

高等学校通信教材

gaodeng xuexiao tongxin jiaocai

© 柯亨玉 编著

DIANCICHANG
LILUN

电磁场 理论

 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等学校通信教材

电磁场理论

柯亨玉 编著

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论/柯亨玉编著. —北京:人民邮电出版社,2004.8

高等学校通信教材

ISBN 7-115-12065-X

I. 电... II. 柯... III. 电磁场—理论—高等学校—教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 050286 号

内 容 提 要

本书系统地介绍电磁场的基本理论及应用。内容包括电磁场理论的数学基础、宏观电磁场的实验定律和 Maxwell 方程组、静态电磁场问题及其求解方法、时变电磁场问题及其求解方法、电磁波的辐射与天线概念、电磁波的传播和导行。此外,为了使读者对电磁波的应用有所了解,在介绍电磁场和电磁波理论的同时,还分别介绍无线电波的频谱结构及其应用特点、雷达的基本原理与应用、卫星定位系统(GPS)技术理论基础和光纤等内容。

本书可作为高等学校电子与通信类专业的教材,也可作为从事相关领域科技人员的参考书。

高等学校通信教材

电磁场理论

-
- ◆ 编 著 柯亨玉
责任编辑 滑 玉
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
读者热线 010-67129259
北京汉魂图文设计有限公司制作
北京朝阳展望印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所经销
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 13.5
字数: 321 千字 2004 年 8 月第 1 版
印数: 1-5 000 册 2004 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-115-12065-X/TP · 3826

定价: 18.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010) 67129223

编者的话

自 1873 年 J. C. Maxwell 建立电磁场普遍运动规律并预言电磁波存在以来, 电磁场理论及其应用受到了物理学研究者广泛而深入的研究, 这些研究对 20 世纪物理学的几个重大理论体系 (相对论理论、量子理论等) 的建立起了重大作用。与此同时, 电磁场和电磁波作为能量的一种存在形式、信息传输的重要载体和探求未知物质世界的重要手段, 在通信、广播、电视、雷达、导航、能源、遥控、环境监测、天气与灾害预报等领域中得到了广泛应用, 使得电磁场理论成为众多交叉学科领域及新技术的理论基础和重要的发源地。另一方面, 交叉学科和新技术的开拓不断给电磁场理论提出新的研究课题, 这极大地丰富和发展了电磁场理论。

鉴于电磁场理论在电子与通信技术领域的重要性, 世界各国高等学校的电子与信息技术类专业一直将其作为一门必修的基础课程。对于电子与信息技术类大学本科专业学生而言, 电磁场理论无疑是理论性最强、逻辑性最严密、数学工具应用最多、概念最抽象、涉及应用领域最广的课程之一。本书可作为高等学校电子与通信类专业的教材, 亦可作为从事相关领域科技人员的参考书。

本书的主要内容安排如下。

1. 由于电磁场理论涉及大量的矢量和场论的数学知识, 为方便读者查阅和满足没有系统学习矢量分析和场论读者的需要, 作为全书的数学基础, 在第 1 章中对矢量分析和场论作了简要的介绍。

2. 在第 2 章集中介绍了宏观电磁场的基本实验现象和基本的理论体系, 目的在于使读者对宏观电磁场有一个整体的理解。

3. 由于静态电磁场满足同一类型的数学方程, 为避免重复, 并使读者对静态电磁场问题有系统的理解, 在本书的第 3 章中, 重点介绍静态电磁场的基本理论和基本问题, 包括静电场、恒定电流的电场和磁场及其基本问题。而在第 4 章中集中介绍静态电磁场问题的求解方法。

4. 在第 5 章中, 首先系统地讨论了时变电磁场的基本问题、求解的方法和面临的困难。通过时-频 (Fourier) 变换, 阐述了时变电磁场向时谐电磁场的过渡, 力求使读者对时变电磁场问题有较全面的理解。

