

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

数值传热学(第2版)

Numerical Heat Transfer
(Second Edition)

陶文铨 编著

西安交通大学出版社

数值传热学

(第2版)

陶文铨 编著

Numerical Heat Transfer

(Second Edition)

西安交通大学出版社

内 容 提 要

《数值传热学》(第2版)是在本书1988年(第1版)的基础上修改增删写成的。引入和阐述了10年来国内外有关科研成果和资料,重点介绍了椭圆型方程数值求解在工程流动与传热问题中的应用等内容,适当提高起点,删减或简化了部分内容。

本书可作动力、能源、化工、航空、冶金等类专业领域的研究生、大学生教材,也可供上述技术领域的科技人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数值传热学/陶文铨编著. -2版. -西安:西安交通大学出版社,2001.5
ISBN 7-5605-1436-7

I. 数… II. 陶… III. 数值计算-应用-传热学-研究生-教材 IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 043819 号

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市兴庆南路25号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:36 字数:596千字

2001年5月第1版 2002年5月第2次印刷

印数:1 001~3 000 定价:50.00元

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357,2667874

第 2 版前言

《数值传热学》第 1 版自 1988 年发行以来,蒙国内广大同行与读者的厚爱,纷纷采用作为研究生教学的教材或参考书;不少海外华人学子,也常把本书作为传热问题数值计算的参考用书。本书并两次被中国科学时报公布为全国引频次数最高的前 20 本专著之一,先后重印两次,总发行量 7000 余册,对促进我国的计算传热学的教学与研究工作的开展起到了一定的作用。在这 10 余年中,随着计算机工业的突飞猛进的发展,流动与传热问题数值计算的方法也有了飞速的进步,很有必要对第 1 版的内容作一修订。2000 年教育部研究生工作办公室批准推荐本书作为全国的研究生教材,趁此机会,笔者对本书第 1 版的内容作了较大的修改。

在修订本书时,笔者仍将它定位在研究生学习流动与传热的一本入门性教材的层次上,旨在使读者通过本书的学习,能够较好地掌握一种数值计算方法,熟练地使用目前已在我国高等学校广泛使用的教学程序,并在此基础上开发适用于更复杂问题的计算软件或能高效地使用现代商业软件,获得所需要的结果。因此,在众多的数值离散方法中,本书着重介绍发展成熟、应用广泛的有限容积法;在有限容积法的区域离散、方程离散、压力与速度耦合关系的处理、代数方程的求解等环节方面,笔者也作了必要的限定:区域离散方法不涉及非结构化网格;方程离散中不引入高阶组合格式;压力与速度耦合方法方面着重于 SIMPLE 系列算法;代数方程求解方法不介绍共轭梯度型的一些方法。和第 1 版中一样,本书不涉及辐射换热问题的数值解。这样有所为、有所不为地组织内容的目的在于使初学者能在有限的时间内较好地掌握一种有效的数值方法,不仅对总体内容有透彻的了解,而且也能知道必要的实施细节。根据作者近 20 年来的教学经验,这是学习数值计算的一种有效方法。

