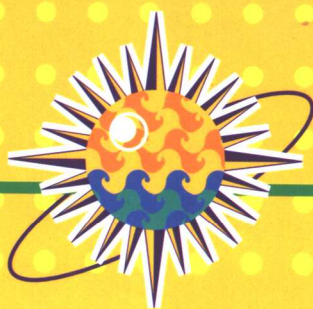




学海拾贝系列丛书

XUEHAISHIBEI

西工大附中 高考教案

☆ 西北工业大学附中 编著 ☆

- ☆ 2004年51位学子考入北大、清华
- ☆ 连续6年高考升学率达100%
- ☆ 全国罕见，雄居西北之冠
- ☆ 东西强强联手，实力打造品牌

2005

数学高考直通车

同济大学出版社

学海拾贝系列丛书

2005 数学高考直通车

西北工业大学附中 编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

(学海拾贝系列丛书)

2005 数学高考直通车/西北工业大学附中编著. —上海:同济大学出版社,2004.9

ISBN 7-5608-2784-5

I. 2... II. 西... III. 数学课-高中-升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 076120 号

学海拾贝系列丛书

2005 数学高考直通车

西北工业大学附中 编著

责任编辑 李炳钊 责任校对 李 彪 装帧设计 范晓荣

出 版 同济大学出版社
发 行

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 西安建筑科技大学印刷厂印刷

开 本 787mm × 1092mm 1/16

印 张 20.25

字 数 520 000

版 次 2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2784-5/G · 279

定 价 25.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

学海拾贝系列丛书编委会

主 编 王永智

副 主 编 王月和 王万斌 秦玉海

委 员 丁维汉 王万斌 王月和 王永智

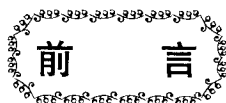
李 焕 汪 玺 陆 珂 张汉升

尚 林 秦玉海

数学分册

主 编 陆 珂

策划编辑 王有文 李炳钊



西北工业大学附属中学创建于1971年,是陕西省重点中学。多年来,学校坚持全面贯彻党的教育方针,围绕“办一流学校,育高素质人才”的奋斗目标,努力提高综合办学实力,在陕西省范围内实现了师资力量、办学条件、教风学风、校园文化“四个一流”,教育理念、学校管理、教育质量“三个领先”,形成了“以人为本、质量第一、崇尚务实、追求卓越”的办学特色,被誉为“古城管理之冠,三秦质量之光”。

在多年的教育教学实践中,我校教师积累了比较丰富的经验。他们不仅有先进的教育教学理念,对教育教学规律有着比较深刻的理解和比较准确的把握,还对考试说明和高考改革有比较深入的研究,能够使教学不断向优质高效的境界逼近。他们善于研究学生的学习,对学生在学习过程中所遇到的困难和可能出现的问题的长期的、有计划的搜集整理和探索研究,使他们的教学的预见性、有效性不断增强,学生学习成绩逐年提高。正是由于有一支专业知识过硬,实际经验丰富的教师队伍,我校的教育教学工作取得了显著的成绩。1999年至2004年6年间,高考升学率保持100%,重点线达线率保持在96%以上,3名学生摘取全省三届理科高考状元,205名学生考入北大、清华,大批学生考入其他名牌大学。2004年,学校包揽高考全省理科前4名,8名学生进入高考全省理科前10名,51名学生考入北大、清华。自2001年西安市实行中考至2004年,学校包揽4届西安市中考状元,其中多次囊括前三名,高分段学生人数及比例连年以绝对优势位居西安市首位。数、理化、化学科竞赛成绩一直高居陕西省第一。2001年至2004年上半年,全校学生在学科竞赛中累计获国家级奖项163人次,其中一等奖32人次;累计获省级奖项1637人次,其中一等奖316人次,获奖规格和总人数在全省遥遥领先。

西北工业大学附属中学被誉为培养英才的摇篮,曾被评为全国德育先进学校,并长期承担国家、省教学实验研究任务。在新的世纪里,西北工业大学附属中学正在深化改革,加快发展,致力于把学校办成既出人才,又出经验,在国内有重要影响、有鲜明特色的名牌学校。

