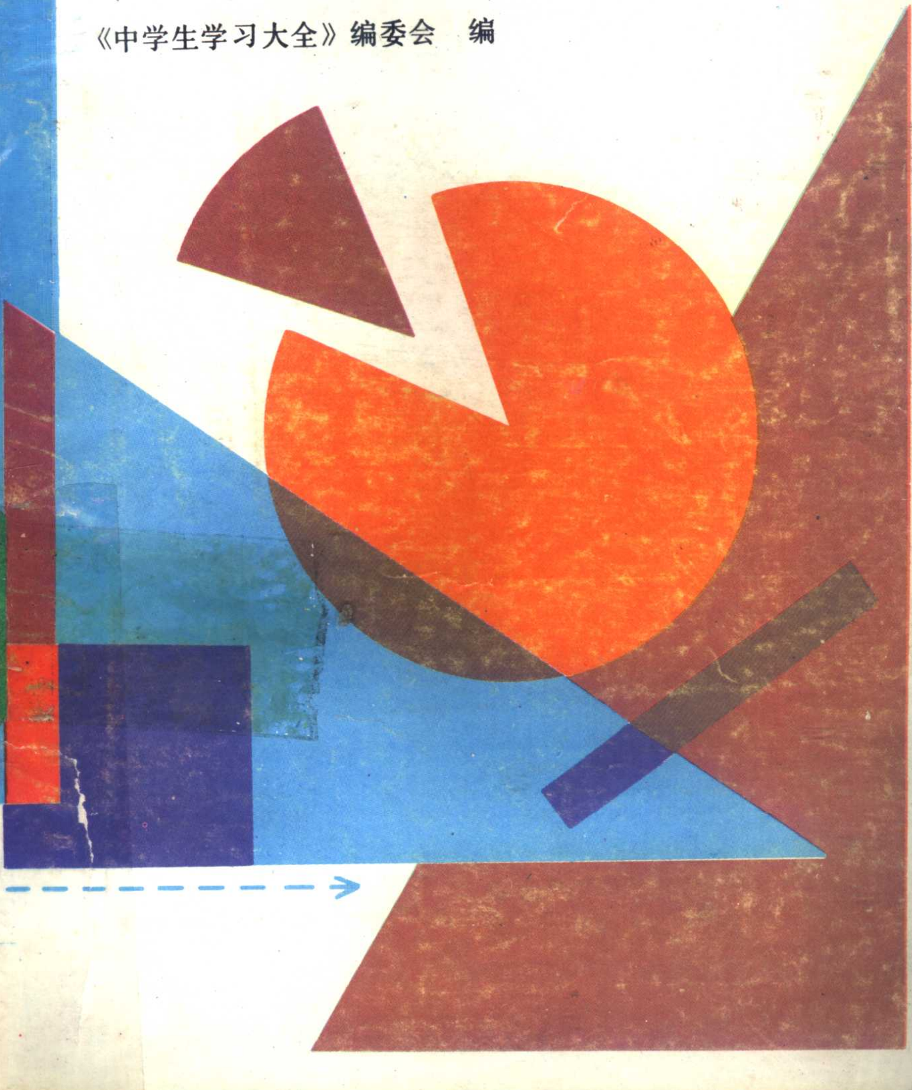
中学生学习大全

高中解析几何分册

《中学生学习大全》编委会 编



中学生学习大全

高中解析几何分册

《中学生学习大全》编委会　编

琼 新 登 字 01号

中学生学习大全

高中解析几何分册

《中学生学习大全》编委会 编

责任编辑：李 琪
装帧设计：张 迅

南海出版公司出版
辽宁省新华书店发行
吉林省科技印刷厂排版
辽宁省北票市印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 10．5印张 220千字
1991年7月第1版 1992年7月第3次印刷
印数：13600册 23700

ISBN 7—80570—146—6/G・36

定价：4．60元

目 录

学习心理与学习方法

平面解析几何 平面解析几何，它是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线，（包括直线），通过研究方程的特征间接地来研究曲线性质，解析几何是用代数方法来研究几何的一门数学学科.

