

# 齿轮传动的 刚度分析和修形方法

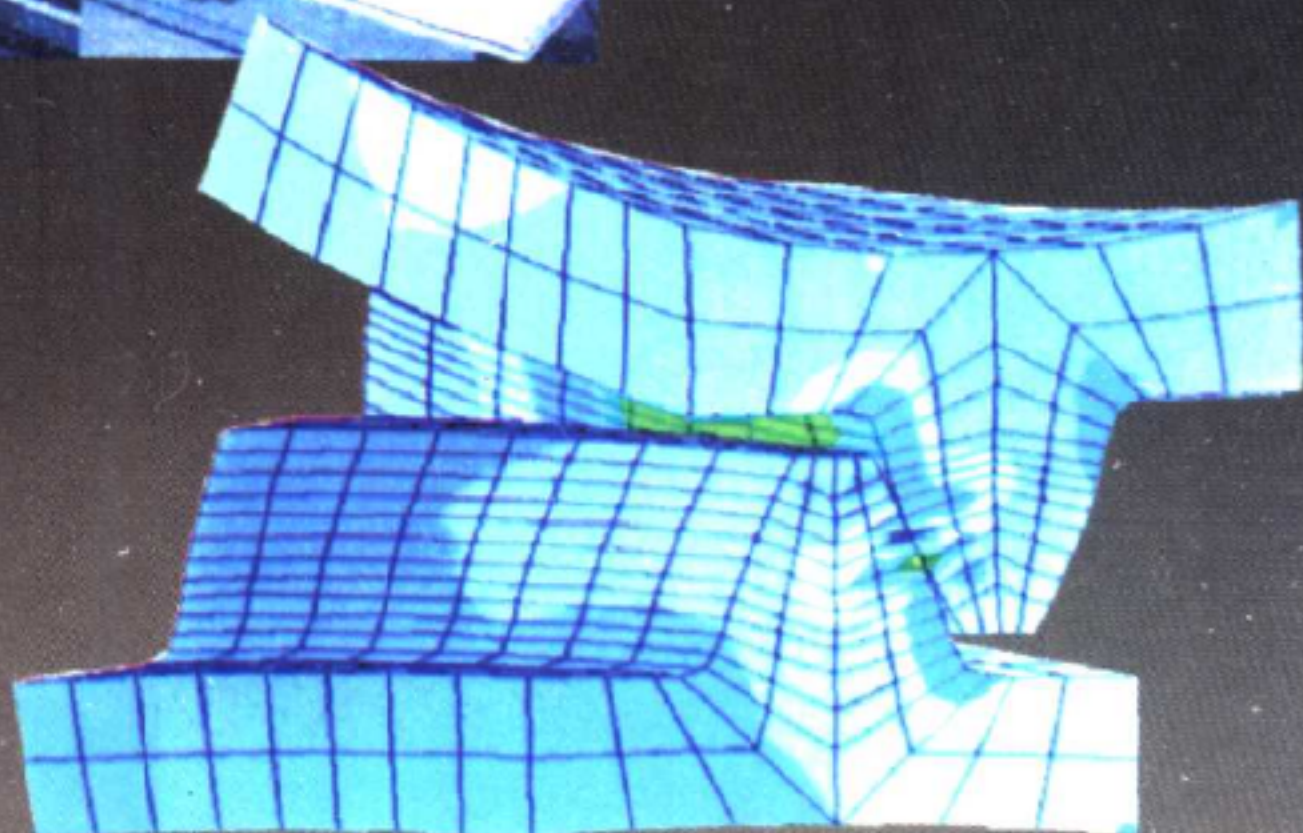
李润方 编著

CHILUN  
CHUANDONG  
DE  
GANGDU  
JIEXI  
JIE  
XIUXING  
FANGFA

重庆大学出版社



封面设计 莫 克



ISBN 7-5624-1847-0



9 787562 418474 >

ISBN7-5624-1847-0/TH · 73

定价：15.00 元



国家“九五”重点图书  
《机械传动技术丛书》

# 齿轮传动的刚度分析和修形方法

李润方 编著

国家自然科学基金资助项目

重庆大学出版社

## 内 容 简 介

本书是以我们十多年来的研究成果为基础,并引用了近年来国内外齿轮界的有关研究成果,全面分析了圆柱齿轮和锥齿轮的弹性接触应力应变、弹塑性接触应力应变、轮齿弹性变形和热弹变形以及圆柱齿轮修形方法等方面的问题,是系统论述圆柱齿轮和锥齿轮弹性啮合数值方法及其应用的一本专著,可供研究人员使用,也可以作机械工程有关专业高年级学生和研究生的教材或齿轮界工程师的重要参考书。按照本书所述方法,可以根据生产要求对齿轮传动的承载能力、啮合特性、轮齿变形以及修形降噪等重要问题进行分析计算。

本书包括圆柱齿轮弯曲应力应变分析解析法、轮齿接触应力应变分析解析法、轮齿应力应变数值分析、齿轮二维啮合性能有限元分析、齿轮三维弹性啮合性能有限元分析以及圆柱齿轮齿向修形和齿高修形等。

### 齿轮传动的刚度分析和修形方法

李润方 编著

责任编辑 李淑芳

\*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆建筑大学印刷厂印刷

\*

开本:850×1168 1/32 印张:9.5 字数:255 千

1998年10月第1版 1998年10月第1次印刷

印数:1—1500

ISBN 7-5624-1847-0/TH·73 定价:15.00 元

