作图完成了n次，即作出綫段$AA_n=nr$。

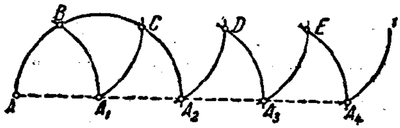


图 2

由开度等于圓半徑的圓規分該圓为六等分即推得作图的正确性。

作法（第二法） 在直綫AA_1之外任取一点B，作圓（A_1，AB）和（B，r），交于一点C（图3）。現在若作圓（A_1，r）和（C，BA_1），則它們交于点A_2。綫段$AA_2=2r$。作圓（A_2，r）和（C，BA_2）时，得点A_3。綫段$AA_3=3r$。等等。

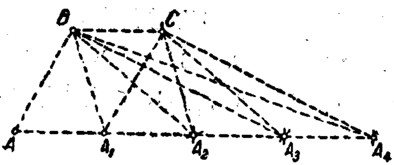


图 3

由于图形$ABCA_1$，A_1BCA_2，A_2BCA_3，…都是平行四边形，立刻推得作图的正确性。

作图题3 作与已知三綫段a, b, c成比例的第四綫段。

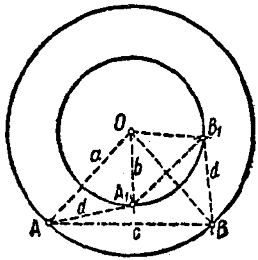


图 4

当 $c<2a$ 时的**作法**。

以平面上任一点O为圓心，作二同心圓，其半徑为 a, b（图 4）。在圓(O, a)上截取弦 $AB=c$。以任意半徑 d 作二圓(A, d)，(B, d)，設它們与圓(O, b)交于点 A_1 和 B_1。綫段 A_1B_1 即所求的与已知三綫段成比例的第四綫段。

証明 三角形 AOA_1 和 BOB_1 合同，因为它們的三边对应相等，因此 $\measuredangle AOA_1=\measuredangle BOB_1$。因此 $\measuredangle AOB=\measuredangle A_1OB_1$，从而等腰三角形 AOB 和 A_1OB_1 相似。所以

$$a:b=c:A_1B_1。$$

当 $c\geq 2a$ 时的**作法**。

如果 $b<2a$，則作与綫段 a, c 和 b 成比例的第四綫段；否則，作綫段 na（作图題 2），并且 n 取得使 $c<2na$* （或 $b<2na$）。作綫段 y，使 y 为綫段 na, b, c 的第四比例項。現在若再作綫段 $x=ny$（作图題 2），則所得綫段即为与三已知綫段 a, b, c 成比例的第四綫段。

事实上，

$$na:b=c:y$$

或

---

*綫段 $2na>c$ 的求法如下：作綫段 $a_1=2a$（作图題 2），以平面上的任一点 O_1 为圓心作圓(O_1, c)，在任意方向上取 $O_1A_1=a_1$，$O_1A_2=2a_1$，$O_1A_3=3a_1$，等等(作图題 2)；这样作了有限次以后就会达到圓(O_1, c)外的点 A_n。显然，綫段 $O_1A_n=na_1=2na>c$。

$$a : b = c : ny。$$

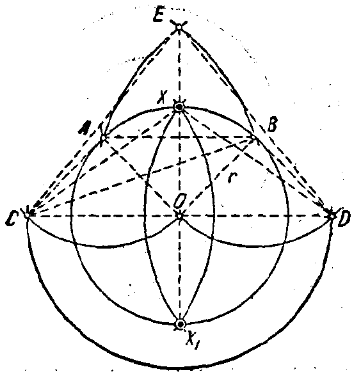


图 5

作图题 4 把圓弧 AB 二等分。

作法 可以假設圓心 O 是已知的；以后(参考作图题13)将說明如何单用圓規作出圓(或弧)的圓心来。

設 $OA = OB = r$ 及 $AB = a$，作圓(O, a)，(A, r)和(B, r)，得二交点 C 和 D (图 5)。作圓(C, B)，(D, A)，設交于点E。若再作圓(C, OE)和(D, OE)，則得二点交 X 和 X_1。

点 X 把弧 AB 二等分，点 X_1 把 AB 的补弧(补充第一弧而得全圓)二等分。[当圓(O, A)已經画出时，二圓(C, OE)和(D, OE)中可以只画一个，它与圓(O, A)相交便定出点 X 和 X_1。]