平面解析几何研究的主要问题是：

（1）根据已知条件求出表示平面曲线的方程；

（2）通过方程，研究平面曲线的性质.

解析几何基础知识 解析几何基础知识包括定义、公式、直线、圆锥曲线的方程、性质、曲线图形及知识间的相互联系.

解析几何的重要公式

（1）数轴上有向线段 $A(x_1)B(x_2)$ 的数量公式：$AB=x_2-x_1$；

距离：$|AB|=|x_2-x_1|$.

（2）平面内任意两点 $p_1(x_1, y_1)$，$p_2(x_2, y_2)$ 的距离公式：$|p_1p_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

（3）线段定比分点坐标公式：

当已知两个端点为 $p_1(x_1y_1)$，$p_2(x_2y_2)$ 点 $p(x, y)$ 分 $\overline{p_1p_2}$ 所成的比为 λ 时，点 p 的坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq-1)$$

当点 p 是线段 $\overline{p_1p_2}$ 的中点时，$\lambda=1$，因此线段 $\overline{p_1p_2}$ 中点 p 的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

（4）过 p_1（x_1，y_1），p_2（x_2，y_2）两点直线的斜率公式：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

（5）两直线夹角公式：

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$$

其中 k_1，k_2 为两条直线斜率，θ 为两条直线夹角.

（6）点 p（x_0，y_0）到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

曲线的方程　曲线的方程是平面解析几何的核心内容，它是指，一般地，在直角坐标系中，如果某曲线 C（看作适合某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的实数解建立了如下的关系：

（1）曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

（2）以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点. 那么，这个方程叫做曲线的方程；这条曲线叫做方程的曲线（图形）.

直线的方程　直线方程有点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式及直线参数方程和极坐标方程、任何一条直线都可表示为直线方程一般式.

圆锥曲线方程　圆锥曲线方程有，圆的标准方程，圆的一般方程，圆的参数方程和极坐标方程；椭圆. 双曲线，抛物线的标准方程、参数方程和极坐标统一方程.

为能熟练、灵活解题，必须熟悉这些曲、（直）线的方程

形式，甚至包括一些特殊位置的曲线方程形式，以圆的方程为例：

（1）圆心在原点，半径为 r 的圆的方程：

$$x^2+y^2=r^2$$

（2）圆心在（a，b）半径为 r 的方程：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

（3）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

（4）一些特殊位置的圆及方程特点：

①圆过原点 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ 或 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$（其中 a，b 不全为零或 D、E 不全为零）；

②圆心在 x 轴上的圆：

$(x-a)^2+y^2=r^2$ 或 $x^2+y^2+Dx+F=0$；

③圆与 x 轴相切 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$；

④圆心在 y 轴上且与 x 轴相切的圆：

$x^2+(y-b)^2=b^2$ 或 $x^2+y^2+Ey=0$.

了解这些特殊位置的圆方程特点，相当于增加了题设条件，便于解题.

直线的性质研究　直线方程及有关公式的应用是解析几何的基础，此外还要重视研究两直线位置关系；有关对称问题；涉及直线斜率 k 的问题时，要注意研究 k 是否有不存在的情况，免得漏解或出错.

圆锥曲线性质研究　圆锥曲线的性质研究指，顶点、焦点，中心这三个特殊点；准线、对称轴、渐近线这三条特殊线及 a，b，c，p，e 这五数的关系.

解析几何的基本方法　解析几何的基本方法是指，各种设点和求点的方法；求距离和交角的方法；求轨迹方程的方法；由

方程画曲线的方法；利用方程研究曲线性质的方法；用解析法证明平面几何问题的方法等等.

求曲线轨迹方程的方法 求曲线轨迹方程常用方法有：

（1）一般法：它由建系（建立直解坐标系或极坐标系）、设点、列等式代坐标、化简方程几个步骤完成.