5. 第 6、第 7 和第 8 章主要讨论电磁波的辐射、传播和传输问题。在阐述基本理论和基本概念的同时, 分别介绍了电磁波在若干新技术领域的应用, 如相控阵天线、雷达、卫星定位系统 (GPS)、卫星通信、潜艇通信、光纤通信等的基本原理和概念。目的是让读者了解电磁波在科学技术进步中的作用。为使读者对电磁波的应用有比较全面的了解, 还介绍了电磁波频谱结构及其应用的特点。

6. 本书内容力求在全面和系统的前提下, 突出时变电磁场。考虑到不同教学计划的需要, 目录中标注有 * 的章或节, 属于选择讲授内容, 以适应不同教学计划的要求。

7. 本教材的教学辅导材料和电子教案可登录武汉大学精品课程网站 (<http://jpkc>。

whu.edu.cn)和人民邮电出版社的网站(www.ptpress.com.cn→下载区)下载。

作者在武汉大学多年从事电磁场理论的科研和教学,深感一本好的教材对于学生学好电磁场理论是非常重要的。一本好的电磁场理论教材应该有完整的理论体系而且能与其新发展和新实践相兼容,并引导学生尽快进入科学技术发展的前沿;概念的清楚、定义的准确而又不是概念和定义公式的堆积,并能有效拓展学生的独立思考能力;逻辑推理严密、数学推导精美简洁而不能舍本求末,并能很好地训练读者的思维方法以及应用数学提炼和解决问题的能力。此外还需要有好的练习题目,以巩固读者学习过的基本知识,提高他们综合应用知识的水平,开拓他们的智慧等等。由于作者的学术水平和知识结构所限,书中定有许多缺点和错误,欢迎广大读者与同行专家批评指正。

本书是在武汉大学电子信息学院教学改革计划和武汉大学教务部教材建设计划的支持下完成的,初稿前后历经两年,并在两届学生中讲授。武汉大学侯杰昌教授审阅了全部书稿,提出了许多修改意见和建议,田茂教授撰写了GPS技术的初稿,在此向他们表示衷心感谢。

作者于武昌珞珈山
2004年5月

目 录

第 1 章* 矢量分析与场论基础	1
1.1 正交曲线坐标系	1
1.1.1 正交曲线坐标	1
1.1.2 正交曲线坐标的变换	2
1.1.3 坐标系中的弧长	4
1.2 矢量及其运算	5
1.2.1 矢量的分量表示	5
1.2.2 矢量的代数运算	6
1.2.3 矢量的微分运算	7
1.3 标量场的梯度	8
1.3.1 场的概念	8
1.3.2 标量场的等值面	8
1.3.3 方向性导数	9
1.3.4 标量场的梯度	9
1.3.5 梯度运算的基本公式	10
1.3.6 正交曲线坐标系中梯度的表达式	11
1.4 矢量场的散度	11
1.4.1 矢量场与矢量线	11
1.4.2 矢量场的通量	12
1.4.3 矢量场的散度	13
1.4.4 体积分的 Gauss 定理	14
1.4.5 散度的有关公式	15
1.5 矢量场的旋度	15
1.5.1 矢量函数的环量	15
1.5.2 矢量场的旋度	16
1.5.3 面积分的 Stokes 定理	18
1.5.4 旋度的有关公式	19
1.6 矢量场的 Helmholtz 定理	19
1.6.1 Helmholtz 定理	19
1.6.2 δ 函数及其性质	20
1.6.3 Helmholtz 定理的证明	21
思考与练习	22
第 2 章 宏观电磁场的基本规律	24
2.1 电荷与电流	24