在上述界定的范围内,本书对近 10 余年中发展出来的或广泛应用的方法作了必要充实与完善,删去了一部分内容简单或应用不广的方法和

相应的文献,增加了这 10 余年中有代表性的文献 350 余篇。各章的主要修改如下。在绪论一章中,增加了描写传热与流动问题的控制方程、边界条件及控制方程分类的系统介绍。对区域与方程离散化及离散方程误差与性能分析两章(第 2,3 章)在保持原来的基本内容情况下对叙述方式作了改进,也增加了近年来的一些表示方式。第 1 版中导热问题数值计算方法与管道内充分发展对流换热的计算两章合并成 1 章(第 4 章),以节省篇幅。第 5 章(对流-扩散方程的离散格式)增加了离散格式的重要性及两种离散方式的介绍,以使读者能对这一问题有一个总体的了解,在高阶格式讨论中增加了延迟修正方法、QUICK 的源项表示方法,同时介绍了三维对流-扩散方程的离散方程,本章中删去了文献中很少应用的斜迎风格式、局部分析解与 CONDIF 格式的介绍。第 6 章(求解椭圆型流动与换热问题的原始变量法)删去了 PUMPIN 算法,增加了 SIMPLEX, 及加速 SIMPLER 算法的内容,同时引入了同位网格上 SIMPLE 算法。按照数值计算的顺序,第 2 版中把离散方程的求解安排在第 7 章,并且增加了有关采用多重网格求解的内容。在涡量-流函数法一章(第 8 章)的介绍中,保留了基本的内容,删去了二维通用方程离散的部分,使篇幅得以精简。鉴于工程数值计算中大量遇到的是椭圆型问题,第 2 版中删去了边界层型问题数值解的全部内容(原第 9 章)。从第 1 章到第 8 章是本书的基本部分,学时较少的课程可以把教学内容主要限在这 8 章。由于工程问题中的流动与换热大多属于湍流范围,第 9 章关于湍流模型的介绍此次修订作了较大的增补,引入了非线性 $k-\epsilon$ 模型, RNG $k-\epsilon$ 模型, 多尺度 $k-\epsilon$ 模型及二阶矩模型等内容。在网格生成技术(第 10 章)的介绍中,删去了第 1 版中关于三角形网格及一般正交曲线坐标系的介绍,着重在用代数方程及微分方程法生成网格方法的介绍,同时叙述的顺序也作了调整,沿着网格生成、计算平面求解的顺序来开展,结合实例增加了利用计算平面的结果进行数据整理的介绍,并对块结构化网格作了简要说明。本版第 11 章命名为“专题”,一个目的是通过三个典型常见的问题,使读者对如何运用已具有的知识求解较复杂的实际问题有进一步的体会与训练,任课教师可以根据自己从事数值模拟的经历对内容做相应的选择或增删;同时通过对基准解、数值计算误差分析及商业软件的介绍进一步扩大数值计算及其应用的知识面。考虑到过去 10 余年中我国计算传热学的发展情况,并为了节省篇幅,第 1 版中的附录均已删去。读者如果需要实施压力与速度耦合算法的教学程序,可通过电子邮件向笔者索取。

本书中所引的笔者及其研究生的工作都是在国家自然科学基金、教育部博士学科点专项基金以及国家重点基础研究项目(G20000 26303)资助下进行的,笔者在此深表谢意。

每当笔者完成一篇论文或一本书稿时,总是情不自禁地想起指导笔者走上传热学与数值传热学研究道路的导师,上海交通大学杨世铭教授和美国明尼苏达大学 E M Sparrow 教授,杨世铭教授曾热情地为本书第1版作序,Sparrow 教授则鼓励笔者写出英文的书稿,笔者在此向两位导师表示深深的敬意。笔者感谢教育部研究生工作办公室批准推荐本书作为研究生教材,感谢西安交通大学研究生院及西安交通大学出版社为出版本书第1版及第2版所给予的支持与帮助,特别是总编辑杨洪森教授和责任编辑朱兆雪编审,为了第2版的早日问世给笔者提供了许多方便,朱兆雪编审详细地审阅了书稿,避免了不少错误,使本书增色不少。清华大学工程力学系过增元教授和陈熙教授对本书第1版和第2版的出版给予了热情的帮助,过增元教授对第2版的修改提出了宝贵的建议,陈熙教授指出了第1版中个别欠妥之处,笔者衷心地感谢他们。笔者的同事,西安交通大学能源与动力工程学院的王秋旺、何雅玲两位教授给笔者的写作提供了不少支持与帮助,笔者所在的 cfd-nht 及强化传热研究组对笔者的修改大纲提出了许多改进意见,研究生屈治国、曾敏,同事王育清为本书的出版事务提供了不少帮助,笔者在此向他们一并表示谢意。笔者还要感谢过去10余年中所指导过的博士研究生们,是他们在读期间及毕业后的出色工作,丰富了本书的内容。例如关于 QUICK 格式延迟修正实施方式中源项的表达式是杨莱教授在日本作研究时完成的,关于促进 SIMPLER 算法收敛速度的方法是宇波博士在日本九州大学做博士后研究时提出的,这些内容都已收集在第2版中。最后笔者要感谢自己的妻子与儿子,是她(他)们为笔者提供了有利于写作的环境,并给予了精神上的支持与鼓励,使得笔者能在较短期内完成本书第2版的修改工作。

