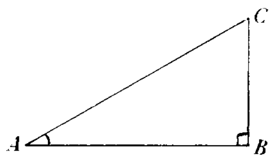
三　角　函　數

◉ 三角函數的基礎 (題號 1～8)

1. 銳角三角函數



設直角△ABC, ∠B 爲直角，如圖示。若∠A的大小確定時，則△ABC的邊長比恆爲定值。吾人定義∠A的三角函數值分別如下：

$$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},\ \cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\ \tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cot A=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},\ \sec A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},\ \csc A=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

2. 角度的單位及換算

(1) 360°制：度、分、秒。

(2) 弧度制：在圓周上取一段弧($\overset{\frown}{PQ}$)= 半徑(r)，則$\overset{\frown}{PQ}$所對之圓心角∠POQ爲「 1弧度 」。

(3) 換算：① 公式：$\pi=180°$

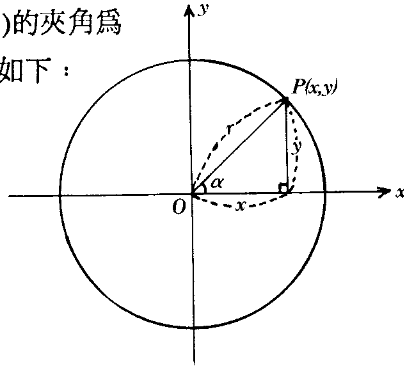
② $1°=0.01745$ (弧度)

③ 1 (弧度)$=57°17'45''$

◉ 廣義角的三角函數(題號 9～44)

1. 如下圖，向徑$\overline{OP}$與始邊(x軸的正向)的夾角為 $\alpha(0\le\alpha<2\pi)$，則 α的同界角θ表示如下：

$$\theta=2n\pi+\alpha,\ n\in Z$$



設 $P(x, y)$, $\overline{OP}=r$，向徑 $\overline{OP}$所表的一般角θ，吾人定義θ的三角函數如下：

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

2. 三角函數的符號

三角函數 \ 象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅵ
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

3. 同值函數

(1) 設 $n\in Z$，則

$$\sin(n\pi\pm\theta)=\pm\sin\theta \qquad \cos(n\pi\pm\theta)=\pm\cos\theta$$

$$\tan(n\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta \qquad \cot(n\pi\pm\theta)=\pm\cot\theta$$

$$\sec(n\pi\pm\theta)=\pm\sec\theta \qquad \csc(n\pi\pm\theta)=\pm\csc\theta$$

(2) 設 $n=2k+1,\ k\in Z$，則

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\csc\theta \qquad \csc\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\sec\theta$$

註：(1), (2)中之「 ± 」號依 $n\pi\pm\theta\left(\text{或}\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$ 所在之象限而定。

4. 特別角的三角函數值

角度 / 函數	15°	18°	30°	36°	45°
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

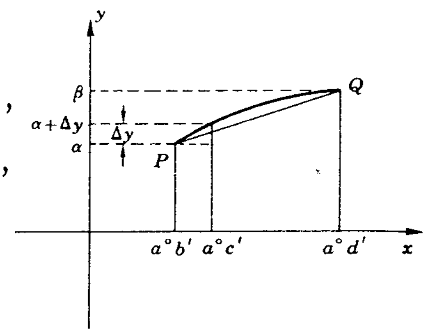
5. 內插法求近似值

解法原理：

如圖，當P, Q兩點極接近時，

曲線$\overset{\frown}{PQ}$幾乎近似於線段$\overline{PQ}$，

由比例關係知



$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{\Delta y}{\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y=\frac{c-b}{d-b}(\beta-\alpha)$$

註：54°, 72°, 75°可依同值函數求得其值。

◉ 三角恆等式(題號 45～ 83)

1. 平方關係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

2. 倒數關係

$\sin\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$, $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

3. 商數關係

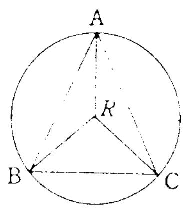
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