为了交流教学研究成果,与兄弟学校共同探讨教学改革和教学创新的新途径,应同济大学出版社邀请,我们组织本校在岗的数十位骨干教师,以“考试说明”为依据,以最新考题为基础,结合学科特点和多年的教学实践,按照透视重点难点,梳理问题和方法,解析典型例题,构建知识体系,渗透学科综合,联系现实生活,激发创新思维,培养应变能力的思路和要求,精心编写了这套《学海拾贝系列丛书》。可以说,这套丛书基本上体现了我们西北工业大学附属中学的教学实际和培优转差经验,称得上是高中各年级学生温故知新的益友,对高中教师也有一

定的参考价值。

《学海拾贝系列丛书》由《2005 数学高考直通车》、《2005 语文高考直通车》、《2005 英语高考直通车》、《2005 物理高考直通车》、《2005 化学高考直通车》和《2005 年生物高考直通车》组成。丛书,由王永智任主编,王月和王万斌、秦玉海任副主编。本书由赵晓非、任毅、蒋区明、刘俊民、陆珂、焦和平、仝玉强、王兴卫和苏有智等编写,最后由陆珂统纂定稿。

由于时间仓促,疏误之处在所难免,敬请读者朋友批评指正。

西北工业大学附属中学校长王永智

2004 年 7 月于西北工业大学附属中学

目 录

前 言

第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 集合的概念与运算	(2)
1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式	(5)
1.3 简易逻辑	(9)
能力测试	(12)
第二章 函数	(15)
2.1 映射与函数	(17)
2.2 指数与指数函数	(30)
2.3 对数与对数函数	(37)
能力测试	(43)
第三章 数列	(46)
3.1 数列的基本概念	(47)
3.2 等差数列与等比数列	(49)
3.3 等差、等比数列的性质及应用	(52)
3.4 数列求和	(54)
3.5 数列的应用	(57)
能力测试	(59)
第四章 三角函数	(60)
4.1 任意角的三角函数	(61)
4.2 两角和与差的三角函数	(64)
4.3 三角函数的图像与性质	(71)
能力测试	(81)
第五章 平面向量	(83)
5.1 向量的概念及基本运算	(84)

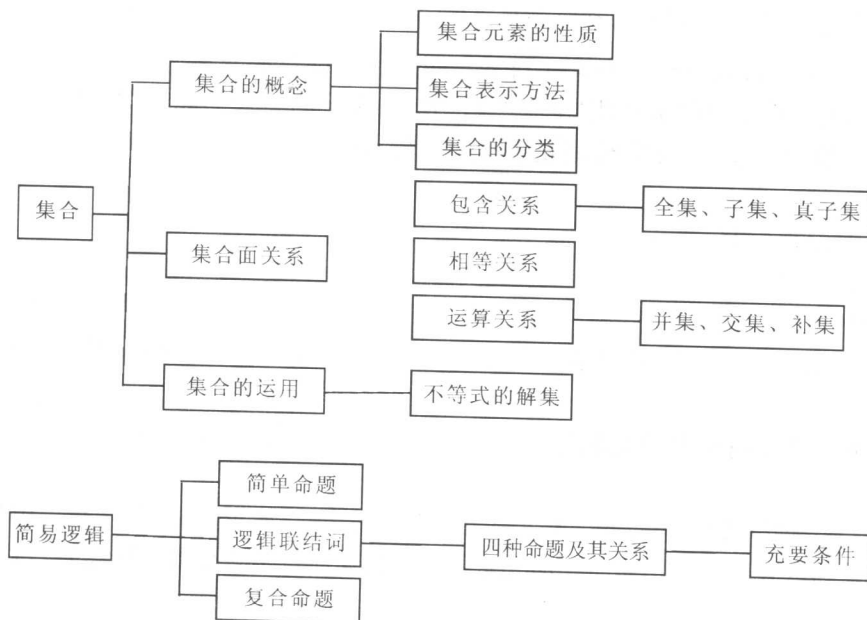
5.2 向量的坐标运算	(86)
5.3 平面向量的数量积	(88)
5.4 线段的定比分点及平移	(90)
5.5 正弦、余弦定理及应用	(93)
能力测试	(95)
第六章 不等式	(97)
6.1 不等式的概念和性质	(98)
6.2 不等式的证明	(103)
6.3 不等式的解法	(109)
能力测试	(114)
第七章 直线和圆的方程	(117)
7.1 直线方程	(117)
7.2 线性规划	(123)
7.3 圆的方程	(128)
能力测试	(132)
第八章 圆锥曲线方程	(135)
8.1 椭圆	(135)
8.2 双曲线	(142)
8.2 抛物线	(147)
能力测试	(154)
第九章 直线、平面、简单几何体	(156)
9.1 平面 空间两条直线	(158)
9.2 直线、平面的平行关系	(162)
9.3 直线、平面的垂直关系	(166)
9.4 空间向量	(172)
9.5 空间角与距离	(177)
9.6 简单多面体与球	(182)
能力测试	(186)
第十章 排列、组合和概率	(190)
10.1 两个计数原理	(192)
10.2 排列	(195)
10.3 组合	(197)
10.4 二项式定理	(200)