作者才疏学浅,加之时间匆促,书中错误和不足之处在所难免,敬希读者批评指正。

陶文铨

2001年5月

wqtao@xjtu.edu.cn

目 录

第二版前言

第 1 章 绪论

| | |
|--------------------------------|------|
| 1.1 描写流动与传热问题的控制方程 | (1) |
| 1.2 控制方程的守恒与非守恒形式及单值性条件 | (6) |
| 1.3 控制方程的数学分类及其对数值解的影响 | (10) |
| 1.4 什么是数值传热学及常用的数值方法 | (14) |
| 1.5 数值传热学在现代传热学研究中的作用与地位 | (18) |
| 1.6 本书内容介绍 | (21) |
| 习题 | (24) |
| 参考文献 | (26) |

第 2 章 计算区域与控制方程的离散化

| | |
|-------------------------------------|------|
| 2.1 空间区域的离散化 | (28) |
| 2.2 建立离散方程的 Taylor 展开法及多项式拟合法 | (32) |
| 2.3 建立离散方程的控制容积积分法及平衡法 | (39) |
| 习题 | (44) |
| 参考文献 | (47) |

第 3 章 离散方程的误差与物理特性的分析

| | |
|-------------------------------------|------|
| 3.1 离散方程的相容性、收敛性及稳定性 | (48) |
| 3.2 分析初值问题稳定性的 von Neumann 方法 | (56) |
| 3.3 离散方程的守恒性 | (64) |
| 3.4 离散方程的迁移性 | (69) |
| 习题 | (73) |
| 参考文献 | (76) |

第4章 扩散方程的数值解法及其应用

| | |
|---------------------------------|-------|
| 4.1 一维导热问题····· | (78) |
| 4.2 多维非稳态导热方程的全隐格式····· | (86) |
| 4.3 源项及边界条件的处理····· | (90) |
| 4.4 求解离散方程的三对角阵算法及交替方向隐式方法····· | (99) |
| 4.5 管道内充分发展对流换热的定义及求解实例····· | (104) |
| 4.6 管道内充分发展对流换热的统一数学模型····· | (109) |
| 4.7 纵向内肋片管中的充分发展对流换热····· | (115) |
| 4.8 长方形截面通道内的充分发展对流换热····· | (120) |
| 习题····· | (124) |
| 参考文献····· | (129) |

第5章 对流-扩散方程的离散格式

| | |
|-------------------------------|-------|
| 5.1 对流项离散格式的重要性及两种离散方式····· | (136) |
| 5.2 对流项的中心差分与迎风格式····· | (138) |
| 5.3 对流-扩散方程的混合格式及乘方格式····· | (142) |
| 5.4 对流-扩散方程5种3点格式系数特性的分析····· | (147) |
| 5.5 关于对流项离散格式假扩散特性的讨论····· | (152) |
| 5.6 可以克服或减轻假扩散的格式或方法····· | (162) |
| 5.7 对流-扩散方程离散形式的稳定性分析····· | (169) |
| 5.8 多维对流-扩散方程的离散及边界条件的处理····· | (176) |
| 习题····· | (183) |
| 参考文献····· | (186) |

第6章 求解椭圆型流动与换热问题的原始变量法

| | |
|--|-------|
| 6.1 动量方程的源项及流场求解中的关键问题····· | (195) |
| 6.2 交错网格及动量方程的离散····· | (198) |
| 6.3 求解 Navier-Stokes 方程的压力修正方法····· | (203) |
| 6.4 SIMPLE 算法的计算步骤及算例····· | (207) |
| 6.5 SIMPLE 算法的讨论及流场迭代求解的收敛判据····· | (211) |
| 6.6 SIMPLE 算法的发展(SIMPLER, SIMPLEC, SIMPLEX) ····· | (218) |
| 6.7 加速 SIMPLE 系列算法收敛速度的一些方法····· | (226) |
| 6.8 开口系统流场计算中出口法向流速的确定····· | (231) |

