高等数学习题与精解

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社

高等数学习题与精解

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书选编了微积分题目800余道，涵盖了一元微积分、微分方程、空间解析几何、多元微积分和级数等内容。本章分“例题精解”和“习题精选”两部分。前者题题有分析，均作详解，有的题并给出多种解法，典型题或难度较大的题则作题后点评；后者供读者练习之用，并给出答案或提示。书末的附录中收编部分重点大学本科生试卷以及研究生入学考试近年试卷，均附答案。

本书可作高等院校非数学专业师生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题与精解/上海交通大学数学系编. —上海：上海交通大学出版社，2005

ISBN 7-313-03855-0

Ⅰ. 高... Ⅱ. 上... Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第091235号

高等数学习题与精解

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市文化印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1240mm 1/32 印张:14.5 字数:414千字

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

印数:1—5 050

ISBN7-313-03855-0/O·168 定价:21.00元

前　言

高等数学是一门以经典微积分为主的数学基础课程。随着我国高等教育的飞速发展和数学在各学科中更广泛的应用，高等数学的教学面临着改革和创新。上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，高等数学教学一直以高标准、严要求为宗旨，收到良好的教学效果。学生在历次国内外高校数学竞赛中，屡屡获奖，并在历届考研中成绩始终名列前茅，这与有一套好的教材和题卷也不无关系。而怎样在新形势下不断提高教学质量，进一步培养学生的数学修养及应用能力的问题也更迫切地摆在我们面前。不断地推出适时的、有特点和有质量的教材及相应的教学辅导参考书就是其中相当重要的一个方面。

上海交通大学数学系新编的教材《微积分》是在原《高等数学》(交大版)教材使用多年基础上重新编写的，教材注重基础，论证严谨，内容丰富，而我们编写《高等数学习题与精解》这本书就可作为《微积分》教材的教学辅导参考书。

做习题应该是学好高等数学的一个非常重要的环节，只有通过做题才可深刻理解概念，熟练掌握内容。而如何分析题目，正确解题则是学生在学习高等数学时碰到的首要问题之一，学生常有拿到题目无从入手的感觉。本书针对学生的这一弱点，配合教学，着力为学生提供分析问题和解决问题的方法，对于学生学习高等数学将起到一种指导作用。

本书结合教材每个章节分例题精解和习题精选两部分。精解题目有选自教材每章节后的部分较难习题，有选自上海交大原习题集中的部分习题，有选自考研的试题。选题时尽量做到具有典型性和实用性，难度适中。每道精解例题在解题前都给出解题思路和分析，引导和启发学生思考，使学生看一题有一题的收获，以达到触类旁通的目的。有些典型题或难度较大的题，题后还进一步给出点评，作一些归纳总结，

起到举一反三的作用。习题是配合精解例题而选配的。

本书不仅适合作为上海交大编《微积分》教材的教学辅导书，也同样可作为其他《高等数学》教材的教学辅导书，适合作为理工科大学学生学习高等数学的参考书及准备考研学生的复习用书。

本书由上海交大数学系十位教师分工编写而成。其中第1,2章由王承国副教授编写，第3章由吴忠英副教授编写，第4章由景继良正教授编写，第5章由汪静副教授编写，第6章由何铭副教授编写，第7章由乐经良正教授编写，第8章由郑麒海副教授编写，第9章由陈克应副教授编写，第10章由王铭副教授编写，第11章由钱芝蓁副教授编写。初稿完成后，陈克应、邵国年、汪静三位副教授分工进行了审核，最后由汪静统筹定稿。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，错误之处在所难免，敬请同行和读者批评指正。

本书编写过程中得到上海交通大学出版社的大力支持，陈克俭副编审对本书内容、结构提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

编者

于上海交通大学

2004年6月

目　　录

第1章 函 数

A 例题精解

1.1 实数集

【1-1】 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$,证明下列不等式:

(1) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$;

(2) $\max(|a+b|,|a-b|,|1-b|)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

分析 (1) 对所证不等式左边的表达式有理化分子后,再适当放大即可证得此不等式.

(2) 可利用不等式 $\dfrac{1}{2}(x+y)\leqslant\max\{x,y\}$ 和绝对值不等式来证得此不等式.

