普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习指导

◆ 李秀珍 隋梅真 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习指导

主编　李秀珍　隋梅真

机械工业出版社

本书按照每章内容的实际需要，分为内容提要、例题解析、自测题三大部分．第一部分是内容提要，简明扼要地给出了每章要点．第二部分是例题解析，精选了解答困难、容易出错的题目．通过常见错解分析，帮助读者正确理解和运用有关概念、定理及法则，克服易犯错误；通过例题分析，帮助读者掌握正确的解题思路，总结解题规律；通过一题多解，使读者开阔视野、活跃思维．第三部分是自测试题．书后附有自测题的简答或提示，以便读者对照检查．

本书适合作为工科、理科的本科生、专科生学习高等数学的参考书或考研复习资料，也可以作为“专升本”的复习资料．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/李秀珍，隋梅真主编．—北京：机械工业出版社，2004.8

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-15054-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①李…，②隋…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 081300 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：郑　玫　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：饶　薇　责任印制：李　妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·10.75 印张·415 千字
定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是为配合《高等数学》教学而编写的教学辅导用书．编写本书的目的是帮助学生正确理解和掌握基本理论，总结解题规律，提高分析问题和解决问题的能力．本书特别重视通过例题分析，帮助读者掌握正确的解题思路，总结解题规律；通过一题多解，使读者开阔视野、活跃思维；通过对常见错解的分析，帮助读者正确理解和运用有关概念、定理及法则，克服易犯错误．

本书初稿由丁友征、于宁、于正文、王至中、王秀梅、车军领、李秀珍、李冬艳、林滋润、许国、刘翠香、苏永明、张明川、张晓平、张宪福、庞常词、郭连廷、赵永谦、崔强、黄福同、隋梅真、董令德、释恒璐、魏瑞菊等参加编写．

初稿曾以讲义的形式在山东建筑工程学院使用两年，受到广大师生的欢迎．现经崔强（第一、十一章）、于正文（第二、十二章）、张晓平（第三、七章）、黄福同（第四、九章）、侯淑轩（第五、六章）、隋梅真（第八章）、李秀珍（第十章）修改、补充、重写．最后由隋梅真（第一、二、三、七、八、十一章）、李秀珍（第四、五、六、九、十、十二章）统稿后出版．

本书承蒙王继忠（第一、二、三、六章）、韦忠礼（第五、七、八、九章）、闫九喜（第四、十、十一、十二章）三位教授审稿．

本书编写过程中，参阅了不少文献，在此，对本书中所引用参考书籍的诸位作者表示感谢！

由于作者水平有限，疏漏、不足之处在所难免，敬请读者、同行指正．

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

一、内容提要

1. 函数

定义　设 x,y 是两个变量,若 x 在其变化范围 D 内任取一个值,y 按照一定的法则有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数.记作 $y=f(x)$.x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域.

函数的性质　有界性、单调性、奇偶性、周期性.

基本初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

初等函数　由常数函数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

2. 极限

数列极限的定义　对于 $\forall \varepsilon>0$,$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,总有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限的"$\varepsilon-X$"定义　对于 $\forall \varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义　对于 $\forall \varepsilon>0$,$\exists \delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左(右)极限　对于 $\forall \varepsilon>0$,$\exists \delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时,总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限,记为

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right)$$

无穷小的定义　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小.

无穷大的定义　对于 $\forall M>0$,$\exists X>0(\delta>0)$,当 $|x|>X(0<|x-x_0|<\delta)$ 时,总有

$$|f(x)|>M$$

则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty(x\to x_0)$ 时为无穷大,记为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}} f(x)=\infty$.

无穷小的比较 设 $\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$,

(1)若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小,记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

(2)若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$,则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小.

(3)若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\ (C\neq0)$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小.

(4)若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$,则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小,记为 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

(5)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)}{x^k}=C\ (C\neq0,k>0)$,则称 $\beta(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小.

无穷小的性质 设 α、β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小,u 是有界量,c 是常数,$n\in\mathbf{N}$,则

(1)$\alpha\pm\beta$、$u\alpha$、$c\alpha$、$\alpha\beta$、α^n 是这一变化过程中的无穷小;

(2)$\beta\sim\alpha\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$;

(3)$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在$\Rightarrow\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$(等价无穷小代换定理).