| | |
|--------------------------------------|-------|
| 6.9 封闭系统内流动与换热的数值计算 | (240) |
| 6.10 同位网格上的 SIMPLE 算法 | (245) |
| 习题..... | (251) |
| 参考文献..... | (255) |
| 第 7 章 代数方程组的求解方法 | |
| 7.1 代数方程组求解方法概述 | (263) |
| 7.2 TDMA 算法的扩展 | (266) |
| 7.3 求解代数方程组的迭代法 | (270) |
| 7.4 迭代法的收敛性及加速收敛的方法 | (275) |
| 7.5 加速迭代解法收敛速度的块修正技术 | (280) |
| 7.6 多重网格方法 | (283) |
| 7.7 多重网格技术应用于流场的求解中的一些特殊问题 .. | (289) |
| 习题..... | (294) |
| 参考文献..... | (298) |
| 第 8 章 求解椭圆型问题的涡量-流函数法 | |
| 8.1 强制对流换热的涡量-流函数方程及其离散化 | (301) |
| 8.2 涡量-流函数方法中边界条件的处理 | (305) |
| 8.3 固体壁面上的涡量-流函数条件的确定 | (309) |
| 8.4 涡量-流函数法用于计算有限空间中的自然对流 | (314) |
| 8.5 关于涡量-流函数法的进一步讨论 | (323) |
| 习题..... | (325) |
| 参考文献..... | (327) |
| 第 9 章 湍流流动与换热的数值模拟 | |
| 9.1 湍流及其数值模拟方法概述 | (333) |
| 9.2 湍流对流换热的 Reynolds 时均方程 | (337) |
| 9.3 零方程模型及一方程模型 | (341) |
| 9.4 $k - \epsilon$ 两方程模型 | (347) |
| 9.5 壁面函数法 | (353) |
| 9.6 低 Re 数 $k - \epsilon$ 模型 | (362) |
| 9.7 $k - \epsilon$ 两方程模型的发展 | (370) |
| 9.8 二阶矩模型 | (376) |

| | |
|------------------------------------|-------|
| 9.9 有浮升力存在时湍流的数值计算 | (385) |
| 9.10 湍流数值模拟综述及其近代发展 | (392) |
| 习题 | (409) |
| 参考文献 | (412) |
| | |
| 第 10 章 网格生成技术 | |
| 10.1 有限差分及有限容积法中处理不规则区域的常用方法 | (432) |
| 10.2 适体坐标的基本概念 | (435) |
| 10.3 生成适体坐标的代数法 | (437) |
| 10.4 生成适体坐标的微分方程法 | (442) |
| 10.5 网格分布的控制 | (448) |
| 10.6 控制方程的转换及其离散 | (453) |
| 10.7 计算平面上的 SIMPLE 算法 | (458) |
| 10.8 计算平面上数值计算结果的处理 | (463) |
| 10.9 块结构化网格简介 | (468) |
| 习题 | (474) |
| 参考文献 | (478) |
| | |
| 第 11 章 计算传热学专题讨论 | |
| 11.1 耦合传热问题的数值计算 | (483) |
| 11.2 周期性充分发展对流换热的求解 | (488) |
| 11.3 换热器数值模拟概述 | (496) |
| 11.4 数值计算结果的误差估计和基准解 | (502) |
| 11.5 计算传热学的商业软件 | (507) |
| 结束语 | (512) |
| 习题 | (513) |
| 参考文献 | (515) |
| | |
| 主题索引 | (526) |
| 作者索引 | (537) |

第 1 章 绪论

流动与热交换现象大量地出现在自然界及各个工程领域中,其具体的表现形式多种多样。从现代楼宇的暖通空调过程到自然界风霜雨雪的形成,从航天飞机重返大气层时壳体的保护到微电子器件的有效冷却,从现代汽车流线外型的确定到紧凑式换热器中翅片形状的选取,无不都与流动和传热过程密切相关;而各种生产电力的方法几乎都是以流体流动及传热作为其基本过程的。所有这些变化万千的流动与传热过程都受最基本的 3 个物理规律的支配,即质量守恒、动量守恒及能量守恒。本章的基本目的是从数值传热学的角度,向读者介绍在流动与传热问题中这些守恒定律的数学表达式——偏微分方程(称为控制方程, *governing equations*),使一个过程区别于另一个过程的单值性条件(初始条件及边界条件, *initial and boundary conditions*),不同形式的控制方程对数值计算结果的影响,以及用数值方法对控制方程进行求解的基本思想和常用的数值方法。最后介绍本书的主要内容。