## 出版说明

机械传动国家重点实验室建室以来坚持了应用基础研究的正确方向,致力于解决机械传动中的关键科学技术问题,在若干主要方面取得了突出进展,成果显著。1993~1997年共获部省级科技进步奖15项,承担国家级课题19项、部省级课题25项,在国内外共发表论文314篇,1997年通过了国家计委、国家科委委托国家自然科学基金委员会组织的全国性评估。与此同时,重庆大学机械工程学科的有关专业也取得了丰硕的成果。《机械传动技术丛书》是以这些科研成果为基础,同时又引用了国内外齿轮界的有关研究成果,由有关专业的教授、专家分别编写组集而成的。

《机械传动技术丛书》编委会对组成这套书的书目进行了认真审查;各书的编撰工作由编写者负责,并享有相应的知识产权。重庆大学出版社负责组织专家审稿及编辑出版工作。

本套丛书系国家“九五”重点图书,其中有些书涉及的有关研究工作得到国家自然科学基金委员会的资助。

重庆大学出版社全力支持本套丛书的出版。从选题申请、确定书目、组织稿件到编辑出版都付出了辛勤劳动。出版社在资金上给予支持,组织编印发力量,切实保证丛书的质量。在此谨致以衷心感谢。

本套丛书中的各册将陆续出版。在有关书籍中将分别介绍当代机械传动原理、结构、设计理论与方法、制造工艺以及故障诊断与测试技术等。

由于本套丛书涉及面广,限于作者的水平,难免会有不妥甚至错误,谨请批评指正。

《机械传动技术丛书》编委会副主任委员  
机械传动国家重点实验室学术委员会副主任 李润方

1998年7月

# 前 言

齿轮传动由于其恒功率传动的特点,具有其他传动不可替代的优势,其高质量、高性能研究是我国能源、交通、化工、冶金领域重大共性关键技术问题。我国汽车、摩托车、工程机械、火车机车的传动系统均广泛采用齿轮传动。我国齿轮行业近年来有很大发展,年产值已达(140~175)亿元。该行业职工人数居世界第一,但劳动生产率低,自主开发能力弱,产品动态性能差。我国齿轮行业 82 个主要企业的全员平均劳动生产率为 2.25 万元/年,仅为美国 1989 年行业平均水平的 3%~5%,也低于我国汽车、机械行业平均劳动生产率 4.56 万元/年的水平。特别突出的是,国产齿轮精度等级平均比国际先进水平低 1~2 级,噪声高 10dB。为此不得不花费大量外汇引进齿轮传动装置,如我们曾经参加过的引进技术消化吸收项目就有美国卡特彼勒公司的装载机主传动系统,德国利勃海尔公司的 50t、80t 汽车起重机的驱动桥和分动箱,美国 P&H 公司的 16m<sup>3</sup> 挖掘机等。