（2）转移法：适应于题目中已知动点和未知动点时求轨迹方程，具体做法：设点 P（x，y）及已知曲线 f（x，y）＝0 上的点 p_0（x_0，y_0），写出两坐标关系式并写成 $\begin{cases}x_0=\varphi(x, y)\\ y_0=\psi(x, y)\end{cases}$ 的形式，p_0（x_0，y_0）在已知曲线上，故将〔$\varphi(x, y)$，$\psi(x, y)$〕代入已知方程即得 p（x，y）的轨迹方程.

（3）定义法：利用曲线定义判断曲线形状，然后求出必要的待定系数，根据定义写出方程.

（4）平面几何法：运用平面几何的定理直接判定点的轨迹，写出轨迹方程.

此外还有参数法，复数法等都是求轨迹方程的常用方法.

解析几何解题技巧 1 恰当选择坐标系及合理建立适当的坐标系.

这包含两个方面的问题，一是恰当选择坐标系：凡研究绕定点旋转问题，焦点弦，焦半径问题，圆锥曲线统一性质问题，选用极坐标系合适．二是在坐标系中适当地选择原点和坐标轴，合理建立坐标系，其原则是：便于确定关键点的坐标和曲线的方程.

例 过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 做一直线交抛物线于 M、N 两点，$|FM|=r_1$，$|FN|=r_2$，求证 $r_1 \cdot r_2$ 等于 r_1，r_2 等焦差中项 p 倍.

解　以抛物线焦点F为极点，抛物线的对称轴为极轴建立坐标系，如图，则，抛物线方程为：$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$设M点极坐标为$(r_1\theta)$，N点极坐标为$(r_2, \pi+\theta)$，则，

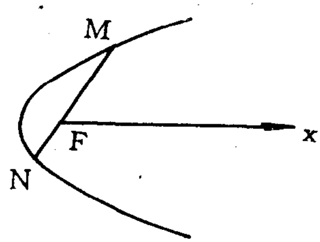


图1

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{p}{1-\cos\theta} \cdot \frac{p}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{p^2}{\sin^2\theta} ①$$

$$r_1+r_2 = \frac{p}{1-\cos\theta} + \frac{p}{1-\cos(\pi+\theta)}$$
$$= \frac{p(1+\cos\theta)+p(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} = \frac{2p}{\sin^2\theta} ②$$

由①，②可得，$r_1 \cdot r_2 = p \cdot \frac{r_1+r_2}{2}$

该题利用直角坐标系中普通方程参数方程都可证明，但以极坐标系中极坐标方程最为简单．

在解题中合理选择曲线方程，能使解题简捷，训练培养思维的敏捷性．

解析几何解题技巧2　选择适当的方程．

直线方程在直角坐标系中就有六种形式可供选择，圆锥曲线有标准方程、普通方程，此外还有极坐标方程、参数方程．曲线方程所选形式不同，解法不同，繁简程度不同，这里想提一下关于参数方程的选用．其一是应用参数设曲线上点的坐标，减少未知数的个数，从而简化计算，二是运用参数的几何意义使有关几何量的计算简便，且往往使解题思路更明确，特别是在解决有关共线点之间的距离问题，直线截

圆锥曲线所得弦的中点轨迹问题及弦长计算问题时，使用直线参数方程最为简便.

例 已知曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，过点（2，1）的直线 l 与所给双曲线交于 p_1，p_2 点，求线段 p_1p_2 的中点 p 的轨迹方程.

解 设 p_1p_2 的中点 p（x_0y_0），并设直线 l 参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot\cos\theta \\ y=y_0+t.\ \sin\theta \end{cases} \quad ①$$

将①代入双曲线方程，整理得，

$$(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)\ t^2+2\ (2x_0\cdot\cos\theta-y_0\sin\theta)\ t+2x_0^2-y_0^2=o$$

∵直线与双曲线有两交点，

∴方程有二相异实根 t_1，t_2

则有，$t_1+t_2=2x_0\cos\theta-y_0\cdot\sin\theta-(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