2.1.1	电荷与电荷密度	24
2.1.2	电流与电流密度	25
2.1.3	电荷守恒定律	25
2.2	Coulomb 定律与静电场	26
2.2.1	Coulomb 定律	26
2.2.2	电场强度	26
2.2.3	静电场的性质	27
2.2.4	静电场对电荷的作用力	28
2.3	Ampere 定律与恒定电流的磁场	29
2.3.1	Ampere 定律	29
2.3.2	Biot-Savart 定律与磁感应强度	29
2.3.3	磁场的基本性质	30
2.3.4	磁场对运动带电粒子的作用力	31
2.4	真空中的 Maxwell 方程组	32
2.4.1	Faraday 电磁感应定律	32
2.4.2	位移电流概念	32
2.4.3	真空中的 Maxwell 方程组	33
2.5	介质中的 Maxwell 方程	35
2.5.1	介质的基本概念	35
2.5.2	介质的极化	36
2.5.3	电位移矢量、介质中的 Gauss 定律	38
2.5.4	电介质的一般特性	38
2.5.5	磁化强度与磁化电流密度	39
2.5.6	介质中的 Biot-Savart 定律、磁场强度	41
2.5.7	传导电流	41
2.5.8	介质中的 Maxwell 方程组	42
2.6	电磁场的边界条件	43
2.6.1	边界上的电磁场问题	43
2.6.2	电磁场量的法向边界条件	43
2.6.3	电磁场量的切向边界条件	44
	思考与练习	45
第 3 章	静态电磁场	47
3.1	静电场及其方程	47
3.1.1	电位函数	47
3.1.2	静电场的边界条件	48
3.1.3	导体的边界条件	49
3.1.4	静电场的定解问题	50
3.1.5	静电场的能量和能量密度	51
3.1.6	带电体系的静电力	52

3.2*	导体系的电容	54
3.2.1	导体系的电位与电位系数	54
3.2.2	导体系的电容系数和感应系数	55
3.2.3	部分电容	56
3.3*	恒定电流的电场	57
3.3.1	导体中恒定电流与恒定电场	57
3.3.2	欧姆定律	58
3.3.3	电源及电动势	59
3.3.4	恒定电场的方程	59
3.4	恒定电流的磁场	60
3.4.1	恒定电流磁场的磁矢势	60
3.4.2	小电流环(磁偶极子)的磁场	61
3.4.3	恒定电流磁场的标量磁位	62
3.5	电感与磁场的能量	64
3.5.1	自电感与互电感	64
3.5.2*	自感系数的计算	65
3.5.3	磁场的能量	66
	思考与练习	67
第4章	静态电磁场的求解方法	70
4.1	静态电磁场的惟一性定理	70
4.1.1	静态电磁场的基本方程	70
4.1.2	惟一性定理	71
4.1.3	惟一性定理应用举例	72
4.2	Laplace 方程的分离变量方法	73
4.2.1	分离变量方法的思想	73
4.2.2	Laplace 方程的变量分离	75
4.3	Green 函数方法	80
4.3.1	Green 函数方法的基本思想	80
4.3.2	Poisson 方程的 Green 函数方法	81
4.3.3	Green 函数的对称性	84
4.3.4	Green 函数的物理模型	84
4.3.5	无界区域上的 Green 函数	85
4.4	镜像方法	86
4.4.1	镜像方法的基本思想	86
4.4.2	镜像方法在 Green 函数理论中的应用	88
4.5*	势函数的多极矩展开	90
4.5.1	小区域上的源在远区产生的场	90
4.5.2	电位函数多极矩展开	91
4.5.3	电多极矩的意义	92

4.5.4	小电荷体系与外场的相互作用	94
4.5.5	磁多极矩	96
	思考与练习	97
第5章	时变电磁场	99
5.1	时变电磁场的势函数	99
5.1.1	波动方程	99
5.1.2	时变电磁场的势函数	100
5.1.3	势函数的规范	101
5.1.4	规范变换的不变性	102
5.2	推迟势	103
5.2.1	D'Alembert 方程的定解问题	103
5.2.2*	推迟势	103
5.2.3	推迟势的意义	105
5.3	时变电磁场的能量	105
5.3.1	Poynting 定理	105
5.3.2	电磁场能量的传播	106
5.4	时变电磁场的惟一性定理	108
5.4.1	时变电磁场的惟一性定理	108
5.4.2	惟一性定理的证明	108
5.5	时谐电磁场	109
5.5.1	时变电磁场的问题	109
5.5.2	谐变电磁场的复矢量表示	109
5.5.3	谐变电磁场 Maxwell 方程的复数表示	110
5.5.4	谐变电磁场的 Poynting 矢量	111
5.5.5	谐变电磁场的波动方程	112
5.5.6	任意时变电磁场的时谐展开	113
5.6	均匀平面电磁波	114
5.6.1	均匀平面电磁波方程	114
5.6.2	平面电磁波的基本特性	115
5.6.3	平面电磁波的极化	116
	思考与练习	118
第6章	电磁波的辐射	120
6.1	辐射场及其计算公式	120
6.1.1	电磁场的计算公式	120
6.1.2	电磁场的三个区域及其特点	121
6.1.3	磁矢势的多极矩展开	122
6.2	电偶极子天线	123
6.2.1	电偶极子天线结构	123
6.2.2	电偶极子天线的电磁场	124