1.1 描写流动与传热问题的控制方程

设在如图 1-1 所示的三维直角坐标系中有一对流换热过程,流体的速度矢量 U 在三个坐标上的分量分别为 u, v, w , 压力为 p , 流体的密度为 ρ 。这里,为一般化起见, u, v, w, p 及 ρ 都是空间坐标及时间的函数。对图中所示的微元体积 $dx dy dz$,应用质量守恒定律、动量守恒定律及能量守恒定律,可得出三个守恒定律的数学表达式。

1.1.1 质量守恒方程(*mass conservation equation*)

对图 1-1 中固定在空间位置的微元体,质量守恒定律可表示为:

[单位时间内微元体中流体质量的增加] = [同一时间间隔内流入该微元体的净质量]

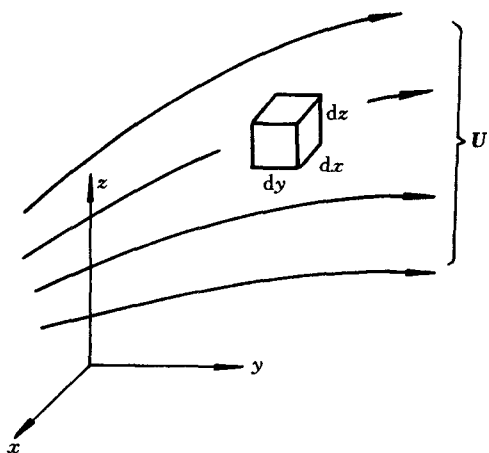


图 1-1 三维直角坐标系及微元体

据此,可以得出以下的质量守恒方程(又称连续性方程, *continuity equation*):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-1)$$

上式中的第 2,3,4 项是质量流密度(单位时间内通过单位面积的流体质量)的散度,可用矢量符号写出为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (1-2)$$

对于不可压缩流体,其流体密度为常数,连续性方程简化为:

$$\text{div}(\mathbf{U}) = 0 \quad (1-3)$$

1.1.2 动量守恒方程(*momentum conservation equation*)

对图 1-1 所示的微元体分别在三个坐标方向上应用 Newton 第 2 定律($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$)在流体流动中的表现形式:

[微元体中流体动量的增加率] = [作用在微元体上各种力之和]

并引入 Newton 切应力公式及 Stokes 的表达式,可得 3 个速度分量的动量方程如下^[1]:

u-动量方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y}[\eta(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] + \frac{\partial}{\partial z}[\eta(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] + \rho F_x
\end{aligned} \tag{1-4a}$$

v - 动量方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial z} \\
&= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}[\eta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}[\eta(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})] + \rho F_y
\end{aligned} \tag{1-4b}$$

w - 动量方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z} \\
&= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}[\eta(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}[\eta(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}) + \rho F_z
\end{aligned} \tag{1-4c}$$

其中 η 为流体的动力粘度, $\bar{\lambda}$ 称为流体的第 2 分子黏度, 对气体可取为 $-2/3$ ^[1]。

在数值传热学中常常将上述 3 式等号后的分子粘性作用项做如下变化, 以 u - 动量方程为例:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}[\eta(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] + \frac{\partial}{\partial z}[\eta(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial v}{\partial x}) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}(\eta \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{U}) \\
&= \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u) + S_u
\end{aligned} \tag{1-5}$$

据此, 上述动量方程可以进一步写成以下矢量形式:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{U}) = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u) + S_u - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1-6a}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{U}) = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} v) + S_v - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1-6b}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{U}) = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} w) + S_w - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{1-6c}$$

其中 S_u , S_v , S_w 为 3 个动量方程的广义源项, 其表达式可对照式(1-5) 得出如下:

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \operatorname{div} U) \quad (1-7a)$$

$$S_v = \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \operatorname{div} U) \quad (1-7b)$$

$$S_w = \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \operatorname{div} U) \quad (1-7c)$$