产品开发能力弱的根本原因是设计理论和设计方法落后,具体体现为:(1)由于使用被动的设计方法,不可能在设计阶段进行产品质量预报和控制;(2)静态的设计分析不能提供全工况、高性能的产品;(3)学科分割的零部件分析设计无法实现整体目标。

我们首先在国内对齿轮传动采用主动设计、动态设计、综合设计、计算机辅助设计的新方法。主持过有关三峡升船机齿轮箱关键技术研究、装载机主传动引进技术国产化研究、80t 汽车起重机驱动桥、分动箱研究等“八五”课题,已经全部完成,取得成果,有的已通过机械工业部主持的鉴定。主持过 3 项有关齿轮传动的国家自然科学基金项目。本书以作者多年来的有关科研成果为基础(其中

4项获部省级科技进步奖),对齿轮传动的刚度分析和修形方法进行全面论述。

齿轮系统是一个复杂的弹性机械系统,其振动噪声的分析涉及到参数激励-非线性系统理论以及间隙非线性动力学研究,其刚度具有时变特性。有关齿轮系统动力学的问题可以参看笔者和王建军编著的《齿轮系统动力学——振动·冲击·噪声》(北京:科学出版社,1997)。本书有关刚度分析是齿轮系统动力学的理论基础之一。但本书还不涉及齿轮系统的动态激励、振动分析、动态特性以及噪声控制等问题。

本书的主要特色表现在:

1. 突破了传统的刚体啮合理论的限制,以弹性啮合数值方法为基础,全面分析齿轮传动的时变刚度以及承载啮合性能,既有解析法,又重点突出数值方法。

2. 注重高新技术在齿轮传动中的应用,特别是信息学、工程数值方法、计算机软件技术等现代设计方法的应用。

3. 注重理论联系实际,既有系统的理论分析,又对提高齿轮承载啮合性能中的关键技术——修形方法(包括齿向修形和齿高修形)进行分析。

4. 注重机械系统设计及其应用,不单研究关键零件的刚度,而且把齿轮传动作为多个零件形成的系统,研究其二维和三维的弹性啮合性能。

5. 注重贯彻科学技术面向经济建设的方针,反映了作者主持过的国家“八五”科技攻关课题、国家“八五”企业重大技术改造项目课题、国家“八五”重大引进技术消化吸收项目课题中所取得的成果。

本书涉及内容较多,面比较广,由于作者的学术水平有限,难免会有错误或不妥之处,谨请批评指正。

参加本书所涉及的科研工作并为本书提供资料的有黄昌华、王建军、丁玉成、陈晓南、陈大良、汤庆平、黎豫生、林腾蛟等。本书还引用了国内外齿轮界的有关研究成果,除已在引用处注明外并



