三导丛书

经济应用数学基础

线性代数

（人大·第三版）

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

张 博 主编

- 重点内容提要
- 知识结构图
- 常考题型及考研典型题精解
- 学习效果两级测试
- 课后习题全解

西北工业大学出版社

三导丛书

经济应用数学基础

线 性 代 数

（人大·第三版）

导教·导学·导考

张 博 主编

苏永利 张 海 勾 明 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是为线性代数课程编写的教学参考用书。全书共五章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等。每章由重点内容提要、知识结构图、常考题型及考研典型题精解、学习效果两级测试题、课后习题全解等五部分组成。其目的是针对学生在学习过程中遇到的疑难问题以及财经类硕士研究生入学考试中的常考题型，通过典型例题的求解，引导学生掌握解题方法，提高解题能力。学习效果两级测试题则是为学生自我测试提供的，对教材中的课后习题也给出了详细解答。

本书内容与中国人民大学出版社出版的经济应用数学基础《线性代数》（第三版）相配套，对学习财经类线性代数的同学是一本很好的辅导教材，同时也可供报考硕士研究生的考生复习应试以及从事线性代数课程教学的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数（人大·第3版）导教·导学·导考/张博主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.10

ISBN 7-5612-1846-X

Ⅰ．线…　Ⅱ．张…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第109653号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　邮编：710072
电　　话：029-88493844，88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：850 mm×1168 mm　1/32
印　　张：8
字　　数：203千字
版　　次：2004年11月第1版　2004年11月第1次印刷
定　　价：12.00元

前　言

线性代数课程是高等院校的一门非常重要的基础课程，也是财经类专业硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者更好的学习该课程，并满足广大读者学习和考研的需要，我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书按照中国人民大学出版社出版的经济应用数学基础《线性代数》（第三版）的章节顺序，分为五章，每一章均设计了五个方面的内容。

一、重点内容提要——列出了本章的基本概念、基本定理和公式、基本方法，突出本章的重点和难点。

二、知识结构图——用图表的形式，列出本章的主要内容，反映出各知识点之间的有机联系。

三、常考题型及考研典型题精解——从历年一些重点高校的期末试题以及历年财经类研究生入学统考试题中精选出一些典型题目，并进行了解答，对解题难点和容易出错的题目作了注释。

四、学习效果两级测试题——基础知识测试题及答案，考研训练模拟题及答案。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力而设计的，通过两级测试，读者可以进一步加深和巩固所学知识，增强解题的能力。

五、课后习题全解——对中国人民大学出版社出版的《线性代数》（第三版）的课后习题全部做了详细解答，以供读者在学习过程中对照检查。

本书从指导课程教学、学习和应试的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的题目解答，介绍了线性代数的解题方法、解题规律和解题技巧，有助于读者理解基本概念和理论，提高分析问题的能力，开拓解题思路，掌握解题技巧，全面增强数学素质。对于课后习题，希望读者在学习过程中先独立思考，再对照检查，不要依赖于习题解答。

本书分别由苏永利（第 1、4 章）、张海（第 2 章）、张博（第 3 章）、勾明（第 5 章）分工执笔编写，由张博负责统稿。邢志栋教授和曹建荣副教授审阅了书稿，在此对他们深表谢忱。

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2003 年 11 月于西北大学

目　录

第 1 章　行列式 …………………………………… 1
一、重点内容提要 ………………………………… 1
二、知识结构图 …………………………………… 6
三、常考题型及考研典型题精解 ………………… 6
四、学习效果两级测试题 ……………………… 12
（一）基础知识测试题及答案 ……………… 12
（二）考研训练模拟题及答案 ……………… 15
五、课后习题全解 …………………………… 18
第 2 章　矩阵 …………………………………… 52
一、重点内容提要 …………………………… 52
二、知识结构图 ……………………………… 56
三、常考题型及考研典型题精解 …………… 57
四、学习效果两级测试题 …………………… 66
（一）基础知识测试题及答案 ……………… 66
（二）考研训练模拟题及答案 ……………… 69
五、课后习题全解 …………………………… 76

第3章 线性方程组 …… 110

一、重点内容提要 …… 110
二、知识结构图 …… 120
三、常考题型及考研典型题精解 …… 120
四、学习效果两级测试题 …… 132
（一）基础知识测试题及答案 …… 132
（二）考研训练模拟题及答案 …… 137
五、课后习题全解 …… 144

第4章 特征值与特征向量 …… 173

一、重点内容提要 …… 173
二、知识结构图 …… 180
三、常考题型及考研典型题精解 …… 181
四、学习效果两级测试题 …… 190
（一）基础知识测试题及答案 …… 190
（二）考研训练模拟题及答案 …… 192
五、课后习题全解 …… 193

第5章 二次型 …… 208

一、重点内容提要 …… 208
二、知识结构图 …… 210
三、常考题型及考研典型题精解 …… 211
四、学习效果两级测试题 …… 223
（一）基础知识测试题及答案 …… 223
（二）考研训练模拟题及答案 …… 229
五、课后习题全解 …… 237

第1章 行列式

一、重点内容提要

(一) 二、三阶行列式

1. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(二) n 阶行列式

1. 排列与逆序

(1) 排列的定义：由 n 个不同的数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，称为一个 n 级排列.

(2) 逆序数的定义：在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 $(i_s < i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为

$$N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$$

如果排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是奇数则称为奇排列，如果是偶数或 0 则称为偶排列.

(3) 对换：在一个排列 $i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与

i_t 对调，其他数码不变，得到另一个排列 $i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$，这样的变换，称为一个对称，记为：对换$(i_s,i_t)$.