证 (1) 由于

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\right)=a^2+b^2-a^2-c^2=b^2-c^2,$$

故

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|=\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\leqslant\frac{|b^2-c^2|}{|b|+|c|}=\frac{|b-c|\,|b+c|}{|b|+|c|}\leqslant|b-c|.$$

证 (2) 因为

$$\max(|a+b|,|a-b|)\geqslant\frac{1}{2}(|a+b|+|b-a|)\geqslant\frac{1}{2}|a+b+b-a|=|b|,$$

所以 $$\max(|a+b|, |a-b|, |1-b|) \geqslant \max(|b|, |1-b|)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(|b|+|1-b|)$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|b+1-b| = \frac{1}{2}.$$

事实上,对题(2)不等式还可采用下面证法,即可证得$|a+b|$,$|a-b|$,$|1-b|$中至少有一个大于$\frac{1}{2}$. 不妨设$|a+b|<\frac{1}{2}$,$|a-b|<\frac{1}{2}$,则有

$$|1-b| = \left|1-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)\right|$$
$$\geqslant \left|1-\frac{1}{2}(a+b)\right| - \frac{1}{2}|a-b|$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{2}|a+b| - \frac{1}{2}|a-b|$$
$$\geqslant 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

所以
$$\max\{|a+b|, |a-b|+|1-b|^2\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

【1-2】 证明不等式

$$\sqrt{n} < \sqrt{n!} < \frac{n+1}{2} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \geqslant 2).$$

分析 分别对$\sqrt[n]{n!}$与$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n!}\right)^2}$运用 AG 不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad (a_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n),$$

证 $$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\times 2\times\cdots\times n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

又
$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n!}\right)^2} = \sqrt[n]{\frac{1}{1\times 2}\times\frac{1}{2\times 3}\times\cdots\times\frac{1}{(n-1)n}\times\frac{1}{n}}$$
$$< \frac{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n}}{n}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}}{n}$$

$$=\frac{1}{n},$$

即 $\frac{1}{(\sqrt[n]{n!})^2}<\frac{1}{n}$，从而$\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}$，于是得

$$\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

【1-3】 试求集合 $E=\{\sqrt[n]{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$的上确界和下确界.

分析 可通过考察数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的单调性来求其上、下确界.

证 因为

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\\&\quad+\frac{n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n\\&<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}&=\frac{\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}}{\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}}\\&<\sqrt[n(n+1)]{\frac{3}{n}}<1\quad(n>3),\end{aligned}$$

即

$$\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}\quad(n>3).$$

而 $2^3<3^2$，则有 $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，于是得到 $\sup E=\sqrt[3]{3}$. 又$\sqrt[n]{n}\geqslant 1$（$\forall n\in\mathbb{N}$），则有 $\inf E=1$.

1.2 函数

【1-4】 (1) 设 $f(x)=\sin x, f(\varphi(x))=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域；

(2) 设 $f(x)=e^{x^2}, f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

分析 本题是求复合函数中间变量函数及定义域，故可从题目条件分析 $\varphi(x)$ 和 x 的关系，求出 $\varphi(x)$ 的表达式后，再求其定义域.

解 (1) 依题设 $\sin\varphi(x)=1-x^2$ 及 $|\varphi(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，所以 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$，可解得 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

(2) 依题设有 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$，因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以舍去负号，得到 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，从而 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $1-x\geqslant 1$，故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$.

【1-5】 (1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & (x<1), \\ x & (x\geqslant 1), \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0), \\ x^2-1 & (x\geqslant 0), \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & (|x|<1), \\ 0 & (|x|=1), \\ -1 & (|x|>1), \end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f(y(x))$ 和 $g(f(x))$.

分析 可先写出复合函数形式，再对外层函数定义域的各区间段，中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，即可得出复合函数表达式及定义域.

解 (1)

$$f(\varphi(x))=\begin{cases} e^{\varphi(x)} & (\varphi(x)<1), \\ \varphi(x) & (\varphi(x)\geqslant 1). \end{cases}$$

当 $\varphi(x)<1$ 时：

若 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即$\begin{cases}x<0,\\x<-1,\end{cases}$故 $x<-1$；

若 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x^2<2,\end{cases}$故 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时：

若 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即$\begin{cases}x<0,\\x\geqslant -1,\end{cases}$故$-1\leqslant x<0$；

若 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x\geqslant\sqrt{2},\end{cases}$故 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2} & (x<-1),\\ x+2 & (-1\leqslant x<0),\\ e^{x^2-1} & (0\leqslant x<\sqrt{2}),\\ x^2-1 & (x\geqslant\sqrt{2}).\end{cases}$$

(2) 同样方法可求得

$$f(g(x))=\begin{cases}1 & (e^x<1),\\ 0 & (e^x=1),\\ -1 & (e^x>1),\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & (x<0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x>0);\end{cases}$$

$$g(f(x))=e^{f(x)}=\begin{cases}e & (|x|<1),\\ 1 & (|x|=1),\\ e^{-1} & (|x|>1).\end{cases}$$

【1-6】 设 $f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 均为常数，且$|a|\neq|b|$，求 $f(x)$的表达式，并证明 $f(x)$为奇函数.