在参考文献中列出。

本书承国内知名齿轮专家、东北大学鄂中凯教授认真审阅,特致以衷心感谢。

本书系国家自然科学基金资助项目。

李润方

1998年3月

# 目 录

<b>第一章 圆柱齿轮弯曲应力应变分析解析法 .....</b>	<b>1</b>
1.1 轮齿弯曲应力变形计算方法概述 .....	3
1.1.1 材料力学计算方法 .....	4
1.1.2 弹性力学分析方法 .....	11
1.2 轮齿弯曲的悬臂板模型 .....	21
1.2.1 肱梁计算模型 .....	21
1.2.2 无限长悬臂板计算模型 .....	29
1.2.3 轮齿弯矩镜像分析法 .....	41
<b>第二章 轮齿接触应力应变分析解析法 .....</b>	<b>50</b>
2.1 弹性力学轴对称问题的解 .....	51
2.1.1 平衡微分方程 .....	51
2.1.2 位势函数及拉甫位移函数 .....	52
2.2 两弹性球体之间的接触 .....	54
2.2.1 集中力作用下的半无限解 .....	54
2.2.2 均布力作用下的半无限解 .....	56
2.2.3 球体接触时的解 .....	57
2.2.4 公式的应用 .....	59
2.3 两弹性圆柱体之间的接触 .....	61
2.3.1 任意形状弹性体之间的接触 .....	61
2.3.2 半椭球面分布压力下的解 .....	62
2.3.3 两弹性圆柱体接触问题的解 .....	67
2.4 应力应变分析解析法小结 .....	70
2.4.1 解析法存在的主要问题 .....	70



2.4.2	改善计算结果的主要途径 .....	73
2.4.3	齿轮承载能力国际标准修订动态 .....	75
<b>第三章</b>	<b>应力应变分析数值方法 .....</b>	<b>78</b>
3.1	有限元法 .....	79
3.1.1	有限元位移法的基本公式 .....	79
3.1.2	有限元法的求解步骤 .....	84
3.2	边界元法 .....	87
3.2.1	边界元法基本概念 .....	87
3.2.2	边界元法基本公式 .....	89
<b>第四章</b>	<b>轮齿应力应变数值分析 .....</b>	<b>98</b>
4.1	轮齿弹性应力应变数值分析 .....	98
4.1.1	轮齿弯曲应力分析 .....	98
4.1.2	轮齿三维应力应变分析 .....	104
4.1.3	组合有限元分析和边界元分析 .....	116
4.2	齿轮热弹变形有限元分析 .....	124
4.2.1	概述 .....	124
4.2.2	数学模型 .....	126
4.2.3	有限元格式 .....	128
4.2.4	对流换热系数和输入摩擦热 .....	130
4.2.5	实例分析 .....	133
<b>第五章</b>	<b>齿轮二维啮合性能有限元分析 .....</b>	<b>140</b>
5.1	弹性接触有限元分析方法 .....	140
5.1.1	概述 .....	140
5.1.2	间隙单元法 .....	143
5.1.3	有限元混合法 .....	147
5.2	齿轮二维啮合性能分析 .....	153
5.2.1	齿轮二维弹性接触数值分析 .....	153
5.2.2	齿轮二维耦合热弹性接触数值分析 .....	164
5.2.3	齿轮二维弹塑性接触数值分析 .....	170

<b>第六章 齿轮三维弹性啮合性能有限元分析 .....</b>	<b>183</b>
6.1 圆柱齿轮三维弹性啮合性能分析 .....	183
6.1.1 用接触有限元混合法分析斜齿轮 .....	183
6.1.2 用接触问题有限元-线性规划法分析斜齿轮 .....	196
6.1.3 完整齿轮副的三维接触有限元分析 .....	200
6.2 螺旋锥齿轮三维接触应力应变分析 .....	203
6.2.1 齿间载荷分配的柔度矩阵法 .....	204
6.2.2 接触离散化模型自动生成算法 .....	209
6.2.3 接触应力应变分析 .....	217
<b>第七章 圆柱齿轮齿向修形 .....</b>	<b>221</b>
7.1 齿向载荷分布 .....	222
7.1.1 载荷分布系数 .....	222
7.1.2 啮合齿向误差影响因素 .....	232
7.2 齿向修形 .....	243
7.2.1 直齿轮齿向修形 .....	243
7.2.2 斜齿轮齿向修形 .....	249
<b>第八章 圆柱齿轮齿高修形 .....</b>	<b>262</b>
8.1 齿高修形原理 .....	262
8.1.1 啮合传动特性 .....	262
8.1.2 齿高修形基础 .....	265
8.2 齿廓修形工艺方法 .....	268
8.2.1 工艺方法概述 .....	268
8.2.2 中凸齿形成形磨削 .....	270
8.3 齿高修形应用实例 .....	274
8.3.1 以减振降噪为目的的齿高修形 .....	274
8.3.2 以提高抗胶合能力为目的的齿高修形 .....	282
<b>参考文献 .....</b>	<b>287</b>