(4) 排列的性质：

定理 1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

定理 2 n 个数码$(n>1)$ 共有 $n!$个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $|a_{ij}|$. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按照自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 故 n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可写为

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中的所有项.

定理 3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项也可以记为

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_1j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

注意 n 阶行列式共有 $n!$项，其中冠以正号的项和冠以负号的项(不计元素本身所带的负号)各占一半.

如果行列式有一行(或一列)中的元素均为零，则行式的值为零.

3. 特殊行列式

(1) 上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

(3) 对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

其中行列式从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

(三) 行列式的性质

(1) 将行列式转置，行列式值不变，即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式值变号.

注意　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

(3) 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于以数 k 乘此行列式.

注意　如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面；如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

(4) 如果将行列式中某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在的行(列)对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同.

注意　如果将行列式的某行(列)的每个元素都写成 m 个数(m 为大于 2 的整数)的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

(5) 将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上，行列式值不变.

注意　在计算行列式时，通常是利用行列式的上述性质，将行列式化为三角形行列式来计算.

(四)行列式按行(列)展开

1. 行列式按某一行(列)展开

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,余下的 $n-1$ 阶行列式,称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前添加符号 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

定理 4 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

定理 5 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的某一行(列)的各元素与另一行(列)对应的代数余子式乘积的和等于零,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t)$$

综上,故有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$$

和

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D & j=t\\ 0 & j\neq t\end{cases}$$

注意 在计算行列式时,可以先用行列式的性质将行列式的某一行(列)化为仅含有一个非零元素,再按此行(列)展开,变为低一阶行列式,依此类推,直至化为二阶或三阶行列式.

*2. 行列式按某 k 行(列)展开

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,任意选取 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$,位于这些行和

列交叉处的 k^2 个元素，按照原来的顺序构成一个 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式. 划去这 k 行 k 列，余下的元素按照原来的顺序构成一个 $n-k$ 阶行列式，在其前面冠以符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$，称为 M 的代数余子式，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为 k 阶子式 M 在 D 中的行标，$j_1, j_2, \cdots, j_k$ 为 M 在 D 中的列标.

定理 6 （拉普拉斯定理）在 n 阶行列式中，任意取定 k 行(列)$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

(五) 克莱姆法则

定理 7 （克莱姆法则）线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，仅有惟一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是将系数行列式中第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后得到的行列式.

如果常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零，则称方程组(1.1)为齐次线性方程组，否则称其为非齐次线性方程组.

定理 8 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则它仅有零解.

如果其系数行列式 $D = 0$,则方程组(1.2)有非零解.

二、知识结构图

$$\text{行列式}\begin{cases}\text{二阶、三阶行列式} \\ n\text{ 阶行列式}\begin{cases}\text{排列与逆序} \\ n\text{ 阶行列式的定义}\end{cases} \\ \text{行列式的性质} \\ \text{行列式按行(列)展开}\begin{cases}\text{按一行(列)展开} \\ \text{按 } k \text{ 行(列)展开}\end{cases} \\ \text{克莱姆法则}\end{cases}$$

三、常考题型及考研典型题精解

例 1-1 (2001 年考研)设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,则第四行各元素余子式之和的值为________.

解 第四行各元素的余子式分别为

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -56, \quad M_{42} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \quad M_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

故
$$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -28$$

例 1-2 (1991 年考研)n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

解 将行列式按第一列展开,得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} =$$

$$a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

注意 对于行列式的计算,主要有两种基本思路.

(1) 利用行列式的性质对行列式进行初等变换,将其化为三角形行列式,从而得到结果.

(2) 利用行列式按行(列)展开进行降阶或递推.

本题行列式按行(列)展开后得到相应的三角形行列式,再由三角形行列式的性质进行计算.

例1-3 (1996年考研)五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

解 原式 $\xlongequal{<1>} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \xlongequal{<2>}$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} -$$

$$a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} - a^5 =$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \end{vmatrix} - a^5 =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ -a & -1 & 1-a \end{vmatrix} + a^4 - a^5 = \cdots =$$

$$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

<1> 将第二、三、四、五列分别加到第一列;

<2> 按第一列展开.

例 1-4 (1997 年考研)设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$,则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1&1\\n-1&0&1&\cdots&1&1\\n-1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&1&1&\cdots&0&1\\n-1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=$$

$$(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=$$

$$(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

注意　如果行列式每行(列)元素之和相等,一般先将各行(列)元素相加,提取公因子后,再进行化简计算.

例 1-5　(1992 年考研)设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$ ________.

解　由行列式的性质

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab$$

例 1-6　已知 1326,2743,5005,3874 都能被 13 整除,不计算行列式,证明

$D=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}$ 能被 13 整除.

证　将第一、二、三列分别乘以 1000,100,10,都加到第四列,可得

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&1326\\2&7&4&2743\\5&0&0&5005\\3&8&7&3874\end{vmatrix}$$

由题设可知,13 能整除上述行列式的第四列中的每一元素,故 13 能整除 D.

例 1-7　设 $D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-4&2&1\\1&2&-3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$,求 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$. 其中 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解一　由于 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 的系数恰好是第三列的元素,所以 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$ 表示 D 中第三列元素与第二列元素对应的代数余子式的乘积之和,由行列式按行(列)展开定理可知,此和必为零. 即

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}=0$$

解二　因为 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式,故将 D 中第二列元素换为 $4,2,-3,6$,可得

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}=\begin{vmatrix}2&4&4&1\\3&2&2&1\\1&-3&-3&2\\5&6&6&2\end{vmatrix}=0$$

(因为第二列与第三列元素相同)

例 1-8　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&0&1&-1\\2&0&-1&1&2\\3&2&1&\frac{1}{2}&0\\1&-1&0&1&2\\2&1&3&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$