极限的四则运算 设$\lim f(x)$及 $\lim g(x)$存在,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$
$$\lim[f(x)\div g(x)]=\lim f(x)\div\lim g(x)$$

注意 在商的运算法则中,分母的极限不为零.

特别地,$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$,$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

极限的有关定理

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 3(保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$A>0$ (或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

定理 4 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)\geqslant0$ (或 $f(x)\leqslant0$),则 $A\geqslant0$ (或 $A\leqslant0$).

定理 5 单调有界数列必收敛.

定理 6(夹逼准则) 若在 x_0 的某一邻域内,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\qquad\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

3. 连续

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

或
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

间断点 若函数 $f(x)$在 x_0 点不连续,则称 x_0 为 $f(x)$的间断点.

第一类间断点 左、右极限都存在的间断点.左、右极限存在且相等,又称为可去间断点.左、右极限存在但不相等,又称为跳跃间断点.

第二类间断点 左、右极限至少有一个不存在的间断点.

初等函数的连续性 初等函数在其定义域内均连续.

闭区间上连续函数的性质

定理 7(最大值、最小值定理) 闭区间上的连续函数在该区间上必取得最大值和最小值.

定理 8(零点定理) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 9(介值定理) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,若 c 是介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=c$.

二、例题解析

1. 函数

例 1.1 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域.

解 由题意知,要使 $f(x+a)+f(x-a)$有意义,只要

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

由于 $a>0$,所以 $-a<a$, $1-a<1+a$.于是当 $a<1-a$,即 $a<\dfrac{1}{2}$时,

$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,1-a]$；当$a=1-a$，即$a=\frac{1}{2}$时，其定义域为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$；当$a>1-a$，即$a>\frac{1}{2}$时，其定义域为空集.

注意 求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

例 1.2 设$f(x)=\begin{cases} x & |x|\geqslant 1 \\ x^2 & |x|<1 \end{cases}$，$g(x)=\lg x$，求

(1) $f[g(x)]$ (2) $g[f(x)]$

解 (1) $f[g(x)]=\begin{cases} \lg x & |\lg x|\geqslant 1 \\ (\lg x)^2 & |\lg x|<1 \end{cases}$

即
$$f[g(x)]=\begin{cases} \lg x & 0<x\leqslant\frac{1}{10}\text{或 } x\geqslant 10 \\ (\lg x)^2 & \frac{1}{10}<x<10 \end{cases}$$

(2) $g[f(x)]=\begin{cases} \lg x & x\geqslant 1 \\ \lg x^2 & -1<x<0\text{ 或 }0<x<1 \end{cases}$

例 1.3 已知$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$并写出它的定义域.(1998 年考研题)

解 因为$f(x)=e^{x^2}$，所以$f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，即$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，两边取对数，得$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，又$\varphi(x)\geqslant 0$，因此$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为$(-\infty,0]$.

2.极限

常用来证明极限存在的方法有：①用定义证明极限存在；②用极限的存在准则证明极限存在.

常用来求极限的方法有：①用极限的运算法则求极限；②用两个重要极限求极限；③用等价无穷小代换求极限；④用无穷小的性质求极限；⑤利用罗必达法则求极限(在第三章中介绍).

例 1.4 利用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

分析 用$\varepsilon-N$定义证明数列极限存在，关键是要找出正整数N.找N的一般方法如下：

对$\forall\varepsilon>0$，由$|x_n-a|<\varepsilon$适当放大为$|x_n-a|<\varphi(n)<\varepsilon$的形式，注意$\varphi(n)$要使得从不等式$\varphi(n)<\varepsilon$中容易解出$n>\psi(\varepsilon)$.取$N>[\psi(\varepsilon)]$，则当$n>N$ (N不惟一)时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$成立.

证明 对$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}<\varepsilon$，只要$\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}}$

$=\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$(当然也可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+2, N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+3$, $\cdots$),则当 $n>N$ 时,总有 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$ 成立,由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

例 1.5 求下列极限 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\cdots+\frac{n}{n^k}\right)$($k$ 为常数)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\cdots+\frac{n}{n^k}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k-2}}+\frac{1}{n^{k-1}}\right)=\begin{cases}0 & k>2\\ \frac{1}{2} & k=2\\ \infty & k<2\end{cases}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

小结 求数列极限,当项数与 n 有关时,通常不能直接用极限法则,应先将其化为项数与 n 无关的若干项,再求极限.