又，p（x_0y_0）是 p_1p_2 中点，

∴$t_1+t_2=0$，即 $2x_0\cos\theta-y_0\sin\theta=0$

$$\therefore \frac{2x_0}{y_0}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=tg\theta \qquad tg\theta=\frac{y_0-1}{x_0-2}$$

$$\therefore \frac{2x_0}{y_0}=\frac{y_0-1}{x_0-2}$$ 整理得

$$\frac{(x_0-1)^2}{\frac{7}{8}}-\frac{(y_0-\frac{1}{2})^2}{\frac{7}{4}}=1$$

∴p_1p_2 中点 p 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{7}{8}}-\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{7}{4}}=1$$

解析几何解题技巧 3 从一题多解中获益.

一题多解可以训练发散性思维及思维的灵活性，也可在

诸多解法中寻求最佳方法.

例 在双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$的一支上有不同的三点A (x_1y_2) B $(\sqrt{26},6)$ C (x_2y_2) 与焦点F $(0,5)$ 的距离或等差数列，求y_1+y_2.

解法一 $|BF|=\sqrt{26+(6-5)^2}=3\sqrt{3}$

$\because |AF|+|CF|=2|BF|=6\sqrt{3}$ ①

$\because |AF|=\sqrt{x_1^2+(y_1-5)^2}$

A在双曲线上，

$\therefore x_1^2=\frac{By_1^2-156}{12}$代入上式，

$|AF|=\sqrt{\frac{1}{12}(5y_1-12)^2}$ $\because$A在双曲线上支

$\therefore y_1\geqslant\sqrt{12}$

$\therefore |AF|=\frac{1}{\sqrt{12}}(5y_1-12)$ ②

同理，$|BF|=\frac{1}{\sqrt{12}}(5y_1-12)$ ③

②③代入①

$|AF|+|BF|=\frac{5}{\sqrt{12}}(y_1+y_2)-\frac{24}{\sqrt{12}}=6\sqrt{3}$

$\therefore y_1+y_2=12$

解法二 $\because$双曲线中

$a=\sqrt{12}$，$b=\sqrt{13}$，$c=5$，焦点F $(0,5)$ 对应准线为$y=\frac{12}{5}$.

由双曲线定义：$\frac{|AF|}{|y_1-\frac{12}{5}|}=\frac{5}{\sqrt{12}}$

$\therefore |AF|=\frac{5}{\sqrt{12}}|y_1-\frac{12}{5}|$

$\because y_1\geqslant\sqrt{12}$

$\therefore |AF|=\frac{5}{\sqrt{12}}(y_1-\frac{12}{5})$ 同理 $|BF|=\frac{5}{\sqrt{12}}(6-\frac{12}{5})$

$|CF|=\frac{5}{\sqrt{12}}(y_2-\frac{12}{5})$

$\because 2|BF|=|AF|+|CF|$

$\therefore y_1+y_2=12$

解法三 由双曲线定义知，

$|AF|=e(y_1-\sqrt{12})$ ①

$|BF|=e(6-\sqrt{12})$ ②

$|CF|=e(y_2-\sqrt{12})$ ③

又，$2|BF|=|AF|+|CF|$ ④

①②③代入④得，

$$y_1+y_2=2\times6=12$$

这三种方法分别利用了两点距离公式，双曲线的第一、第二定义解题，显然能够培养我们探索、钻研的能力，并能找出最简解法.

解析几何解题技巧 4 充分利用图形的平面几何性质简化解题过程.

例 已知圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 y 轴交于 B（0，a）圆上一动点 Q 的切线与过点 B 的切线交于点 R，求△BQR 的垂心轨迹方程.

解 作 $QC\perp BR$，连 OR，QC 与 OR 交于 M，即为△BQR 垂心

设 Q（x_0y_0），△BRQ 垂心为 M（x，y）.

$\because x=x_0$

①

又$\triangle BOP\cong\triangle QPM$，$\therefore|MQ|=|BO|=a$

$\therefore y-y_0=a$

$\therefore y_0=y-a$

②

将①，②代入$x^2+y^2=a^2$，得，$x^2+(y-a)^2=a^2$即为$\triangle BQR$垂心M的轨迹方程.