6.2.3 辐射场及其特点	125
6.3 小电流环—磁偶极子天线	127
6.3.1 小电流环天线结构	127
6.3.2 小电流环的电磁场	127
6.3.3 辐射场及其特点	129
6.3.4 小电流环与磁偶极子等效	129
6.4* 天线的一般概念	130
6.4.1 半波长振子天线	130
6.4.2 天线的基本特性参数	131
6.4.3 互易性原理—天线有效截面积	133
6.5 广义 Maxwell 方程	134
6.5.1 Maxwell 方程组的对偶性质	134
6.5.2 广义 Maxwell 方程	135
6.5.3 广义 Maxwell 方程的对偶性	135
6.5.4 广义 Maxwell 方程的应用—缝隙天线	137
6.5.5 时变电磁场的镜像原理	138
6.6* 雷达(Radar)的基本概念	140
6.6.1 雷达的基本概念	140
6.6.2 最大探测距离和目标的距离测量	141
6.6.3 目标的方位与相控阵天线概念	141
6.6.4 目标运动速度的测量—Doppler 原理	143
6.6.5 雷达散射截面和雷达方程	144
6.7* 卫星定位技术简介	145
6.7.1 卫星定位技术的发展历史	145
6.7.2 GPS 卫星定位的基本原理	146
6.7.3 GPS 卫星的组成简介	147
思考与练习	149
第 7 章 电磁波传播理论基础	151
7.1 行波、驻波与波阻抗	151
7.1.1 电磁波的反射、行波驻波状态	151
7.1.2 等效波阻抗	154
7.1.3 应用举例	155
7.2 平面波对界面的斜入射	157
7.2.1 介质分界面上相位匹配原则	157
7.2.2 Fresnel 公式	158
7.2.3 全反射现象与表面电磁波	160
7.3 导电介质中电波传播	161
7.3.1 导电介质中自由电荷的分布	161
7.3.2 导电介质中的电磁波	162

7.3.3	良导体中的电磁波	164
7.3.4	电磁波在导体表面的反射	165
7.4	电磁波的速度与介质的色散	166
7.4.1	电磁波的速度	166
7.4.2	相速度	167
7.4.3	群速度	167
7.4.4	能量传播速度	169
7.4.5	色散现象	169
7.5	电磁波的衍射	170
7.5.1	Huygens-Fresnel 原理	170
7.5.2	辐射条件	171
7.5.3*	小孔衍射	172
7.6	各向异性介质中的电波传播	174
7.6.1	各向异性介质	174
7.6.2	磁化等离子体(电离层)的介电张量	175
7.6.3	电离层中的平面波	177
	思考与练习	179
第 8 章	导行电磁波的基本原理	181
8.1	电磁波的频谱	181
8.1.1	电磁波的频谱结构	181
8.1.2	不同频段电磁波传播的基本特点	182
8.2	导行电磁波的基本特性	183
8.2.1	导波系统的基本要求	183
8.2.2	导行电磁波满足的基本方程	183
8.2.3	导行波的横电磁波(TEM)模式	184
8.2.4	导行波的横电波(TE)和横磁波(TM)模式	186
8.3	同轴传输线	188
8.3.1	横电磁波的传输	188
8.3.2	同轴线内的电磁场	189
8.3.3	特性阻抗和传输功率	190
8.4	金属波导	191
8.4.1	波导产生的背景	191
8.4.2	矩形波导中的电磁波	191
8.4.3	截止频率	192
8.4.4	TE ₁₀ 模式场的分布特性	194
8.5*	圆柱形介质波导—光纤	196
8.5.1	圆柱形状介质波导	196
8.5.2	射线分析方法	196
8.5.3	光纤中场的方程	197