証明 图形 ABOC 和 ABDO 是平行四边形，因此点 C, O, D 在一直綫上($CO \parallel AB$, $OD \parallel AB$)。从等腰三角形 CED 和 CXD 推得 $\measuredangle COE = \measuredangle COX = 90°$。因此綫段 OX 垂直于弦 AB。因而，要証明点 X 二等分圓弧，只要証明綫段

$$OX = r$$

卽可。

由平行四边形 ABOC 推得

$$OA^2 + BC^2 = 2OB^2 + 2AB^2,$$

或

$$r^2 + BC^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

卽

$$BC^2 = 2a^2 + r^2。$$

由直角三角形 COE，可以写出

$$CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2,$$

从而

$$2a^2 + r^2 = a^2 + OE^2,$$

即

$$OE^2 = a^2 + r^2。$$

最后，由直角三角形 COX 得

$$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r。$$

我們前面曾經指明，在圓規几何学里，只要直綫上的任意二点被确定，直綫就被認为是已作出来了。在后面的叙述中(作图題 24、25 以及其他)，我們有必要用一圓規作已知直綫上的一点、两点以至任意多个点。作法可按照下面的作图題实行。

作图題 5　在一給出两点 A, B 的直綫上，作一个点或多个点。

作法　在平面上直綫 AB 之外任取一点 C(图 6)，作点 C 关于直綫 AB 的对称点 C_1(作图題 1)。以任意半徑 r 作圓 (C, r) 和 (C_1, r)，它們的交点 X 和 X_1 即为所求的、在已知直綫 AB 上的两点。改变半徑 r 的值，就可以在已知直綫上作出任意多个点 X，X_1' 等等。

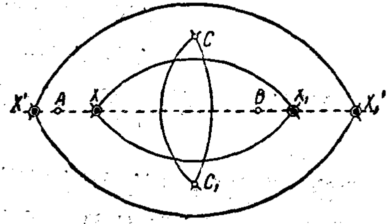


图6

作图題 6　作已知圓 (O, r) 和已給两点 A, B 的直綫的交点。

圓心O不在已知直綫AB上的**作图***（图7）。

作已知圓圓心O关于直綫AB的对称点O_1（作图題1），作圓(O_1, r_1)，此圓交已知圓于所求之点X，Y。

由图形关于已知直綫AB的对称性，可知作图是正确的。

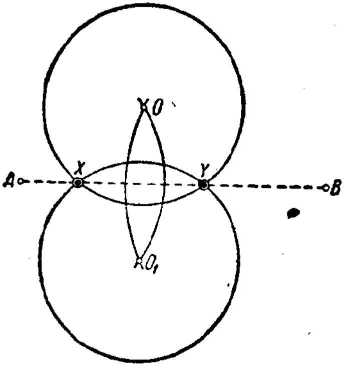


图 7

圓心O在已知直綫AB上的**作图**（图8）。

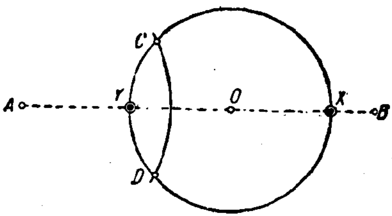


图 8

以A为圓心、任意长d为半徑作圓，設交已知圓于C，D二点。把圓(O，Y)的圓弧CD二等分于X，Y（作图題4），則点X和Y为所求。

附注 由上面的作图，推得

$$AX = AO + OX,$$

$$AY = AO - OX。$$

作图題 7 設AB和CD都是給出两点的直綫，求作AB与CD的交点。

作法 作点C，D关于已知直綫AB的对称点C_1，D_1（图9），作圓(D_1, CC_1)和(C，D)，命E为此二圓的一交点。作与

* 单用圓規，容易检查已知三点是否在一直綫上（參看作图題1的附注）。

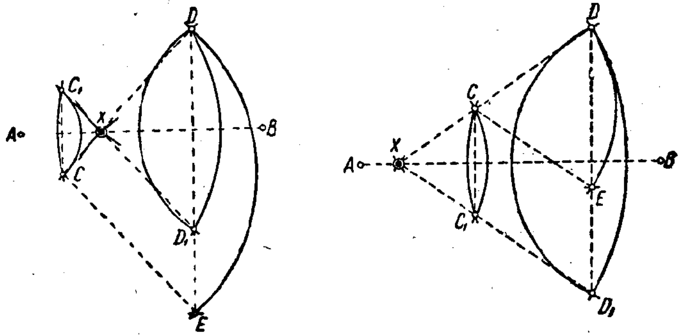


图 9

綫段 DE, DD_1, CD 成比例的第四綫段 x（作图題 3）。若再作圓 (D, x) 和 (D_1, x)，則其一交点为所求的点 X。

証明　因为点 C_1 对称于 C，而 D_1 对称于 D，那末显然，如果我們能作出直綫 CD 和 C_1D_1 的交点，便找出已知二直綫的交点。

图形 CC_1D_1E 是平行四边形，因此点 D, D_1, E 在一直綫上（$DE \parallel CC_1$，$DD_1 \parallel CC_1$）。三角形 CDE 和 XDD_1 相似，因此