◉ 三角形的性質(題號 84～ 152)

1. 正弦定律

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (R爲$\triangle ABC$外接圓之半徑)

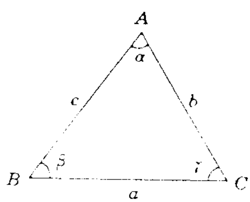
$$\Rightarrow\begin{cases}a=2R\sin\alpha\\ b=2R\sin\beta\\ c=2R\sin\gamma\end{cases}$$



2. 餘弦定律

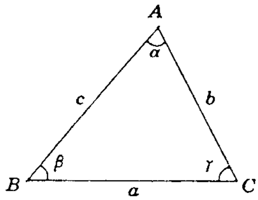
(1) $$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos\beta=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}$$



3. 投影定律

$$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{cases}$$



4. 正切定律

(1) $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(2) $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

(3) $$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}$$

思考：在用餘弦定律之前，最好先考慮是否可用正弦定律或投影定律。

5. 半角公式

設$\triangle ABC$之三邊長爲 a, b, c, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，則

(1) $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

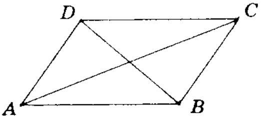
(2) $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

(3) $$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

6. 平行四邊形定理

如圖示

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$



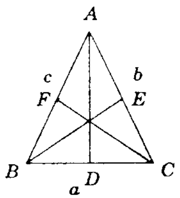
7. 三角形的中線長

如圖：設D, E, F分別爲$\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$之中點，則

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$\overline{BE}=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$$

$$\overline{CF}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$



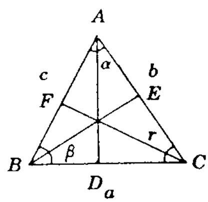
8. 三角形的分角線長

如圖，設$\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$分別爲$\triangle ABC$之角平分線，則

$$\overline{AD}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{BE}=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\overline{CF}=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$



9. 三角形面積

(1) $a\triangle=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ca\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

(2) $a\triangle=\frac{abc}{4R}$

(3) $a\triangle=rs,\quad s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(4) $a\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

◉ 三角測量 (題號 153～172)