8.5.4 本征值方程	198
8.6* 电磁波的激发—谐振腔	199
8.6.1 从 LC 回路到谐振腔	199
8.6.2 谐振腔内场的方程	200
8.6.3 电磁振荡的本征频率	201
8.6.4 品质因素	202
思考与练习	202
参考文献	204

第 1 章* 矢量分析与场论基础

矢量分析和场论是研究电磁场重要的数学工具。本章作为电磁场理论的数学基础，首先介绍矢量的基本概念、代数运算和矢量分析基础。在此基础上，引入场的基本概念，重点讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度；最后引入矢量场的 Helmholtz 定理。

1.1 正交曲线坐标系

1.1.1 正交曲线坐标

为了确定三维空间中任意点 M 的位置，可选择三组曲面，使其相交于 M 点，点 M 的位置通过这三组曲面的交点惟一确定，如图 1-1 所示。相交点 M 的三组曲面可以有多种选择，通常选用三组正交曲面（曲面在空间任意交点上的三法线相互正交）。这三组正交曲面形成相交于 M 点三条相互正交的曲线。因此三维空间任意一点的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。该三条正交曲线组成确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系，三条正交曲线称为坐标轴，描述坐标轴的量称为坐标变量。

如果以 (q_1, q_2, q_3) 表示正交曲线坐标系的坐标变量，在直角坐标系中，

$$\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = y, & -\infty < x, y, z < \infty \\ q_3 = z \end{cases} \quad (1-1-1)$$

三个坐标轴上的单位矢量是 $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ ，它们分别是平面 $q_1 = x = c_1, q_2 = y = c_2, q_3 = z = c_3$ 的法线方向单位矢量。

圆柱坐标系如图 1-2 所示，其坐标变量是

$$\begin{cases} q_1 = \rho \\ q_2 = \varphi, & 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \\ q_3 = z \end{cases} \quad (1-1-2)$$

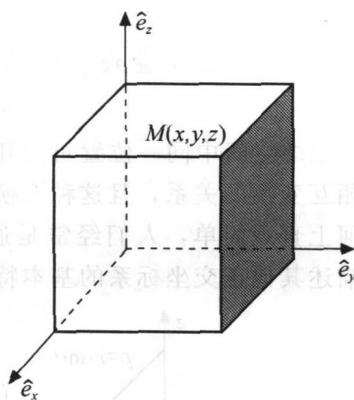


图 1-1 直角坐标系

三个坐标轴上的单位矢量是 $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ ，分别是柱面 $q_1 = \rho = c_1$ ，平面 $q_2 = \varphi = c_2, q_3 = z = c_3$ 的法线方向单位矢量。

球坐标系如图 1-3 所示，此时

$$\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ q_3 = \varphi \end{cases} \quad (1-1-3)$$

