高等代數 A B C

上 册

施敏驤編 王剛森校

世界書局印行

高等代數ABC 上册 世界書局印行

高等代數學ABC(上)

每冊定價銀五角

(外埠酌加郵費匯費)

著作者　施毓麟

校訂者　王剛森

出版者　ABC叢書社

印刷者　世界書局

發行者　世界書局

發行所　上海　各埠　世界書局

中華民國二十二年一月初版

中華民國二十四年三月再版

上册目次

高等代數ABC

上　册

第一章　因子

1.因子：　凡因子 Factors 都能除盡他的整代數式。

2.一項因子：　一項因子很容易看出，就是方程式的各項都含有同一文字。如

$$2x^2+5x=x(2x+5)$$

x 就是上式的因子。

有時代數式的各項須聚合起來方可見得因子。如

解　$ac-ad-bc+bd$成因子式

$$\begin{aligned}ac-ad-bc+bd&=(ac-ad)-(bc-bd)\\&=a(c-d)-b(c-d)\end{aligned}$$

$$=(a-b)(c-d)$$

所求的因子是$a-b$和$c-d$。

3.平方根：　倘一代數式能解成兩個相同的因子，那麼這個因子就是代數式的平方根。如

$$16x^6y^2=4x^3y\times4x^3y$$

則$4x^3y$是$16x^6y^2$的平方根。

正數的平方根可正可負。如

$$a^2=a\times a \text{和} a^2=(-a)\times(-a)$$

4.三項式：　倘首末二項都是完全平方，中間一項等於首末兩項平方乘積的二倍，這樣的三項一定是完全平方式。如

$16a^2-24ab+9b^2$是一完全平方式。

5.二項式是兩個平方之差：兩平方之差可爲兩因子的乘積。這兩個因子可用下法決定：

1. 取出第一和第二數的平方根。
2. 二平方根之和是一個因子。
3. 二平方根之差又是一個因子。

如　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

$$(a-b)^2-(c-d)^2=\{(a-b)+(c-d)\}\{(a-b)-(c-d)\}$$

$$=(a-b+c-d)(a-b-c+d)。$$

代數式常須排成二平方之差的形式，因爲對於求因子的問題極易解決。

如　$a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd$

$$=a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$$

$$=(a+b)^2-(c-d)^2$$

$$=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}$$

$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)$$

三項式成 $a^4+a^2b^2+b^4$ 的形式，也可化成兩個平方之差。然後求他的因子。

如　$x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

二項式成 x^4+4y^4 形的可化成兩個平方之差，再求他的因子。

如 $1+4y^4=(1+4y^2+4y^4)-4y^2$

$$=(1+2y^2)^2-(2y)^2$$

$$=(1+2y+2y^2)(1-2y+2y^2)$$

有時代數式可化成許多因子。

如 $x^{16}-y^{16}=(x^8+y^8)(x^8-y^8)$

$$=(x^8+y^8)(x^4+y^4)(x^4-y^4)$$

$$=(x^8+y^8)(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$

$$=(x^8+y^8)(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

6. 三項式x^2+ax+b可以化成因子式。內中a等於二數的代數和（所謂代數和就是不論二數之正負而求其和）；b等於二數的乘積。

既知$(x+5)(x+3)=x^2+8x+15$，

$x^2+8x+15$的因子是$x+5$和$x+3$。

倘三項式 x^2+ax+b 能分解成兩個因子，那麼兩

因子的第一項一定是 x；兩因子的第二項一定是乘積得 b 的二數；二數的代數和必等於三項式中間一項 x 的係數。

(1)解　$x^2+11x+30$ 成因子

現在應求二數，他的積等於30；和等於11。

兩數的乘積等於30的有1和30，2和15，3和10，5和6；最後二數之和等於11。

$$\therefore x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

(2)解　$x^2+2x-24$ 成因子

也是應求二數，他的積等於 -24；他的和等於2。

兩數的乘積等於 -24 的有 $+24$ 和 -1，12和 -2，8和 -3，6和 -4；最後二數之和等於2。