1. 測量問題常用的名詞

(1) 鉛垂線：將線之一端固定，他端繫一鉛錘，使其自由下垂，則與此線方向相同之直線稱為鉛垂線。

(2) 鉛垂面：通過鉛垂線之平面稱為鉛垂面。

(3) 鉛垂角：在鉛垂面內之夾角稱為鉛垂角。

(4) 水平線：垂直於鉛垂線之直線，稱為水平線。

(5) 水平面：垂直於鉛垂線之平面，稱為水平面。

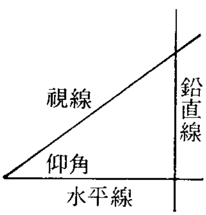
(6) 水平角：在水平面內之角，稱為水平角。

(7) 視　線：觀測目與目的物之連接直線，稱為視線。

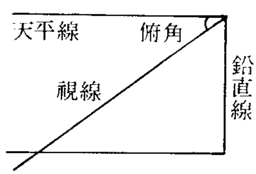
(8) 仰　角：仰觀物體，視線與觀測目之水平線所成之鉛垂角，稱為仰角。

(9) 距　離：自一點至過另一點之鉛垂線之距離，稱為水平距離，自一點至過另一點之水平面之距離，稱為鉛垂距離。

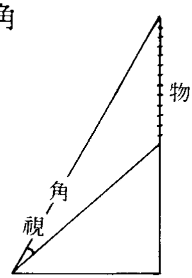
❶ 仰角



❷ 俯角



❸ 視角



2. 測量問題之解法

(1) 作一簡圖，對已知量以數字標出，未知量以文字標出。

(2) 找三角形以建立方程式

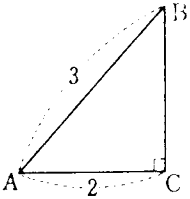
① 若找到直角 △→ 利用三角函數之定義解題。

② 若找到任意 △→ 利用正弦或餘弦定律解題。

(3) 解方程式求未知量，不合者棄之。

1 Ⅱ 二 ★

求圖中直角三角形之 $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ 之值。



【詳解】 根據畢氏定理

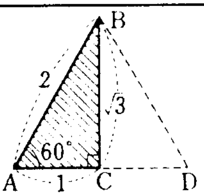
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos A=\frac{2}{3},\ \sin B=\frac{2}{3}$$

$$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan B=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

2 Ⅱ 二 ★

利用右圖求 $\tan 60^\circ$ 之值。



【詳解】 自正三角形ABD之頂點B，至對邊$\overline{AD}$做一垂線$\overline{BC}$

設$\overline{AC}$長爲 1, $\overline{AB}$長爲 2

$$\therefore\quad \overline{BC}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

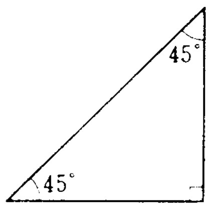
$$\therefore\quad \tan 60^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

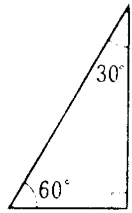
3 Ⅱ 二 ★

參考直角三角形的圖形，

求 30°, 45° 及 60° 角的

正弦、餘弦及正切值。





【詳解】

	30°	45°	60°
正 弦	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
餘 弦	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
正 切	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

4 Ⅱ 二 ★

求下列各值：

(1) $10\cos60° - 6\sin30° + \tan45°$

(2) $\sin60°\cos30° - \tan30°$

(3) $\sin60°\tan30° + \cos60°\sin30°$

【詳解】 (1) 原式 $= 10 \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{1}{2} + 1 = 3$

(2) 原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{9-4\sqrt{3}}{12}$

(3) 原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

注 意　特別角的三角函數值最好加以熟記。

5 Ⅱ 二 ★

由三角函數表，求下列各角的正弦值：

$7^\circ, 18^\circ, 32^\circ, 50^\circ, 72^\circ, 87^\circ$

【詳解】

$\sin 7^\circ = 0.1219$　　$\sin 18^\circ = 0.3090$

$\sin 32^\circ = 0.5299$　　$\sin 50^\circ = 0.7660$

$\sin 72^\circ = 0.9511$　　$\sin 87^\circ = 0.9986$

6 Ⅱ 二 ★

由三角函數表，求下列各三角函數值：

$\cos 12^\circ, \cos 36^\circ, \cos 48^\circ, \cos 75^\circ, \cos 84^\circ$

$\tan 6^\circ, \tan 17^\circ, \tan 28^\circ, \tan 55^\circ, \tan 88^\circ$

【詳解】

$\cos 12^\circ = 0.9781$　　$\cos 36^\circ = 0.8090$

$\cos 48^\circ = 0.6691$　　$\cos 75^\circ = 0.2588$

$\cos 84^\circ = 0.1045$　　$\tan 6^\circ = 0.1051$

$\tan 17^\circ = 0.3057$　　$\tan 28^\circ = 0.5317$

$\tan 55^\circ = 1.4281$　　$\tan 88^\circ = 28.6363$

7 Ⅱ 二 ★

根據三角函數表，求下列$\angle A$的角度：

(1) $\sin A = 0.8480$　(2) $\cos A = 0.4226$

(3) $\sin A = 0.6947$　(4) $\cos A = 0.6691$

【詳解】 (1) $\angle A = 58°$

(2) $\angle A = 65°$

(3) $\angle A = 44°$

(4) $\angle A = 48°$

8 Ⅱ 二 ★

根據三角函數表，當 $\tan A$爲下列各值時，求$\angle A$的角度：

(1) 0.1763　(2) 0.5543

(3) 1.5399　(4) 9.5144

【詳解】 (1) $\angle A = 10°$

(2) $\angle A = 29°$

(3) $\angle A = 57°$

(4) $\angle A = 84°$

9 Ⅱ 二 ★

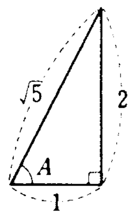
$\tan A = 2$ $(0^\circ < A < 90^\circ)$，求下列各式之值：