对于粘性为常数的不可压缩流体, $S_u = S_v = S_w = 0$, 于是式(1-6)简化成为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(uU) = \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} u) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(vU) = \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} v) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1-8b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(wU) = \operatorname{div}(\nu \operatorname{grad} w) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1-8c)$$

其中 ν 为流体的运动粘度。

式(1-6)~(1-8)称为 *Navier-Stokes* 方程。

1.1.3 能量守恒方程(energy conservation equation)

对图 1-1 所示的微元体应用能量守恒定律:

[微元体内热力学能的增加率] = [进入微元体的净热流量] + [体积力与表面力对微元体做的功]

再引入导热 Fourier 定律, 可得出用流体比焓 h 及温度 T 表示的能量方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w h)}{\partial z} \\ & = -p \operatorname{div} U + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \Phi + S_h \end{aligned} \quad (1-9)$$

其中 λ 是流体的导热系数, S_h 为流体的内热源, Φ 为由于粘性作用机械能转换为热能的部分, 称为耗散函数(*dissipation function*), 其计算式如下^[2]:

$$\begin{aligned} \Phi = & \eta \{ 2 [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2] + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 + \\ & (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})^2 \} + \lambda \operatorname{div} U \end{aligned} \quad (1-10)$$

式(1-9)中 $p \operatorname{div} U$ 系表面力对流体微元体所做的功, 一般可以忽略; 同时对理想气体, 液体及固体可以取 $h = c_p T$, 进一步取 c_p 为常数, 并把耗

散函数 Φ 纳入到源项 S_T 中 ($S_T = S_h + \Phi$), 于是可得:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \text{div}(\rho UT) = \text{div}\left(\frac{\lambda}{c_p} \mathbf{grad} T\right) + S_T \quad (1-11)$$

对不可压缩流体有:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(UT) = \text{div}\left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \mathbf{grad} T\right) + \frac{S_T}{\rho} \quad (1-12)$$

式(1-2), (1-4a), (1-4b), (1-4c)及(1-11)包含6个未知量, u, v, w, p, T 及 ρ , 还需补充一个联系 p, ρ 的状态方程, 方程组才能封闭:

$$\rho = f(p, T) \quad (1-13)$$

对理想气体可有:

$$p = \rho RT \quad (1-14)$$

其中 R 为摩尔气体常数。

1.1.4 控制方程的通用形式

在流动与传热问题求解中所需求解主要变量(速度及温度等)的控制方程都可以表示成以下通用形式^[3]:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho U\phi) = \text{div}(\Gamma_\phi \mathbf{grad}\phi) + S_\phi \quad (1-15)$$

式中 ϕ 为通用变量, 可以代表 u, v, w, T 等求解变量; Γ_ϕ 为广义扩散系数; S_ϕ 为广义源项。这里引入“广义”二字, 表示处在 Γ_ϕ 与 S_ϕ 位置上的项不必是原来物理意义上的量, 而是数值计算模型方程中的一种定义, 不同求解变量之间的区别除了边界条件与初始条件外, 就在于 Γ_ϕ 与 S_ϕ 的表达式的不同。式(1-15)也包括了质量守恒方程, 只要令 $\phi=1, S_\phi=0$ 即可。在计算传热学的一些文献中常常在给出式(1-15)这样的通用形式后, 以表格的形式给出所求解变量的 Γ_ϕ 与 S_ϕ 的表达式。

1.1.5 几点说明

对于上述控制方程要做以下几点说明:

1. 式(1-4)是三维非稳态 Navier - Stokes 方程, 无论对层流或湍流都是适用的。但是对于湍流, 如果直接求解三维非稳态的控制方程, 需要采用对计算机的内存与速度要求很高的直接模拟方法 (*direct numerical simulation*), 目前无法应用于工程计算。工程中广为采用的是对非稳态 Navier - Stokes 方程做时间平均的方程, 并且还需要补充能反映湍流特性的其它方程。这些方程也可以纳入式(1-15)的形式中, 将在第9章中介

绍。

2. 当流动与换热过程伴随有质交换现象时,控制方程中还应增加组分守恒定律。设组分 l 的质量百分数为 m_l ,在引入质扩散的 Fick 定律后,可得

$$\frac{\partial(\rho m_l)}{\partial t} + \text{div}(\rho m_l U) = \text{div}(\Gamma_l \text{grad} m_l) + R_l \quad (1-16)$$