$$DE : DD_1 = CE : D_1X,$$

但

$$CE = CD = C_1D_1。$$

所以綫段 $D_1X = x$ 是綫段 DE, DD_1, CD 的比例第四綫段。

在欧几里得平面上每一个規尺作图的結构問題永远可以化为在一定次序下解下列最簡单的基本作图題：

1. 通过已知两点作一直綫。

2. 以已知点为圓心，以已知綫段为半徑作一圓。

3. 求二已知圓的交点。

4. 求已知圓与已知两点的直綫的交点。

5.求二直綫的交点，若每一直綫已知两点。

为了証明每一規尺作图問題能够单用圓規解决，而无須用直尺，只要証明所有以上的基本操作都可以单用圓規完成即可。

第2和第3基本操作可直接用圓規完成；其他3个，可借作图题5—7完成。

假定說有一可用規尺解决的作图題，要求单用圓規解决。設想这問題已用規尺解决；于是問題的解决归結为五种基本操作的某个有限序列，每一步基本操作皆可单用圓規完成（作图題5—7），由此提出的問題得以解决。

这样說来，**所有能用規尺解决的作图題，全可单用圓規解决**。

上述单用圓規解决几何作图題的方法，經常引起复杂、笨拙的作图。但是站在理論的观点上，这方法倒很有趣味。

§2.单用圓規解的几个几何作图題

在这一节里我們来考慮由模尔，馬斯开龙尼和阿得拉的論文所发展的圓規几何学中的几个有趣問題的解法，其中的几个結果将在第二章里用到。

作图題8 自点A作綫段AB的垂綫。

作法(第一法) 保持圓規的开度不变，使之等于任意綫段r，画圓(A,r)和(B,r)，設它們交于点O。画圓(O,r)。在該圓上作点B的对徑点E，为此，截取弦CD=DE=r（图10），其中的C是圓(B,r)和(O,r)交点。綫段AE⊥AB。
假如r=AB，則$AE=\sqrt{3}AB$，点C将与点A重合。

作法(第二法) 作圓(B,A)(图11)，在該圓上任取一点C，作圓(C,A)。設D是二圓D的一交点。現在若再作第三圓(A,D)与圓(C,A)交于点E，則綫段AE⊥AB。

証明　綫段 AC 是連接二圓(A, D), (C, A)的圓心的， DE 是它們的公共弦，这就意味着，

$$AC\perp DE,$$

$$\measuredangle CAD=\measuredangle CAE$$

(三角形 ADE 是等腰三角形)。另一方面

$$\measuredangle CAD=\measuredangle ADC=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}。$$

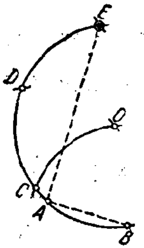


图10

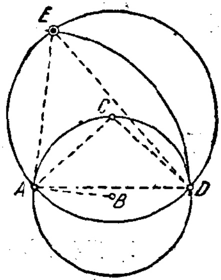


图11

由最后二等式推得

$$\measuredangle CAE=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}。$$

所以直綫 AE 是圓(B, A)在点 A 上的切綫，这就是說，

$$AE\perp AB。$$

作图題 9　作一綫段，等于已知綫段 AB 的 $\frac{1}{n}$ (即分綫段 AB 为 n 等分，n=2, 3, …)。

作法(第一法)　作綫段 AC=nAB (作图題 2)。作圓(C, A)与圓(A, B)交于点 D, D_1。圓(D, A)和(D_1, A)决定所求的点 X。綫段 $AX=\frac{AB}{n}$(图12)。