(1) $\sin^2 A - \cos^2 A$

(2) $\dfrac{1+\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

【詳解】 $\because$ $\tan A = 2$ $(0^\circ < A < 90^\circ)$

A爲右圖直角三角形的銳角



$\sin A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(1) $\sin^2 A - \cos^2 A$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

(2) $$\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sqrt{5}+2}{1} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

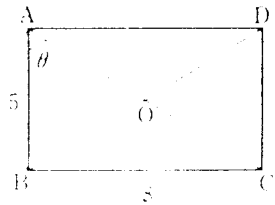
$$= \sqrt{5} + 2 + \frac{\sqrt{5}-2}{5-4}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

10 Ⅱ 二 ★

矩形 $ABCD$, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 8$，求此長方形的二個對角線所形成的銳角。

【詳解】 設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點爲 O, $\angle CAB = \theta$



$\tan\theta = \dfrac{8}{5} = 1.6$

$\theta \fallingdotseq 58^\circ$

$\therefore$ $\angle AOB = 180^\circ - 2\theta \fallingdotseq 64^\circ$

11 Ⅱ 二 ★

邊長爲 5，一角度爲 80° 的菱形，求其兩條對角線的長。

【詳解】 設菱形$ABCD$, $\overline{AB}=5$, $\angle B=80^\circ$

$\because \quad \overline{AC}\perp\overline{BD}$

設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點爲 O

$\because \quad \angle OBC=40^\circ$

$\therefore \quad \overline{AC}=2\cdot\overline{OC}$

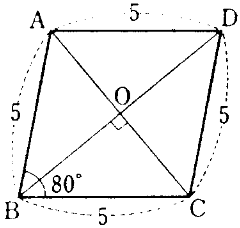
$=2\cdot 5\sin 40^\circ$

$=6.428$

$\overline{BD}=2\cdot\overline{OB}$

$=2\cdot 5\cos 40^\circ$

$=7.66$



12 Ⅱ 二 ★

等腰三角形ABC，底邊$\overline{BC}$長爲 18，底角爲 65°，求此三角形的高。

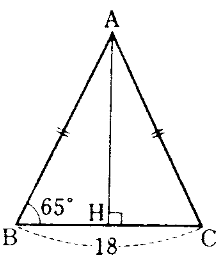
【詳解】 設H爲$\overline{BC}$之中點

$\therefore \quad \overline{BH}=9$

又 $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\tan 65^\circ$

$\therefore \quad \overline{AH}=9\times 2.1445$

$=19.3005$



13 Ⅱ 二 ★

底邊爲 20*cm*，高爲 18*cm* 的等腰三角形，求其底角的角度。

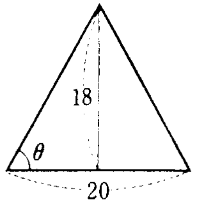
【詳解】 設底角爲 θ

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{18}{10} = 1.8$

$\because \quad \tan 60^\circ = 1.7321$

$\quad\quad \tan 61^\circ = 1.8040$

$\therefore \quad \theta \doteqdot 61^\circ$



14 Ⅱ 二 ★★

直角三角形ABC，從其直角的頂點A至斜邊$\overline{BC}$做一垂線$\overline{AD}$。

(1) 邊$\overline{BC}$長爲 a， $\angle B$爲 θ，請以 a 與 θ 來表示線段$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$與$\overline{CD}$之長

(2) 利用(1)的結果，

證明 下列關係：

$\overline{AD}^2 = \overline{BD}\cdot\overline{CD}$, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}\cdot\overline{BD}$