# 第一章 圆柱齿轮弯曲应力应变 分析解析法

齿轮副在啮合过程中由于轮齿受载而产生弹性变形，在齿轮

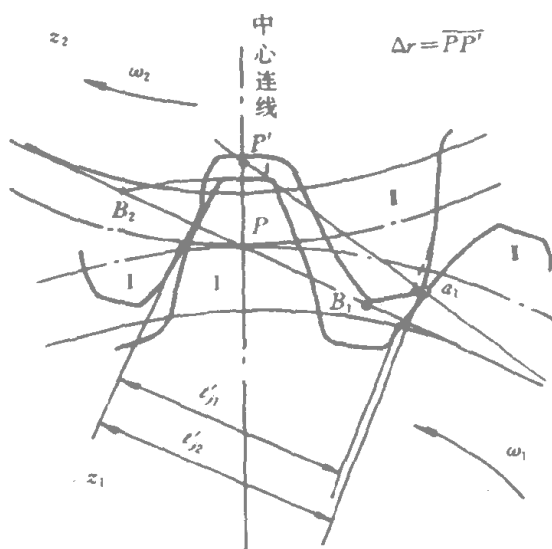


图 1.1

副运转过程中 单齿对啮合和双齿对啮合交替进行 由于受载弹性变形以及热变形和加工误差在交替点处将会产生干涉现象，引起齿轮副的啮入、啮出冲击 这是齿轮运转过程中产生冲击、振动和噪声的主要原因之一。因此齿轮轮齿弹性变形和综合刚度随啮合位置变化规律的分析是研究齿轮修形，确定齿轮动态特性的重要基础工作。<sup>[2]</sup>

圆柱齿轮副啮合传动的特点可以由图 1.1 看出：

如果由于加工误差及热弹变形而使被动齿轮的实际基节  $t'_{j2}$  大于主动齿轮的实际基节  $t'_{j1}$  这时 齿对 II 便不会在理论啮合线的始点  $B_1$  进入啮合。由于  $t'_{j2} > t'_{j1}$  所以齿对 II 实际上是在啮合线之外的  $a_1$  点便进入啮合，这样被动齿轮的齿顶棱边便会撞击在主动齿轮的轮齿根部，然后就像刀刃一样在主动齿轮的根部刮行，一直刮行到正常啮合始点  $B_1$  为止。这样啮合点的公法线与轴心连线便不再交于节点  $P$  而是交于另外一点  $P'$  这时实际传动比便会比理论传动比小，即被动齿轮角速度增大。这一过程称为啮入冲击或称边缘冲击。由于顶刃刮行便会出现噪声，由于速度波动便会使运转不平稳，使齿轮动态特性恶化。