$$\therefore x^2+2x-24=(x+6)(x-4)$$

將上定理普遍之，得

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

對於 a，b 的任何值都能符合

7. 三項式有ax^2+bx+c形的可以化成因子。

(1)解　$8x^2-22x-21$成因子。

將x^2的係數8乘原式，得下面的結果：

$$(8x)^2-22\times 8x-168$$

命$z=8x$，　$z^2-22z-168$，

用前面的解法，得

$$z^2-22z-168=(z-28)(z+6)。$$

但計算時曾用8乘原式；並命 $z=8x$；所以現在我們應化歸原式。就是在上式除 8；並將 $z=8x$代回，得

$$\frac{(8x-28)(8x+6)}{8}$$

4是$8x-28$的因子，2是$8x+6$的因子。

$$\therefore \frac{(8x-28)(8x+6)}{8}=(2x-7)(4x+3)。$$

(2)解　$24x^2-70xy-75y^2$成因子。

乘24，　$(24x)^2-70y\times 24x-1800y^2$，

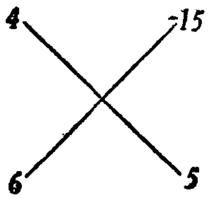
命$z=24x$，　$z^2-70yz-1800y^2$，

解成因子，　$(z-90y)(z+20y)$，

命$24x=z$，　$(24x-90y)(24x+20y)$，

以4×6除之，　$(4x-15y)(6x+5y)$，

其實不必這樣麻煩，可以用下面的一個簡單圖形求得因子。仍用上面的例(2)。



第一行所乘的是x^2的係數；交錯相乘的是xy係數的代數和；第二行所乘的是y^2的係數，看了左圖，他的因子立即可以寫出$(4x-15)(6x+5)$。

有時沒有y^2，則第二行所乘的就是常數項，上圖也可應用。

8. 倘二項式爲二立方之和或差：

因　$\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$

和　$\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$

$$\therefore (a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)。$$

同樣情形，可以化二立方之和或差的代數式成因子。

(1)解 $8a^3+27b^6$成因子。

$$8a^3+27b^6=(2a)^3+(3b^2)^3$$

$$=(2a+3b^2)[(2a)^2-(2a)(3b^2)$$

$$+(3b^2)^2]$$

$$=(2a+3b^2)(4a^4-6ab^2+9b^4)。$$

9. 倘多項式爲二三項式的乘積：應用下面的方法，很容易將多項式解成因子。

求$2x^2-5xy+2y^2+7xz-5yz+3z^2$的因子。

(1)棄去所有含z的各項。

(2)棄去所有含y的各項。

(3)棄去所有含x的各項。

在上面剩餘的各項中解成因子。

(1)$2x^2-5xy+2y^2=(x-2y)(2x-y)$

(2)$2x^2+7xz+3z^2=(x+3z)(2x+z)$

(3) $2y^2-5yz+3z^2=(2y-3z)(y-z)$

將上面的三對因子排成二列，每二因子中有一相同項。

如 (1) $x-2y$，$x+3z$，$-2y+3z$；

(2) $2x-y$，$2x+z$，$-y+z$。

在第一列中選出每二因子的相同項成一三項因子：

$$x-2y+3z$$

在第二列中選出每二因子的相同項成一三項因子：

$$2x-y+z$$

$$\therefore 2x^2-5xy+2y^2+7xz-5yz+3z^2=(x-2y+3z)(2x-y+z)。$$

10. 定理 x^n-y^n 可以用 $x-y$ 除盡，但 n 必為正整數。

因 $-x^{n-1}y+x^{n-1}y=0$，

$$x^n-y^n=x^n-x^{n-1}y+x^{n-1}y-y^n。$$

在右邊的首兩項取出 x^{n-1}，後兩項取出 y，得

$$x^n-y^n=x^{n-1}(x-y)+y(x^{n-1}-y^{n-1})。$$

假使 $x-y$ 可以除盡上式的$x^{n-1}-y^{n-1}$，那麼$x-y$ 可以除盡上式的右端各項；換言之，$x-y$可以除盡上式的左端；所以假定 $x-y$ 可以除盡$x^{n-1}-y^{n-1}$一定可以除盡x^n-y^n。

所以$x-y$得除盡x和y相同次的差，一定可以除盡x和y較高一次相同次的差。

前面已知$x-y$可以除盡x^3-y^3，所以$x-y$ 可以除盡x^4-y^4；既然 $x-y$可以除盡 x^4-y^4；所以一定可以除盡x^5-y^5；以此類推，得 x^n-y^n 當 n 等於正整數時，都可以將$x-a$除盡。