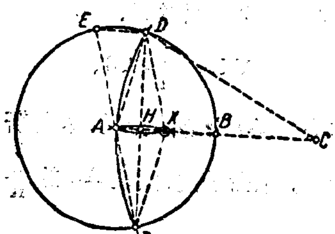


图12

把綫段 AX 增加为 2 倍、3 倍以至 n 倍(作图題2)，我們得到的各点将把綫段 AB 分成 n 等分。

証明　由二等腰三角形ACD和 ADX 相似(角 A 是共同的)推得

$$AC : AD = AD : AX,$$

或

$$AD^2 = AB^2 = AC \cdot AX$$
$$= nAB \cdot AX。$$

于是

$$AX = \frac{1}{n} AB。$$

点X在直綫AB上。

附注　当n的值很大的时候，点X不易定得清楚：二圓弧(D, A)，(D_1, A)在点X处交角很小* 。在这个情况下，可不用圓(D_1, A)决定点X，而改用圓(A, ED)，其中的E是圓(A, B)上点D_1的对徑点。

作法(第二法)　作綫段$AC = nAB$((作图題2)。然后作圓(A, C)，(C, A)和(C, AB)，交于点D和E。現在若再作圓(D, A)和(C, DE)，則得交点X。綫段$AX = \frac{1}{n}AB$(图13)。

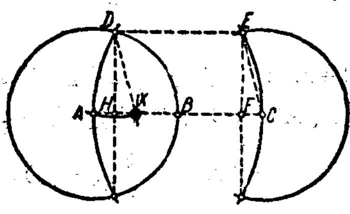


图13

証明　点X在直綫AC上，因为AC∥DE，XC∥DE(图形CEDX是平行四边形)。从等腰三角形ACD和ADX的相似关系，得

$$AX = \frac{1}{n} AB。$$

下面再介紹一种作法，这种作法是A•C•斯莫高尔热夫斯基教授提出的。它不同于以前諸法，在于所求綫段AB的$\frac{1}{n}$

---

* 二曲綫的交角的定义，参考第§8(第52頁)。

分不在已給綫段上。

作法(第三法) 作綫段 AC＝nAB(作图題 2), 作圓(A, C)和(B,AC), 設它們交于一点D。

圓(D, AB)与后二圓交于点 E, H。綫段 EH ＝ $\frac{1}{n}$AB(图14)。

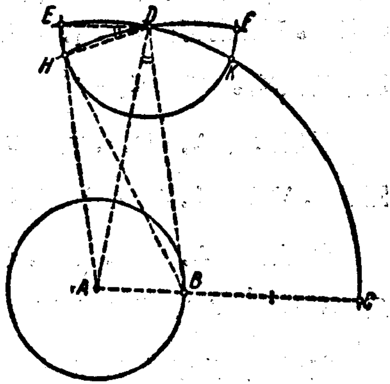


图14

証明 由三角形 ABD, ADE 和 BDH 的三边对应相等推得 $\measuredangle$ADB＝$\measuredangle$EDH。等腰三角形 ADB和EDH相似, 因此,

$$EH : ED = AB : AD,$$

或

$$EH : AB = AB : nAB。$$

最后,

$$EH = \frac{1}{n} AB。$$

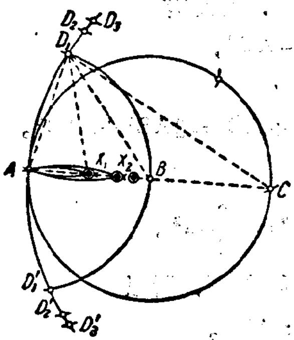


图15

我們看到,

$$EK = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} AB,$$

$$HK = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right) AB。$$

作图題10 作一綫段, 等于已知綫段 AB 的$\frac{1}{2^n}$(即分成2^n等分, $n = 2, 3, \cdots$)。

作法(第一法) 作綫段 AC＝2 AB

(作图题 2)。作圓 (C, A) 命 D_1 , D_1' 为該圓与圓 (A, B) 的交点(图15)。現在若再作圓 (D_1, A) 和 (D_1', A)，則它們的一交点为所求的点 X_1。綫段 $BX_1 = AX_1 = \frac{1}{2}AB$。

随后作圓 (A, BD_1)，与圓 (C, A) 相交，得交点 D_2，D_2'。作圓 (D_2, A) 和 (D_2', A) 交于一点 X_2。綫段 $BX_2 = \frac{1}{2^2}AB$。

若再作圓 (A, BD_2)，(D_3, A) 和 (D_3', A)，則得点 X_3。綫段 $BX_3 = \frac{1}{2^3}AB$，其它以此类推。

証明 因为等腰三角形 ACD_1 和 AD_1X 相似，所以

$$AD_1 : AC = AX_1 : AD_1,$$

或

$$AB : 2AB = AX_1 : AB。$$

从而

$$AX_1 = \frac{1}{2}AB。$$

引入符号 $AB = a$，$BD_k = m_k$，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$。