10.5 随机事件的概率	(203)
10.6 互斥事件有一个发生的概率	(207)
10.7 相互独立事件同时发生的概率	(211)
能力测试	(215)
第十一章 概率与统计	(217)
11.1 随机变量	(218)
11.2 统计	(225)
能力测试	(233)
第十二章 极限	(236)
12.1 数列极限与数学归纳法	(236)
12.2 函数的极限及其运算法则	(241)
12.3 函数的连续性	(244)
能力测试	(249)
第十三章 导数	(251)
13.1 导数的概念与运算	(251)
13.2 导数的应用	(255)
能力测试	(259)
第十四章 复数	(261)
能力测试	(264)
综合测试题(A)	(266)
综合测试题(B)	(269)
参考答案	(272)

第一章 集合与简易逻辑

复习目标、要求、复习方法指导

1. 知识网络



2. 考试内容、要求、高考命题动向

考试内容:集合,子集,补集,交集、并集,逻辑联结词,四种命题,充要条件.

考试要求:理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合;理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充要条件的意义.

高考命题动向:集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一,在高考中这部分内容每年总有题目出现,一般都是基本题,综合性较小,今年试题可能仍是一道选择题或填空题,主要考查“集合”,“充分条件与必要条件”的基本概念与基本性质以及运算能力.试题的综合深度较浅,可能是集合与映射等知识的小型综合,或是与函数、不等式结合等等.

3. 复习方法指导

在复习中首先把握基础性知识,深刻理解本单元的基本知识点、基本数学思想和基本数学方法.重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法.要真正掌握数形结合思想即用文氏图解题.既要灵活掌握小型综合题型,也要对有一定难度的大型综合题型进行有针对性的

训练与准备.

1.1 集合的概念与运算

重点难点分析

1. 集合的概念

(1) 一组对象的全体形成一个集合, 集合中元素具有确定性, 互异性和无序性. 表示集合的方法有: 字母表示法, 列举法, 描述法, 韦恩图表示法.

认识集合时, 要分清元素及元素所满足条件. 如: $A = \{x | y = \sqrt{x^2 + 1}\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x^2 + 1}\}$, $C = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 + 1}\}$, $D = \{y = \sqrt{x^2 + 1}\}$ 表示四个不同的集合.

(2) 元素与集合之间的关系用“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”表示, 集合与集合之间的关系用“ $\subseteq$ ”、“ $\subsetneq$ ”、“ $=$ ”表示. 但要注意元素与集合间的相对性. 如: $\phi \in \{\phi\}$, $\phi \subseteq \{\phi\}$, $\phi \subsetneq \{\phi\}$, $\{a\} \in \{\{a\}, \{b\}\}$.

常用集合之间的包含关系:

$$\phi \subsetneq N_+ \subsetneq N \subsetneq Z \subsetneq Q \subsetneq R \subsetneq C.$$

2. 集合的运算

(1) 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集. 即: $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 叫 A 与 B 的并集, 即: $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

(2) 含有所要研究的各集合的全部元素的集合叫全集. 一般用 U 表示. 全集是相对的.