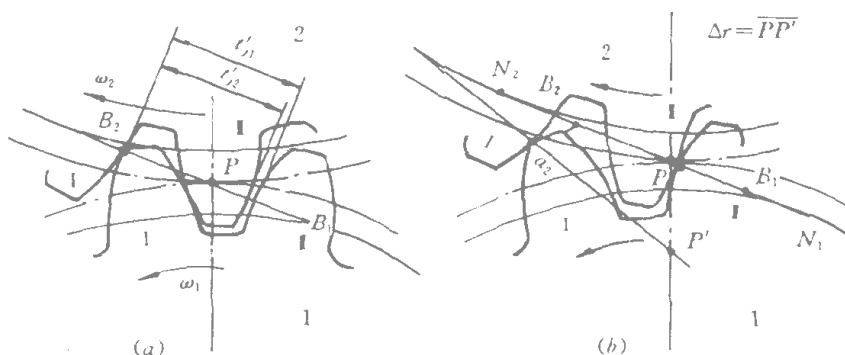


图 1.2

另一方面，当加工误差和热弹变形使主动齿轮的实际基节大于被动齿轮的实际基节时(图 1.2) 这时齿对 I 不会在理论啮合终点  $B_2$  处脱开 因为  $t'_{j1} > t'_{j2}$  使齿对 I 之间仍然存在间隙，不能正常进入啮合。所以齿对 I 继续保持接触，主动齿轮的齿顶棱边在被动齿轮的根部齿面刮行，直到齿对 II 进入啮合为止。这时齿对 II 的两齿在各自的中部齿面发生撞击，齿对 I 的接触点的公法线也不和轴心连线交于点  $P$  而交于点  $P'$ ，这时的实际传动比便大于理论传动比，被动齿轮转速降低，这种情况称为啮出冲击。这时刮行



与冲击发生在两对齿上，且刮行先于冲击。

齿轮传动时的啮入冲击和啮出冲击及相应的顶刃刮行是产生齿轮噪声及动载荷的主要原因之一。更为严重的是顶刃刮行还会破坏润滑油膜，使齿面金属直接接触，在高温下会加速齿面的胶合失效。

因此不仅要對齿轮进行应力分析，而且要认真地分析齿轮的变形。

## 1.1 轮齿弯曲应力变形计算方法概述

齿轮受載后发生的表面和整体变形，将直接影响齿间载荷分配和动态性能。齿轮的变形包括在齿面接触区的接触变形和整体的弯曲变形以及剪切变形等。为了简化计算，在分析齿轮变形时通常不考虑载荷沿接触线的非均匀分布，也暂不考虑安装制造误差及动载荷，这些因素的影响将分别在载荷分布系数和动载系数中加以考虑。

目前，关于齿轮轮齿的弯曲应力和变形计算大致有三种方法，即材料力学方法、弹性力学方法和数值方法。

引入各类齿轮标准的是经典的材料力学计算方法，其弯曲变形和应力是基于 1893 年 W. Lewis 提出的悬臂梁理论。这类模型严格说来是比较粗糙的，光弹试验早已证明把轮齿简化为悬臂梁是不恰当的。因为其长宽比通常仅为 1.43 远小于材料力学中杆件的长宽比必须大于等于 5 的假设。1950 年 T. J. Jaramillo 提出了关于无限长悬臂板在集中载荷作用下变形和弯矩的解析解，这是应用弹性理论求解轮齿弯曲变形方面的重要理论成果，开始日益广泛地应用于齿轮变形分析，引起了齿轮界的重视。但这种方法仍无法描述轮齿复杂的几何形状、受载状况及边界条件，近年来日本寺内喜男提出数学弹性力学方法，利用保角映射把轮齿的曲线边界变换为半平面直线边界，再应用集中力作用在半平面边界上的位移解求出平面位移场，从而确定轮齿变形和应力。然而这种方

法虽然在形状的描述上更加接近实际，但在载荷工况及边界条件的处理上仍和实际情况有较大差别。

和传统的解析法相比，采用数值方法分析轮齿变形，可以处理复杂的边界条件及多种实际工况，能够求得更加接近实际情况的位移场，从而详细地描述其变形分布及综合刚度，为工程应用提供大量的重要数据。和实验方法相比较，数值方法可以大幅度地降低费用，还可以得到不少无法实测的数据。当然数值方法所得结果应该用实验方法进行必要的验证，并用已有解析解的考题进行考核。因此全面地分析轮齿变形必须把解析法、数值法和实验方法结合起来。本节首先讨论材料力学方法，然后引述弹性力学方法，关于数值方法将在以后章节专门讨论。