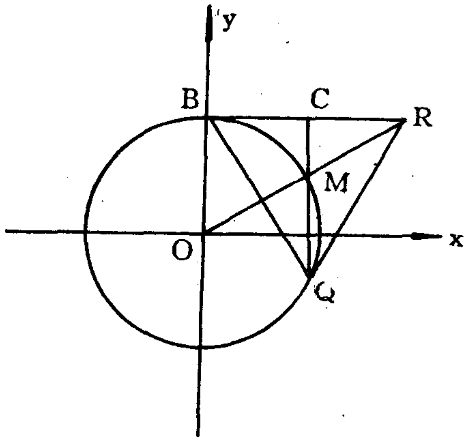


图 2

该题充分利用图形几何性质得出两个动点的坐标关系，简化了解题过程.

解析几何解题技巧 5 会转换命题，能把看之千难万难的问题转换成可以入手的问题或简单的问题.

例 设f是实数集R到复数集C的一个映射，对于$t\in R$，有$f(t)$ $(4n^2+tn+14)i$其中$n\in z$问是否存在实数t，使得复数 $f(t)$ 所对应的点位于以A$(0,-2)$为圆心，$8\sqrt{3}$为半径的圆内或圆上.

转换(1)：是否存在$t\in R$，使得点$(t, 4n^2+tn+14)$不在圆$x^2+(y+2)^2=(8\sqrt{3})^2$外，即$t^2+(4n^2+tn+16)^2\leqslant(8\sqrt{3})^2$即$(1+n^2)t^2+8n(n^2+4)t+16$ $[(n^2+4)^2-12]\leqslant0$然后联系二次函数及判别式可知t值不存在.

转换（2）：令$\begin{cases}x=t\\y=4n^1+nt+14\end{cases}$得 $y=nx+4n^2+14$ 则问题又转换成：是否存在 $t\in R$，使得圆心（0，−2）到直线的距离不大于 $8\sqrt{3}$，这由 $d=\frac{4n^2+16}{\sqrt{1+n^2}}=4\left(\sqrt{n^2+1}+\frac{3}{\sqrt{1+n^2}}\right)>8\sqrt{3}$ 便能断论.

解析几何角题技巧 6 合理制定解题方案，这是解题的核心问题，思路不同，解法必然不同制定最佳方案，可减少计算量，使解题过程简化.

例 直线 L 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 依次交于 P、Q、R、S 四点，且 $|PQ|=|QR|=|RS|$ 求 L 方程.

该题难点在于如何应用 $|PQ|=|QR|=|RS|$. 若算出 P、Q、R、S 的坐标，由距离公式列出方程组求解，则计算量大，较好的方案是运用其等价条件：线段 PS 与 QR 中点重合，且 $|PS|=3|RS|$ 去求解，既便于应用韦达定理，计算量也少.

解析几何解题技巧 7 巧用定义解题. 运用定理公式解题往往被人重视，而对于用定义解题却忽视，因而有时就忽略了最好的方法，有些题直接用定义. 思路明朗，运算简捷.

例 直线 L 通过抛物线 $y^2=2px$（$p\neq0$）的焦点且与抛物线交于 A（x_1，y_1）B（x_2，y_2）两点，求证：对于这抛物线的任何给定的一条弦 CD，直线 L 不是 CD 的垂直平分线.

该题直接法或反证法从方程入手都较繁琐，但从定义出发用反证法较好：假设 L 是 CD 中垂线，$F\in L$ 则 $|FC|=|FD|$. 作 CC'、DD' 分别垂直于准线 L' 垂足为 C'、D'，由抛物线定义而知 $|FC|=|CC'|$，$|FD|=|DD'|$，于是 $|CC'|=|DD'|$，∴CD//y 轴. 而 $l\perp CD$ ∴L//X 轴，故 l 与抛物线只有