若 $A \subseteq U$, 则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的补集. 即: $C_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$.

3. 常用结论

$$(1) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

$$(2) C_U(A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B).$$

$$(3) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$(4) \text{由 } n \text{ 个元素所组成的集合, 其子集个数为 } 2^n \text{ 个. 即有: } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

$$(5) \text{注意空集是任何集合的子集, 即 } \phi \subseteq A.$$

典型例题解析

例 1 已知集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$. $P = \{x | x = \frac{t}{2} + \frac{1}{6}, t \in \mathbf{Z}\}$, 试判断 M, N, P 间的关系.

分析 本题主要考查集合的特征性质.

$$\text{解 } \because M = \left\{x \mid x + \frac{1}{6} = \frac{6m+1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$N = \left\{ x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$P = \left\{ x \mid x = \frac{t}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3t+1}{6}, t \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\therefore M \subsetneq N = P.$$

例2 已知 $A = \{a, b\}$, $B = \{x \mid x \subseteq A\}$, 判断 A, B 间关系.

分析 考查元素与集合间的相对性.

解 $\because A = \{a, b\}, B = \{x \mid x \subseteq A\}, \therefore B = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$

$$\therefore A \in B.$$

例3 已知 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, x\}$, 且 M, N 均为三元素集合, 试求集合 $P = \{x+y \mid M=N\}$.

分析 考查集合元素的三要素及集合相等的概念.

解 由 $\lg(xy)$ 知: $xy > 0$.

由 $N = \{0, |x|, y\}$ 知: $x < 0$,

$\therefore$ 由 $M=N$ 可得: $xy = |x|, \lg(xy) = 0$,

$\therefore xy = 1, y = -1, x = -1$,

$$\therefore P = \{x+y \mid M=N\} = \{-2\}.$$

例4 设 $f(x) = x^2 + ax + b, A = \{x \mid f(x) = x\} = \{a\}$. $M = (b, a)$. 求集合 M .

分析 考查一元二次方程有相等实数根的要件, 及用区间表示数集的知识点.

解 $\because A = \{x \mid f(x) = x\} = \{x \mid x^2 + (a-1)x + b = 0\} = \{a\}.$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + (a-1)a + b = 0, \\ \Delta = (a-1)^2 - 4b = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之得: } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\therefore M = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3} \right) = \left\{ x \mid \frac{1}{9} < x < \frac{1}{3} \right\}.$$

例5 集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $C = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 已知 $A \cup B = A, A \cap C = C$, 求实数 a, m 的值.

分析 考查集合间的隐含关系及子集的概念.

解 $\because A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\},$

$B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{x \mid (x-1)(x-a+1) = 0, x \in \mathbf{R}\}$

由 $A \cup B = A$ 知: $B \subseteq A$,

$\therefore B = \{1\}$ 或 $B = \{1, 2\}$.

当 $B = \{1\}$ 时, $a-1=1$, 得 $a=2$.

当 $B = \{1, 2\}$ 时, 由 $a-1=2$ 得: $a=3$.

$\therefore C = \phi$, 或 $C = \{1, 2\}$.

由 $A \cap C = C$, 知: $C \subseteq A$.

当 $C = \phi$ 时, 由 $\Delta = m^2 - 8 < 0$ 得: $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

当 $C = \{1, 2\}$ 时, 由韦达定理得: $m = 1 + 2 = 3$.

∴ 所求 a 值为 2 或 3. m 值为 3 或 $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

例 6 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + mx - y + 2 = 0\}$, $B = \{(x, y) | x - y + 1 = 0, \text{且 } 0 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

分析 将集合问题转化为方程在某一区间上有解的问题, 可借助于二次函数的图像来解决.

解 由 $\begin{cases} x^2 + mx - y + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$ 得: $x^2 + (m+1)x + 3 = 0$.