綫段 BD_1 是三角形 ACD_1 的中綫，因此有

$$4BD_1^2 = 2AD_1^2 + 2CD_1^2 - AC^2,$$

即

$$4m_1^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - AC^2 = 2AB^2 + AC^2 = 2AB^2 + 4AB^2。$$

亦即

$$m_1^2 = BD_1^2 = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2。$$

因为等腰三角形 ACD_2 和 AD_2X_2 相似，所以

$$AD_2 : AC = AX_2 : AD_2。$$

留意一下 $AD_2 = BD_1 = m_1$，$AC = 2a$，則有

$$AX_2=\frac{3}{4}a,\ BX_2=\frac{1}{4}a=\frac{1}{2^2}AB。$$

相仿地求得

$$m_2^2=\frac{1+2+2^2}{2^2}a^2,\ BX_3=\frac{1}{2^3}AB,$$

等等。一般地，

$$m_{k-1}^2=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2,\ BX_k=\frac{1}{2^k}AB。$$

为了把綫段 AB 分成 2^n 等分，必须把綫段 AX_n 2 倍、3 倍、…、2^n倍起来(作图题 2)。

作法(第二法) 作綫段 $AC=2AB$ (作图题 2)，为此，作圓(B, A)，并在該圓上截取弦 $AE=EH=HC=a$。作圓 (A, C) 和(C, E)交于点 D_1 和 D_1'。圓(D_1, C)和 (D_1', C)的交点卽所求的点 X_1。綫段 $BX_1=\frac{1}{2}AB$。

作圓(C, BD_1)与圓(A, C)交于 D_2, D_2'，然后作圓 (D_2, BD_1)和(D_2', BD_1)；后二圓卽决定所求的点 X_2。綫段 $BX_2=\frac{1}{2^2}AB$ (图16)。

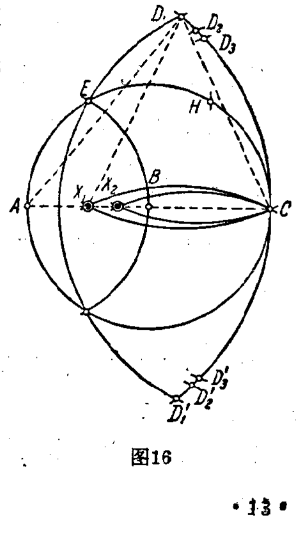


图16

相仿地，作圓(C, BD_2), (D_3, BD_2)和 (D_3', BD_2)，得点 X_3。綫段 $BX_3=\frac{1}{2^3}AB$，等等。

証明 由于等腰三角形 ACD_1 和 CD_1X_1 相似，得

$$CX_1:CD_1=CD_1:AC。$$

留意到 $CD_1=CE=\sqrt{3}AB$ 时，

求得 $CX_1=\frac{3}{2}AB$，由此，$BX_1=\frac{1}{2}AB$。

引入符号 $BD_k=m_k$，其中 $k=1,2,3,\cdots,n$。

綫段 BD_1 是三角形 ACD_1 的中綫，所以，

$$4BD_1^2=4m_1^2=2AD_1^2+2CD_1^2-AC^2$$
$$=2AC^2+2CE^2-AC^2=4a^2+2\cdot 3a^2,$$

即

$$m_1^2=\left(1+\frac{3}{2}\right)a^2。$$

由于等腰三角形 ACD_2 和 CD_2X_2 相似，得

$$CX_2:CD_2=CD_2:AC。$$

注意到 $CD_2=BD_1=m_1$ 和 $AC=2AB=2a$ 后，得

$$CX_2=\frac{CD_2^2}{AC}=\frac{m_1^2}{2a}=\frac{5}{2^2}a。$$

所以

$$BX_2=\frac{1}{2^2}AB。$$

完全类似地，可以証明

$$m_2^2=BD_2^2=\frac{9}{4}a^2,\quad CX_3=\frac{9}{8}a,\quad BX_3=\frac{1}{2^3}AB,$$

等等。一般地，

$$m_{k-1}^2=BD_{k-1}^2=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-2}}+\frac{3}{2^{k-1}}\right)a^2,$$

$$BX_k=\frac{1}{2^k}AB。$$

在第一种作法里，若 k ($k\leq n$)很大，点 X_k 不易画得清楚（决定这点的二圓弧几乎相切了），那么可采用下列办法来解决。

作法(第三法) 作綫段 $AC=2AB$（作图题 2），作圓（A,