像這樣的證明在數學上就叫歸納法 Mathematical Induction

11. 凡 x 的有理整式，如將 r 代 x，原式完全消去，則$x-r$一定是有理整式的因子。

設有理整式依x的遞降次數排列：

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+hx+k \qquad (1)$$

由題意，r代x原式等於零，(就是完全消去)

$$ar^n+br^{n-1}+cr^{n-2}+\cdots\cdots+hr+k=〇 \quad (2)$$

(1)式減(2)式，因(2)式等於零，所以結果和(1)式同。

$$a(x^n-r^n)+b(x^{n-1}-r^{n-1})+\cdots\cdots$$
$$+h(x-r)。$$

但$x-r$可以除盡x^n-r^n，$x^{n-1}-r^{n-1}$，……$x-r$，所以$x-r$是原有理整式的因子。

(1)解　$x^3+3x^2-13x-15$的因子

可以除盡 -15的數目字，則有 -1，1，3，-3，5，-5，15，-15。

假使將1代x，原式不能消去。將-1代x，原式可以消去，所以 $x-(-1)$ *i.e.* $x+1$是一因子。

將$x+1$除原式，得

$$x^3+3x^2-13x-15=(x+1)(x^2+2x-15)$$
$$=(x+1)(x-3)(x+5)$$

最高公因數

12. 兩個或兩個以上有理整式的公因數是一個能够除盡他們並無剩餘的式子。

兩式除1外，並無其他因數，叫做互質 Prime to each other。

兩個或兩個以上有理整式的最高公因數 Highest Common factor 是一個能够除盡他們並無剩餘的最高次有理整式。

為便利計，最高公因數以H.C.F.表之。

求$8a^2x^2-24a^2x+16a^2$和$12ax^2y-12axy-24ay$的H.C.F.

$$8a^2x^2-24a^2x+16a^2=8a^2(x^2-3x+2)$$

$$=2^3a^2(x-1)(x-2)$$

$$12ax^2y-12axy-24ay=12ay(x^2-x-2)$$

$$=2^2\times 3ay(x+1)(x-2)$$

$$\therefore \text{H.C.F.}=2^2a(x-2)=4a(x-2)\text{。}$$

求兩式以上的H.C.F.，

先化各式成質因數。

所有各因數的乘積，取每因數在原式的最低次數，就是所求的H.C.F.

但有時當求H.C.F.時，遇見多項式不易分解成因數，則可應用從前在算術上所求二數以上的最大公約數方法（輾轉相除法）求得最高因數。但須注意的就是餘式的次數必較除式為低。

例1.求　$4x^2-8x-5$和$12x^2-4x-65$的H.C F.

$$
\begin{array}{r}
4x^2-8x-5)\,12x^2-4x-65(3 \\
\underline{12x^2-24x-15} \\
20x-50
\end{array}
$$

餘式$20x-5$低於$4x^2-8x-5$的次數，故第一步就此為止。倘以$20x-50$做除式，就沒有一個整數乘$20x$得$4x^2$。

但$20x-50$是一個混合因子$10(2x-5)$。以10除之，得$2x-5$。這樣做法和所求的H.C.F.毫無關係。現在將$2x-5$當做除式，再求H.C.F.

$$
\begin{array}{l}
2x-5)4x^2-8x-5(2x+1 \\
\underline{\quad 4x^2-10x\quad} \\
\qquad\quad 2x-5 \\
\qquad\quad \underline{2x-5\quad}
\end{array}
$$

$\therefore$ H.C.F. $=2x-5$

2. 求$21x^3-4x^2-15x-2$和$21x^3-32x^2-54x-7$的H.C.F.

為便利計，只寫二式的係數

$$
\begin{array}{l}
21-4-15-2)21-32-54-7(1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{21-4-15-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -28-39-5
\end{array}
$$

在餘式$-28x^2-39x-5$中並無其他簡單因子，所以必須將4乘$21x^3-4x^2-15-2$。如是則$-28x^2$可以除盡首項，和所求的H.C.F.無關。因為對於H.C.F.有關係的僅有餘式和除式的公因數。現在4並非餘式的因數，故與H.C.F.無關。

餘式各項的符號可以變易；因為如果有A式可用$-$F除盡，一定可以$+$F除盡。

$$28+39+5)84-16-60-8(3$$