### 1.1.1 材料力学计算方法<sup>[1]</sup>

#### (1) 变截面悬臂梁模型

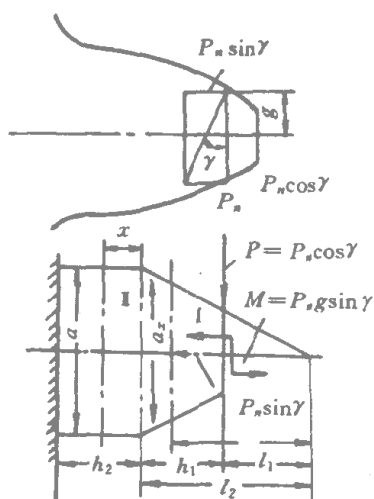


图 1.3

为了直接应用材料力学公式来计算轮齿弯曲变形，通常把轮齿简化为变截面梁。例如把轮齿简化成为和齿形近似的由梯形和矩形组合而成的变截面梁 如图 1.3 所示。<sup>[1]</sup>

根据卡氏定理，其弯曲变形为

$$\delta_u = \int \frac{M(x)dx}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} \quad (1.1.a)$$

式中  $M(x)$ ——沿  $x$  的弯矩；

$I$ ——截面惯性矩；

$E$ ——齿轮材料的弹性模量；

$P$ ——外载荷。



设载荷作用在齿顶，并按如图 1.3 所示尺寸代入式 (1.1.a)，最后可得

$$\delta_{u1} = \frac{12P_n \cos \gamma}{Ea^3} \left\{ l_2^3 \left[ \ln \frac{l_2}{l_1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} \left( 4 - \frac{l_1}{l_2} \right) \right] - l_2^3 \operatorname{tg} \gamma \left[ \frac{1}{2l_1} - \frac{1}{l_2} \left( 1 - \frac{l_1}{2l_2} \right) \right] + \left( h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 + \frac{h_2^3}{3} \right) - g \operatorname{tg} \gamma \left( h_1 h_2 + \frac{h_2^2}{2} \right) \right\} \quad (1-1)$$

式中  $P_n$ ——轮齿单位齿宽上的法向载荷；

$\gamma$ ——齿顶载荷作用方向角。

如设载荷作用于齿面节点，则可把节点以下截面简化为梯形齿，则其弯曲变形为

$$\delta_{u2} = \frac{3}{4} \left\{ \left[ 1 - \left( 2 - \frac{S_0}{S_f} \right)^2 + 2 \lg \frac{S_f}{S_0} \right] \operatorname{ctg}^3 \theta - 4 \left( \frac{a_0}{S_f} \right)^2 \operatorname{tg} \theta \right\} \frac{P_n}{E} \quad (1-2)$$

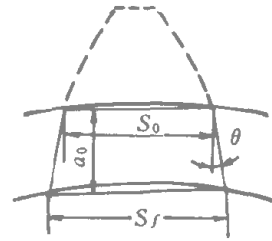


图 1.4

轮齿的剪切变形为

$$\delta_s = \int \frac{kP}{GF} dx \quad (1.1.b)$$

式中  $k$ ——截面系数 对矩形截面  $k=1.2$ ；

$F$ ——截面积；

$G$ ——剪切弹性模量。

当载荷作用在齿顶时

$$\delta_{s1} = \frac{kP_n \cos \gamma}{Ga} \left( l_2 \ln \frac{l_2}{l_1} + h_2 \right)$$

当载荷作用在节点时

$$\delta_{s2} = \frac{6(1+\mu)}{5} \lg \frac{S_f}{S_0} \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{P_n}{E}$$

(1-3)

由式 (1-1) 和式 (1-3) 可见 轮齿变形和模数无关 而和载荷成正比，同时随压力角及齿数而改变。

(2) 弯曲应力计算公式