例 1.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$

解 当 $x>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-e^{-nx})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+e^{-nx})}=1$

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=0$

当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1$

常见错解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-e^{-nx})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+e^{-nx})}=1$

错误原因：忽视了对参数取值范围的讨论.

例 1.7 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内大于零，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

分析 与例 1.4 类似，用 $\varepsilon-\delta$(或 $\varepsilon-X$)定义证明函数极限的关键是想办法找到 δ(或 X)，其一般方法如下：

对 $\forall\varepsilon>0$，由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 适当放大为 $|f(x)-A|<\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon$(或 $|f(x)-A|<\cdots<C\varphi(|x|)<\varepsilon$)的形式，注意 $\varphi(|x-x_0|)$(或 $\varphi(|x|)$)要使得从不等式 $\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon$(或 $\varphi(|x|)<\varepsilon$)中容易解出 $|x-x_0|<\psi(\varepsilon)$. 取 $\delta=\psi(\varepsilon)$(或取正数 $X=\psi(\varepsilon)$)，则当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|<\varepsilon$ 成立.

① 当 $A=0$ 时，上式变为 $|\sqrt{f(x)}-0|<\varepsilon$，即 $|\sqrt{f(x)}|<\varepsilon$.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，所以总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-0|<\varepsilon^2$，故有 $\sqrt{|f(x)|}<\varepsilon$，所以 $|\sqrt{f(x)}|<\varepsilon$.

② 当 $A>0$ 时，要使 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\varepsilon$，只要 $\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}<\varepsilon$ 即可.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\sqrt{A}\varepsilon$，故有 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|<\dfrac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|<\dfrac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{A}\varepsilon=\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$$

例 1.8 求下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$(1998 年考研题)

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$

一般地,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\\ \infty & m<n\end{cases}$$

这里 $a_0b_0\neq 0$.

例 1.9 求极限$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

解 因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,根据无穷小的运算性质,得

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

常见错解:(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$

错误原因：(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$的极限不存在，不能运用积的极限运算法则来求此极限.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$不是重要极限，利用重要极限来求此极限是错误的.

例 1.10 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

常见错解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$

错误原因：求解时错误地运用了结论：若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$. 但这个结论在当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时不成立. 在此题中 $\alpha=\sin x$，$\beta=\tan x$，$\alpha'=\beta'=x$.

注意 (1) 利用等价无穷小代换求某些多个因式乘积的极限时比较简便，但用等价无穷小代换求和差的极限时要慎重.

(2) 常用的等价无穷小有：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x)\sim x$；$\arctan x\sim x$；$e^x-1\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$；$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

例 1.11 设 $x\to0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　).

(A) 5　(B) 4　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

解 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$

当 $x\to0$ 时，$[e^{x(\cos x^2-1)}-1]\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\dfrac{x^4}{2}\right)$. 所以，$n=5$，故选(A).

例 1.12 已知 $x\to0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\cos x-1$，求 α.

解 当 $x\to0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}\alpha x^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，由等价无穷小的性质得$\dfrac{1}{2}\alpha x^2\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\alpha=-1$.

例 1.13 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

分析 本题属于$\dfrac{0}{0}$型未定式的极限. 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$，$e^x-1\sim$

x，故$\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin 2x$，$e^{3x}-1\sim 3x$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，又$\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$，故

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)\sin 2x=0$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin 2x}{2(e^{3x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin 2x}{2\times 3x}=2$$

又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

例 1.14 证明 $f(x)=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界，且当 $x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大量.

证明 对于$\forall M>0$，$\exists n_0>M$，记 $x_0=2n_0\pi\in(-\infty,+\infty)$，则

$$f(2n_0\pi)=2n_0\pi\cos(2n_0\pi)=2n_0\pi>M$$

所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

另外，取 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$，因为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$$

$$f(x_n)=f\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

所以当 $x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大量.

例 1.15 求下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$(1995 年考研题) (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

(2) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{(2x-1)(2x+1)}$$
$$=-\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{(2x+1)}=-\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$

注意 (1)若通过恒等变形或变量代换能化为下列形式之一

$$\lim_{\psi\to 0}\frac{\sin\psi}{\psi},\quad \lim_{\psi\to 0}(1+\psi)^{\frac{1}{\psi}},\lim_{\psi\to\infty}\left(1+\frac{1}{\psi}\right)^{\psi}$$

可以分别利用重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

来求极限.