由 $A \cap B \neq \emptyset$ 知: 方程 $x^2 + (m+1)x + 3 = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有实数解. 令 $f(x) = x^2 + (m+1)x + 3$, 则:

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 12 \geq 0, \\ 0 < -\frac{m+1}{2} < 2 \\ f(0) = 3 > 0 \\ f(2) = 2m+9 > 0. \end{cases} \quad \text{或 } f(0) \cdot f(2) = 3(2m+9) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{9}{2} < m \leq -2\sqrt{3}-1, \text{ 或 } m \leq -\frac{9}{2}.$$

∴ 满足题意的实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2\sqrt{3}-1)$.

例 7 集合 $M = \{(x, y) | x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$, $N = \{(x, y) | y \geq x + a\}$, 且 $M \cap N = M$, 求 a 的取值范围.

分析 可利用图形的位置关系求解.

解 $M = \{(x, y) | x^2 + 2x + y^2 \leq 0\} = \{(x, y) | (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

$N = \{(x, y) | y \geq x + a\} = \{(x, y) | x - y + a \geq 0\}$.

由 $M \cap N = M$ 知: $M \subseteq N$.

故圆 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 在直线 $x - y + a = 0$ 的上方.

∴ 圆心 $(-1, 0)$ 在直线 $x - y + a = 0$ 的上方且到直线的距离大于等于半径 1.

$$\text{即: } \begin{cases} 0 > -1 + a \\ \frac{1 - |-1 + a|}{\sqrt{2}} \geq 1. \end{cases}$$

解之得: $a \leq 1 - \sqrt{2}$.

∴ a 的取值范围为 $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$.

能力训练 1

一、选择题

1. 非空集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且若 $a \in S$, 则 $6 - a \in S$, 那么 S 的个数是 ()
A. 4 B. 5 C. 7 D. 31
2. 若集合 $A = \{2, 3, a^2 + 4a + 2\}$, $B = \{0, 7, 2 - a, a^2 + 4a - 2\}$, 且 $A \cap B = \{3, 7\}$, 则实数 a 的值为 ()
A. 1 B. -5 C. 1 或 -5 D. -1
3. 若集合 $M = \{y | y = \sqrt{x-1}, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. M B. N C. ϕ D. 无法确定

4. 满足 $\{a\} \subseteq A \subsetneq \{a, b, c, d\}$ 的集合 A 的个数为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

5. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b, a, b \in \mathbb{R}, A = \{x | x = f(x), x \in \mathbb{R}\}, B = \{x | x = f[f(x)], x \in \mathbb{R}\}$. 则 A 与 B 间的关系为 ()

- A. $A \subseteq B$ B. A, B 间包含关系由 a, b 决定
C. $B \subseteq A$ D. A, B 间不存在包含关系

6. 如图 1-1, I 为全集, M, N, S 是 I 的子集, 则图中阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $(C_I M \cap C_I N) \cap S$ B. $C_I (M \cap N) \cap S$
C. $(C_I N \cap S) \cup M$ D. $(C_I M \cap S) \cup N$

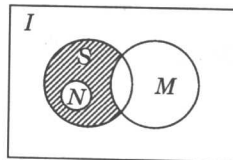


图 1-1

7. 集合 A 中有 m 个元素, 若在 A 中增加一个元素, 则它的子集个数将增加 _____ 个.

8. 设 $a < 0 < b < |a|, A = \{x | a \leq x \leq b\}, B = \{x | -b \leq x \leq -a\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

9. 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}, A = \{|a + 1|, 2\}, C_I A = \{5\}$. 那么集合 $M = \{x | x = \log_2 |a| \}$ 的子集个数为 _____ 个.

10. $A = \{x | x^2 - ax \leq x - a\}, B = \{x | 1 \leq \log_2(x + 1) \leq 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a \in$ _____.

三、解答题

11. 设集合 $P = \{(x, y) | \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, x, y \in \mathbb{R}^+\}$, 已知 $(a, b) \in P$, 求 ab 的最小值.

12. 设集合 $A = \{x | 2^{x^2 - 3x + 2} = 1\}, B = \{x | x^2 - ax + (a - 1) = 0\}, C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A, A \cap C = C$, 求实数 a, m 的值.