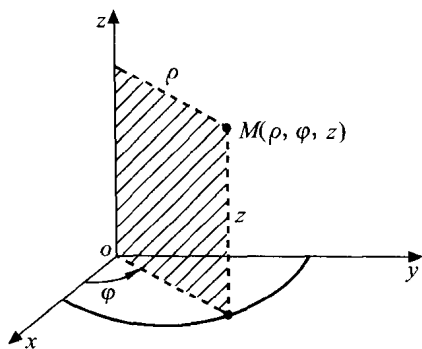


图 1-2 圆柱坐标系

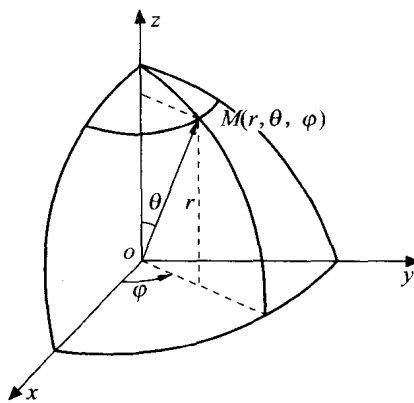


图 1-3 球坐标系

三个坐标轴上的单位矢量分别是 $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ ，它们分别是球面 $q_1 = r = c_1$ ，锥面 $q_2 = \theta = c_2$ 和平面 $q_3 = \varphi = c_3$ 的法线方向单位矢量。

1.1.2 正交曲线坐标的变换

三维空间中同一位置可以用不同的正交曲线坐标系表示。因此，不同坐标系之间存在相互变换的关系，且这种变换关系只能是一一对应的。由于直角坐标系方向矢量恒定，几何上直观简单，人们经常是通过建立任意正交曲线坐标系与直角坐标系之间的关系，来描述其他正交坐标系的基本特性。在直角坐标系中，任意正交曲线坐标系的三个坐标

变量可以表示为

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1-1-4)$$

反之，直角坐标系的坐标变量在任意正交曲线坐标系中也有类似的表达式，即

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1-1-5)$$

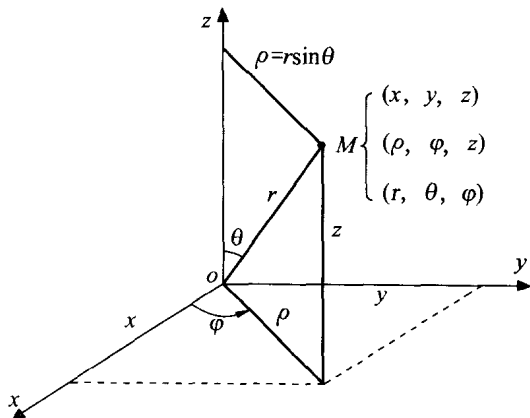


图 1-4 直角坐标系、柱坐标系和球坐标系的关系

如根据图 1-4 所示的几何关系，可直接得到直角坐标系与柱坐标系的变换关系为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases} \quad (1-1-6a)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1-1-6b)$$

直角坐标系与球坐标系的变换关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-1-7a)$$

$$\begin{cases} \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (1-1-7b)$$

柱坐标系与球坐标系的关系为

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \sin^{-1} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases} \quad (1-1-8a)$$

$$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-1-8b)$$

在任何正交曲线坐标系中, 存在一组与坐标轴相对应的单位矢量。如直角坐标系中的 $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, 圆柱坐标系中的 $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ 等。考虑到正交曲线坐标系某个坐标方向上的单位矢量是该坐标变量为常数时所对应曲面的单位法矢量, 如图 1-5 所示。利用高等数学的方法, 求得曲面 $q_i = q_i(x, y, z) = C$ 的单位法向量为

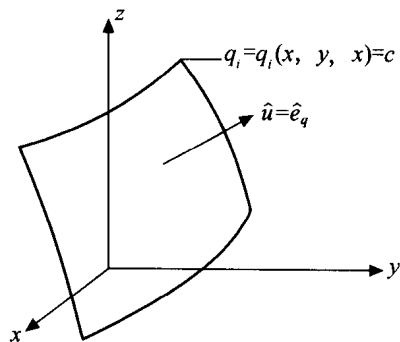


图 1-5 曲面的法向矢量

$$\hat{e}_{q_i} = \frac{\hat{e}_x \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i(x, y, z)}{\partial z}\right)^2}} \quad (1-1-9)$$