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}\cdot\overline{CD}$

【詳解】 (1) $\overline{AB} = a\cos\theta$

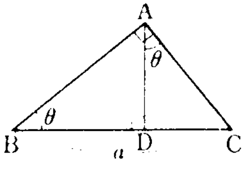
$\overline{AC} = a\sin\theta$

$\overline{AD} = \overline{AB}\sin\theta = a\cos\theta\sin\theta$

$\overline{BD} = \overline{AB}\cos\theta = a\cos^2\theta$

$\because \quad \angle CAD = \theta$

$\therefore \quad \overline{CD} = \overline{AC}\sin\theta = a\sin^2\theta$



【證明】 (2) $\overline{AD}^2=a^2\cos^2\theta\sin^2\theta=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$

$\overline{AB}^2=a^2\cos^2\theta=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$

$\overline{AC}^2=a^2\sin^2\theta=\overline{BC}\cdot\overline{CD}$

15 Ⅱ 二 ★★

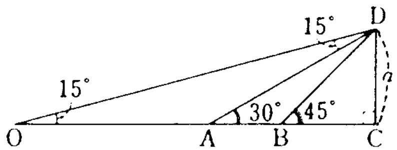
依右圖，回答下列問題：

(1) 以 a 表 $\overline{AC}, \overline{OA}, \overline{OB}$。

(2) 利用 $\triangle OBD \backsim \triangle DBA$，

將 $\overline{OD}$ 的長度以 a 表示之。

(3) 求 $\sin 15°$ 與 $\tan 15°$ 之值。



【詳解】 (1) $\overline{AC}=\dfrac{a}{\tan 30°}=\sqrt{3}a$

$\overline{OA}=\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+a^2}=2a$

$\overline{OB}=\overline{OC}-\overline{BC}=\overline{OA}+\overline{AC}-\overline{BC}$

$=2a+\sqrt{3}a-a=(1+\sqrt{3})a$

(2) $\because$ $\angle BOC=15°=45°-30°=\angle BDA$

$\angle OBD=180°-45°=\angle DBA$

$\Rightarrow$ $\triangle OBD \backsim \triangle DBA$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{DA}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{DB}}$

$\therefore$ $\overline{OD}=\dfrac{\overline{DA}\cdot\overline{OB}}{\overline{DB}}$

$=\dfrac{2a\cdot(\sqrt{3}+1)a}{\sqrt{2}a}$

$=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)a$

(3) $\sin 15^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

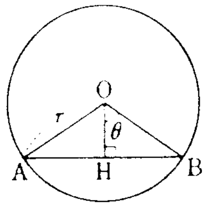
$\tan 15^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

16 Ⅱ 二 ★

一半徑爲 r 的圓 O，中心角 $\angle AOB$ 爲 2θ, θ 爲銳角，請以 r, θ 表下列各值：

(1) 弦 $\overline{AB}$ 之長。

(2) 由 O 至 $\overline{AB}$ 做一垂線 $\overline{OH}$，求 $\overline{OH}$ 之長。



【詳解】 (1) $\overline{AB} = 2\overline{BH}$

$= 2r\sin\theta$

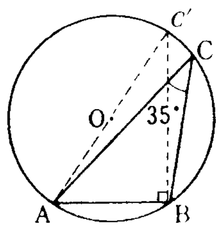
(2) $\overline{OH} = r\cos\theta$

17 Ⅱ 二 ★★

半徑爲 8 的圓 O，如右圖所示，其圓周上有三點 A, B, C。若 $\angle ACB = 35^\circ$，求弦 $\overline{PA}$ 的長。必要時可利用下列各值，求到小數第一位即可。

$\sin 35^\circ = 0.57$　　$\cos 35^\circ = 0.82$

$\tan 35^\circ = 0.70$



【詳解】 設通過 A 的直徑之另一端爲 C'

根據圓周角的定理，$\angle AC'B = 35^\circ$

∵ $\overline{AC'}$ 爲直徑