(2) 对形如 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限，若 $\lim u(x)=a>0,\lim v(x)=b$，则 $\lim u(x)^{v(x)}=a^{b}$.

例 1.16 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，求 a.（1996 年考研试题）

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{a}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{a}=\mathrm{e}^{3a}$$

所以 $\mathrm{e}^{3a}=8,a=\ln 2$.

例 1.17 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}+ax+b}{\sin(x^{2}-1)}=3$，求常数 a、b 的值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x^{2}-1)=0$，故只有当 $\lim\limits_{x\to 1}(x^{2}+ax+b)=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}+ax+b}{\sin(x^{2}-1)}$才存在，由此得 $1+a+b=0$，即 $b=-1-a$，将其代入已知极限式的左边，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}+ax+b}{\sin(x^{2}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}+ax-a-1}{\sin(x^{2}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1+a(x-1)}{x^{2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1+a}{x+1}=\frac{a+2}{2}$$

于是$\frac{a+2}{2}=3$，得 $a=4$，所以 $b=-5$.

例 1.18 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^{n}+3^{n})^{\frac{1}{n}}$

解 设 $x_{n}=(1+2^{n}+3^{n})^{\frac{1}{n}}=3\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}}$，由于 $1<1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}<3$，所以 $3<x_{n}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$，由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^{n}+3^{n})^{\frac{1}{n}}=3$.

本题可推广到更一般的结论：

$$\lim_{n\to\infty}(a_{1}^{n}+a_{2}^{n}+\cdots+a_{m}^{n})^{\frac{1}{n}}=\max\{a_{1},a_{2},\cdots,a_{m}\}$$

这里 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{m}>0$.

例 1.19 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^{2}+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}\right)=1$

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，所以由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

例 1.20 证明数列$\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…的极限存在，并求其极限.

分析 在目前所学的知识范围内证明极限存在，一般有两种方法，一种是利用定义证明，另一种是利用极限存在的两个准则证明.证明极限等于某值时，常用定义证明.本例可以考虑用极限存在的准则来证明.

证明 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+x_1}$，…，$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，

(1) 证明$\{x_n\}$是单调的.

当 $n=1$ 时，显然有 $x_2>x_1$.

假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $x_k>x_{k-1}$；当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}=x_k$.

所以对于任意自然数 n，总有 $x_n>x_{n-1}$成立，即数列$\{x_n\}$单增.

(2) 证明$\{x_n\}$是有界的.

由 $0<x_n<x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$得

$$x_n^2<2+x_n \text{ 即 } x_n^2-x_n-2=(x_n-2)(x_n+1)<0$$

故 $1<x_n<2$，即$\{x_n\}$有界.

根据单调有界数列必有极限的准则，数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}$$

即
$$a=\sqrt{2+a}$$
解得
$$a=2\quad(a=-1\text{ 舍去})$$
于是有
$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

例 1.21 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\ (a>1)$

分析 对于$\forall\varepsilon>0$，由$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon$，解出 $\varphi(n)<\varepsilon$ 比较困难，由 $a>1$，令 $a=1+b$，$b>0$ 利用二项式定理将 a^n 展开.

证明 设 $a=1+b$，其中 $b>0$. $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+b)^n}=\frac{n}{C_n^0+C_n^1b+C_n^2b^2+\cdots+C_n^nb^n}$$

$$<\frac{2n}{n(n-1)b^2}<\frac{4}{nb^2}<\varepsilon \quad \left(这里\ n-1>\frac{n}{2},即\ n>2\right)$$

只要 $n>\frac{4}{b^2\varepsilon}$ 即可，取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{b^2\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

例 1.22 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

分析 对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，只要 $0\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$，即 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$，或 $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$，由例 1.21 的结论易证明该不等式成立.

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$，因为 $1+\varepsilon>1$，由例 1.21，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}=0$，所以存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}<1$ 或 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$，而 $1\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$，即当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3.连续

例 1.23 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 的连续性.

分析 讨论分段函数在分界点处的连续性，采用的方法是利用结论

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$$

本题中，当 $x\neq0$ 时，$f(x)$ 显然是连续的，所以问题的关键是讨论在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\neq f(0)$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0=f(0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续但不左连续，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

例 1.24 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin^2\frac{1}{x} & x>0\\ a+x^2 & x\leqslant0\end{cases}$，怎样选择 a，才能使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a=f(0)$