此即为正交曲线坐标系坐标轴 q_i 的单位矢量。

同样，不同正交曲线坐标系中的正交单位矢量也存在一一对应的变换关系，如直角坐标与圆柱坐标系单位矢量之间的关系为

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-1-10)$$

事实上，式 (1-1-9) 不仅给出了一般正交曲线坐标系中正交单位矢量的表达式，同时它也给出了该正交曲线坐标系与直角坐标系之间正交单位矢量的变换关系。

【例 1-1】 球坐标系中三个坐标变量为 (r, θ, φ) ，求坐标轴上单位矢量的表达式。

解：利用式 (1-1-7) 给出的球坐标变量与直角坐标变量之间的关系直接求微分得到

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\cos\varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \cos\theta\sin\varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\sin\theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sin\varphi, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos\varphi, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

将上述结果代入式 (1-1-9)，求得球坐标系中正交单位矢量是

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-1-11)$$

1.1.3 坐标系中的弧长

在直角坐标系中，空间相邻两点之间的弧长为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (1-1-12)$$

其中 dx, dy, dz 是相邻两点坐标变量的改变量，也是坐标变量的微小改变对应的弧长。在任意正交曲线坐标系中，空间任意点坐标变量的微小变化，变化前后相邻两点之间也有相应的弧长。为此设坐标变量 $q_i \rightarrow q_i + dq_i$ ，变化前后两点的空间弧长为

$$ds|_{q_i \rightarrow q_i + dq_i} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (1-1-13)$$

式中， dx, dy, dz 是由于 dq_i 而引起的改变量，其值为

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right) dq_i, dy = \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right) dq_i, dz = \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) dq_i$$

将这一结果代入式 (1-1-13)，从而得到

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} dq_i = h_i dq_i \quad (1-1-14)$$

其中

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (1-1-15)$$

称为 Lamé 系数。可见正交曲线坐标系坐标变量 q_i 的微小变化 dq_i ，变化前后相邻两点弧长的表达式与直角坐标系不同。这种不同源于正交曲线坐标系的坐标变量并不一定都具有长度量所导致。

【例 1-2】 求圆柱坐标系 Lamé 系数。

解：利用圆柱坐标与直角坐标的关系式 (1-1-6a)，求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 &\Rightarrow h_1 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 &\Rightarrow h_2 = \rho \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1 &\Rightarrow h_3 = 1 \end{aligned}$$

1.2 矢量及其运算

1.2.1 矢量的分量表示

既有数值，又有方向的量称为矢量；反之，只有数值的量称为标量。如物体受到的作用力 f 、运动速度 v 、电场强度 E 和磁场强度 H 等是矢量；温度 T 、密度 ρ 、电流强度 I 等为标量。矢量用黑斜体字母（如 F ）表示；标量用非黑斜体字母表示（如 u ）。在直角坐标系中，矢量 F 可用三个独立分矢量的叠加表示

$$\mathbf{F} = \hat{e}_x F_x + \hat{e}_y F_y + \hat{e}_z F_z \quad (1-2-1a)$$

其中， $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ 表示直角坐标系三个坐标轴方向上的单位矢量， (F_x, F_y, F_z) 为矢量 F 在三个坐标轴方向上的投影，如图 1-6 所示。为了表达上的方便，用下标 1, 2, 3 表示 x, y, z 轴，式 (1-2-1a) 可以简写为

$$\mathbf{F} = \hat{e}_x F_x + \hat{e}_y F_y + \hat{e}_z F_z = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i F_i \quad (1-2-1b)$$

矢量 F 在任意坐标轴上的投影为

$$F_i = (\mathbf{F} \cdot \hat{e}_i) = |\mathbf{F}| \cos\theta_i \quad (1-2-2)$$

其中， θ_i 为矢量 F 与单位矢量 \hat{e}_i 的夹角， $|\mathbf{F}|$ 是矢量的模，参考图 1-6，得到

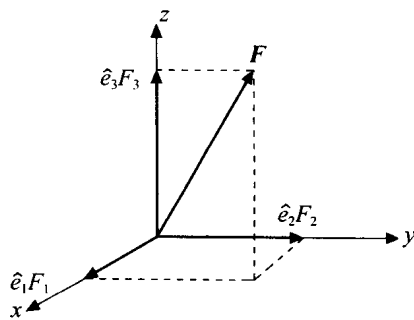


图 1-6 矢量的分解