13. 已知集合 $M = \{(x, y) | x^2 + 2x + y^2 = 0\}, N = \{(x, y) | y = x + a\}$, 且 $M \cap N \neq \phi$, 求实数 a 的取值范围.

1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式

重点难点分析

1. 含绝对值的不等式的解法

解含绝对值的不等式的基本思想是把含绝对值的不等式等价转化为不含绝对值的不等式, 即去绝对值符号. 常用的转化方法有:

(1) 利用关系: $|f(x)| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a$.

$|f(x)| > a (a > 0) \Leftrightarrow f(x) > a$, 或 $f(x) < -a$.

(2) 利用绝对值的意义分类讨论去绝对值. 如:

$|f(x)| > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$

(3) 两边平方去绝对值, 如: $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

(4) 零点分段去绝对值. 如解不等式 $|f(x)| + |g(x)| > m$ 时, 找零点、分段, 在每段上去绝对值符号并解不等式, 最后求这些不等式的解集的并集即为原不等式的解集.

2. 一元二次不等式的解法

(1) 化不等式为标准形式: $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ 并保证二次项系数 $a > 0$.

(2) 计算判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$, 若 $\Delta > 0$, 求出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 两根 x_1, x_2 , ($x_1 < x_2$).

(3) 写出解集

若 $\Delta > 0$, 则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解在两根之外, 即其解集为 $\{x | x > x_2, \text{ 或 } x < x_1\}$. $ax^2 + bx + c < 0$ 的解在两根之间, 即其解集为 $\{x | x_1 < x < x_2\}$.

若 $\Delta = 0$, 则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x \neq -\frac{b}{2a}\}$, $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 ϕ .

若 $\Delta < 0$, 则 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 R , $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 ϕ .

典型例题解析

例 1 解不等式: $1 < |2x + 1| \leq 3$.

分析 可根据绝对值意义去绝对值符号, 也可将其转化为与之等价的不等式组, 或利用关系 $a \leq |f(x)| \leq b$ ($b > a > 0$) $\Rightarrow a \leq f(x) \leq b$, 或 $-b \leq -f(x) \leq -a$ 求解.

解法 1 不等式可化为

$$(1) \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 1 < 2x + 1 \leq 3 \end{cases}, \text{ 或 } (2) \begin{cases} 2x + 1 < 0 \\ 1 < -(2x + 1) \leq 3 \end{cases}.$$

由 (1) 得: $0 < x \leq 1$.

由 (2) 得: $-2 \leq x < -1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | 0 < x \leq 1, \text{ 或 } -2 \leq x < -1\}$.

解法 2 不等式可化为

$$\begin{cases} |2x + 1| > 1 & (1) \\ |2x + 1| \leq 3 & (2) \end{cases}$$

由式(1)得: $x > 0$ 或 $x < -1$.

由式(2)得: $-2 \leq x \leq 1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | 0 < x \leq 1, \text{ 或 } -2 \leq x < -1\}$.

解法 3 不等式可化为

$$(1) 1 < 2x + 1 \leq 3, \text{ 或 } (2) -3 \leq 2x + 1 < -1.$$

由(1)得: $0 < x \leq 1$. 由(2)得: $-2 \leq x < -1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | 0 < x \leq 1, \text{ 或 } -2 \leq x < -1\}$.

例 2 解不等式: $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$.

分析 利用零点分段讨论法去绝对值符号.

解 若 $|x - 1| = 0$, 则 $x = 1$; 若 $|x - 2| = 0$, 则 $x = 2$.

这样 1, 2, 把数轴分成了三部分, 原不等式可化为以下三个不等式组.

$$(1) \begin{cases} x \leq 1 \\ -(x - 1) + (x - 2) > x + 3, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x - 1 - (x - 2) > x + 3, \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x > 2 \\ x - 1 + x - 2 > x + 3 \end{cases}$$

由(1)得: $x < 0$. 由(2)得: $x \in \phi$. 由(3)得: $x > 6$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | x < 0, \text{或 } x > 6\}$.

例3 解不等式: $|x^2 - x| < 2x - 2$.