分析 对 $f(x)$所满足的关系式作变量代换，并利用函数与变量字母表示的无关性，得出另一个 $f(x)$所满足的关系式，然后联立方程求出 $f(x)$的表达式. $f(x)$的奇偶性可由定义来证明.

证 已知条件

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{1}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，得到

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct,$$

即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \tag{2}$$

由式(1)$\times a-$式(2)$\times b$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

因 $|a|\neq|b|$，可得 $f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)$，而

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

【1-7】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义，$x_1>0$，$x_2>0$，且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

分析 对 $\dfrac{f(x)}{x}$ 按单调减的定义可证得此不等式.

证 对于 $x_1>0$，$x_2>0$，不妨设 $x_1<x_2$，依题设有

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1},\quad \text{即}\quad x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1).$$

又由

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2),$$

故

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2),$$

即得

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

点评 本题中若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加，其他条件不变，则有

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

【1-8】 已知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,试证明 $f(x)$为周期函数且它的(最小正)周期为 2π.

分析 可先验证 2π 为 $f(x)$的一个周期,再用反证法证明 2π 为 $f(x)$的最小正周期.

证 $f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)$

$$=f(x)+\sin x+\sin(x+\pi)=f(x),$$

所以 $f(x)$为周期函数.

设$\exists a\in(0,2\pi)$,使

$$f(x+a)=f(x),x\in(-\infty,+\infty),$$

则
$$f(\pi+a)=f(\pi)=f(0+\pi)=f(0)+\sin 0=f(0)=f(a),$$

再以 $x=a$ 代入题中条件,有

$$f(a+\pi)=f(a)+\sin a,$$

得 $\sin a=0$,所以 $a=\pi$.

由假设 a 为 $f(x)$的周期,故 $f(x+\pi)=f(x)$,再由所给定义式得 $\sin x\equiv 0$,矛盾.所以 $f(x)$的最小正周期为 2π.

综合题

【1-9】 设 $f(x)=a+bx$,记 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\ \cdots))$($n$ 次复合),证明:

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

分析 容易看出,经复合(迭代)后,函数仍是线性的,故可采用归纳法来证明.

证 设 $f_1(x)=f(x)=a+bx$,则

$$f_2(x)=f(f(x))=a+b(a+bx)$$

$$=a(b+1)+b^2x=a\frac{b^2-1}{b-1}+b^2x.$$

若 $f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx$,则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=a+b\left(a\frac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right)$$
$$=a\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x.$$

用归纳法可得

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

点评 本题也可用不动点的概念来证明.方程 $f(x)=x$ 的解称为函数 $f(x)$ 的不动点,显然 f 的不动点也必定是 f_n 的不动点.因为 $f(x)=a+bx$,故可设 $f_n(x)=A+Bx$,且显然有 $B=b^n$,从而 $f_n(x)=A+b^nx$.下面利用不动点概念来确定 A:

令 $f(x^*)=x^*$,即 $a+bx^*=x^*$,解得不动点

$$x^*=\frac{a}{1-b}.$$

x^* 也是 $f_n(x)$ 的不动点,即 $A+b^nx^*=x^*$,于是得

$$A=(1-b^n)x^*=a\frac{1-b^n}{1-b},$$

所以

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

【1-10】 设函数 $f(x)$ 的定义域与值域都是$\mathbb{R}$,令

$$A=\{x\mid f(x)=x\}\text{ 与 }B=\{x\mid f(f(x))=x\},$$

证明:若函数 $f(x)$ 是单调增加,则 $A=B$.

分析 要证数集 A 与 B 相等,只须证明 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

证 $\forall x\in A$,即 $f(x)=x$,有

$$f(f(x))=f(x)=x,$$

即 $x\in B$,于是 $A\subset B$.

又 $\forall x\in B$,即 $f(f(x))=x$. 假设 $f(x)\neq x$,不妨设 $x<f(x)$($x>f(x)$同法可证). 已知函数 $f(x)$ 单调增加,有

$$f(x)\leqslant f(f(x))=x,$$

这与条件 $x<f(x)$ 矛盾,于是,$\forall x\in B$,有 $f(x)=x$,从而 $B\subset A$.所以 $A=B$.