式中 R_l 是单位容积内组分 l 的产生率($\text{kg}/(\text{s}\cdot\text{m}^3)$), Γ_l 是组分 l 的扩散系数。显然式(1-16)也可以归入式(1-15)的模式中去。

3. 在式(1-11)及式(1-12)中,虽然假定了 c_p 为常数,但这并不意味着式(1-11)等只能用于 c_p 为常数的情形。对于变物性的问题(c_p 与温度有关),我们可以用上一次迭代或上一个时层的温度来确定其值,使 c_p 仍能随着温度的变化而改变,只是在迭代或时间的层次上稍有滞后。对于稳态的问题,当整个计算过程收敛时,这一差别也就消失。

4. 在传热学的3种热量传递方式中,导热与对流可以由以上控制方程来描写。如果流体本身是辐射性的介质(如高温烟气),则除了导热与对流以外,不相邻的流体微团之间及流体与壁面之间还有辐射换热,辐射换热需要用积分方程来描述。本书中将不涉及这类问题,有关辐射换热的数值计算可参见文献[4,5]。

1.2 控制方程的守恒与非守恒形式及单值性条件

1.2.1 控制方程的守恒型与非守恒型

在式(1-15)所代表的通用控制方程中,对流项都采用散度(*divergence*)的形式来表示,在数值计算的文献中称为守恒型的控制方程或控制方程的守恒形式(*conservative form*)。位于式(1-15)散度符号内的是通过流动在单位时间内单位面积上进入所研究区域的某个物理量的净值;在式(1-2)中为质量流速 ρU ;在式(1-4)中是3个坐标方向上的动量流密度 ρUu , ρUv , ρUw ;在式(1-11)中的则是能量流密度 $\rho c_p UT$ 。在流体力学与传热学的一般文献中^[1,6,7],还经常见到所谓非守恒型的控制方程。以能量方程为例,式(1-11)可写成为:

$$\begin{aligned} T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \\ \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{div}\left(\frac{k}{c_p} \mathbf{grad} T\right) + S_T$$

根据式(1-1),上式可简化为:

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{k}{c_p} \mathbf{grad} T\right) + S_T \quad (1-17)$$

式(1-17)即为能量守恒方程的非守恒形式(*non-conservative form*)。类似地,可得动量守恒及质量守恒方程的非守恒形式为:

$$\text{质量守恒方程: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$

动量守恒方程:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\eta \mathbf{grad} u) + S_u \quad (1-18a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\eta \mathbf{grad} v) + S_v \quad (1-18b)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\eta \mathbf{grad} w) + S_w$$

(1-18c)

值得指出,从微元体的角度,控制方程的守恒型与非守恒型是等价的,都是物理的守恒定律的数学表示。但是数值计算是对有限大小的计算单元进行的,对有限大小的计算体积,两种形式的控制方程则有不同的特性,控制方程的守恒型与非守恒型的名称也是在20世纪80年代后才在有关文献中出现^[8,9]。从数值计算的观点,守恒型的方程有两个优点。在计算可压缩流动时,守恒型的控制方程可以使激波的计算结果光滑而且稳定,而应用非守恒型方程时激波的计算结果会在激波前及后引起解的振荡,并导致错误的激波位置。所以在空气动力学的数值计算中守恒型的控制方程特别受到重视,并且用通量的列矢量的一阶导数的方程组的形式来表示,但这种表达方式在计算传热学中并不采用,故此处不予介绍,有兴趣的读者可参见文献[8]。在计算传热学中,希望数值计算结果能满足守恒定律,而要保证做到这一条,应该采用守恒型的控制方程。也就是说只有守恒型的控制方程才可以保证对有限大小的控制容积内所研究的物理量的守恒定律仍然得到满足。为了说明这一点,我们将式(1-11)对空间任意有限大小的容积 V 做积分:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho c_p T) dv = - \int_V \operatorname{div}(\rho c_p \mathbf{U} T) dv + \int_V \operatorname{div}(\lambda \mathbf{grad} T) dv + \int_V (c_p S) dv$$

利用 Gauss 降维定律,可得