分析 利用绝对值意义分类讨论去绝对值.

解 不等式可化为

$$(1) \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x < 2x - 2. \end{cases}, \text{或} (2) \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -(x^2 - x) < 2x - 2 \end{cases}$$

由(1)得: $1 < x < 2$, 由(2)得: $x \in \phi$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$.

例4 解关于 x 的不等式 $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 > 0$.

分析 先求出方程 $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0$ 的根, 再根据一元二次不等式与方程的关系求出原不等式的解集. 但在解含参方程时, 要尽量用因式分解法, 若不行, 再用求根公式法.

解 $\because$ 方程 $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = (x + a)\left(x + \frac{1}{a}\right) = 0$ 的两根分别为 $-a$ 和 $-\frac{1}{a}$,

$\therefore$ 当 $-a = -\frac{1}{a}$ 时, 即当 $a = \pm 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq -a\}$.

当 $-a > -\frac{1}{a}$ 时, 即当 $a < -1$ 或 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -a, \text{或 } x < -\frac{1}{a}\}$.

当 $-a < -\frac{1}{a}$ 时, 即当 $-1 < a < 0$ 或 $a > 1$, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > -\frac{1}{a}, \text{或 } x < -a\right\}$.

例5 已知 $kx^2 - kx - 2 > 0$ 的解集为 ϕ , 求实数 K 的取值范围.

分析 k 的变化影响不等式的解集, 应就 K 的不同取值进行讨论.

解 当 $k = 0$ 时, 不等式变为 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x - 2 > 0$, 其解集为 ϕ .

当 $k \neq 0$ 时, 若 $k > 0$ 则函数 $y = kx^2 - kx - 2$ 的图像是开口向上的抛物线, 不等式 $kx^2 - kx - 2 > 0$ 的解集不可能是 ϕ .

当 $K < 0$ 时, 由不等式 $kx^2 - kx - 2 > 0$ 的解集为 ϕ 得: $\Delta = k^2 + 8k \leq 0$.

$\therefore -8 \leq k < 0$.

综上所述: 当 $-8 \leq k \leq 0$ 时, 原不等式解集为 ϕ .

能力训练2

一、选择题

1. 若 $|x - 4| + |x - 3| < a$ 在 R 上的解集为 ϕ , 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 3)$ B. $(-\infty, 1]$
 C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

2. 不等式 $\log_2 \left| x - \frac{1}{2} \right| < 1$ 的解集为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
C. $(1, +\infty)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

3. 已知函数 $y = mx^2 + (m-3)x + 1$ 的图像与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

4. 已知 $2a+1 < 1$, 关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x | x > 5a, \text{ 或 } x < -a\}$ B. $\{x | x < 5a, \text{ 或 } x > -a\}$
C. $\{x | -a < x < 5a\}$ D. $\{x | 5a < x < a\}$

5. 已知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 2\right\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 ()

- A. $\left\{x \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{x \mid x < -3, \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$
C. $\left\{x \mid -2 < x < \frac{1}{3}\right\}$ D. $\left\{x \mid x < -2, \text{ 或 } x > \frac{1}{3}\right\}$

6. 若不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 的解集为 R , 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 2]$ C. $(-2, 2]$ D. $(-\infty, -2)$

二、填空题

7. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, 则不等式 $|f^{-1}(x)| > 1$ 的解集为_____.

8. 不等式 $|x| > \frac{1}{x-1}$ 的解集是_____.

9. 不等式 $x^2 - 6|x| + 9 > 0$ 的解集是_____.

10. 不等式 $\frac{x+7}{3x^2+2x+5} \geq 1$ 的解集是_____.

三、解答题

11. 已知 $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4$.

(1) 如果对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 如果对 $x \in [-3, 1]$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

12. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 试求 $|ax+2| \geq |2x+b|$ 的解集为 R 时, a, b 应满足的条件.

13. 关于实数 x 的不等式 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$ 的解集为 A , $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0$ 的解集为 B , 求使 $A \subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

14. 关于 x 的不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集为 $\{x | 4 < x < b\}$, 求 a, b 的值.