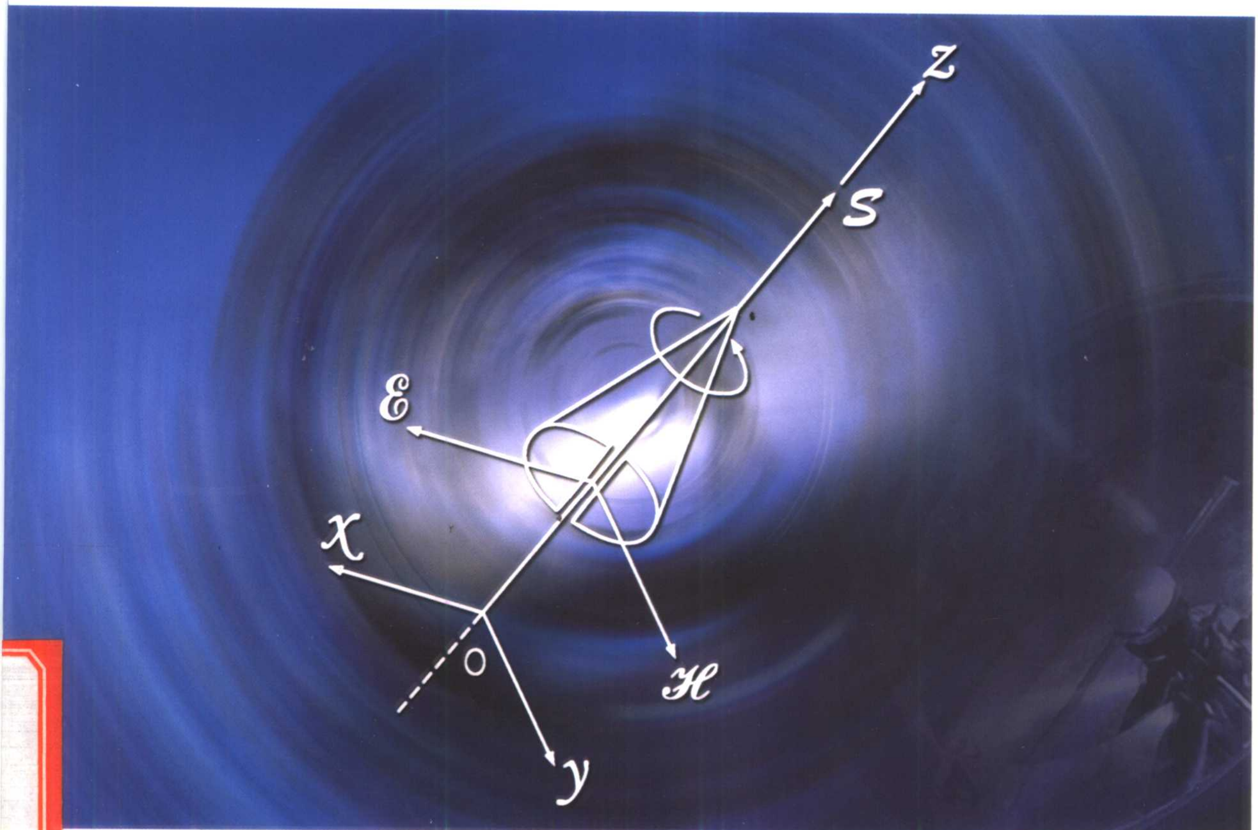
《电磁场与电磁波》配套教材

电磁场与电磁波
习题精解

焦其祥 主编

章茂林 张阳安
张 欣 王亚峰 编



科学出版社
www.sciencep.com

电磁场与电磁波习题精解

焦其祥　主编

章茂林　张阳安
张　欣　王亚峰　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与作者所编写的、由科学出版社出版的《电磁场与电磁波》配套的教辅书，参照部颁工科高校电磁场教学大纲编写而成。书中共收录了两百余道习题。全书共分十一章，每一章包括内容提要、习题解答两部分；每一道例题包括分析、解、点评三部分。本书内容提要简练、重点突出；选题典型，与教学重点紧密结合；解题过程强调思路清晰，强调分析方法得力和多样性，强调数学和物理概念相结合。

本书适用于重点院校及一般院校的通信工程、电子信息、电子工程等专业的在校大学生，可以作为研究生入学考试的参考书，也可以作为有关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波习题精解/焦其祥主编. —北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-013962-3

Ⅰ. 电… Ⅱ. 焦… Ⅲ. ①电磁场-高等学校-解题②电磁波-高等学校-解题 Ⅳ. O441. 4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 074246 号

责任编辑：匡 敏 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年9月第一次印刷 印张：15
印数：1—4 000 字数：292 000

定价：20.00 元

前　言

电磁场与电磁波是一门重要的专业基础学科。作为通信工程、电子工程、电子信息以及微波等专业的专业基础课，其内容丰富、概念抽象、理论性强、对数学方法的依赖性强，教与学都有难度，仅依靠课堂所达到的效果是有限的。这本习题集配合我们所编写的、由科学出版社出版的《电磁场与电磁波》教材，每章通过内容提要以及对典型习题的分析和解答，来帮助学生加深对教学内容的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书作为一本教辅书，是参照部颁工科高校电磁场教学大纲而编写的。全书共收录了两百余道习题，这些选题来自两方面，一是我们在长期的教学中所积累的较好的习题和试题，二是国内外同类书籍中较好的题目，然后根据我们自己的理解和体会编撰而成。本书内容提要简练、重点突出；选题典型，与教学重点紧密结合；解题过程强调思路清晰，强调分析方法得力和多样性，强调数学和物理概念相结合。本书适用于重点院校及一般院校通信工程、电子信息、电子工程等专业的在校大学生，可以作为研究生入学考试的参考书，也可以作为有关工程技术人员的参考书。

本书结构与教材相对应，共分为十一章，第二、八、九章由焦其祥编写，第五、七章由章茂林编写，第十、十一章由张阳安编写，第一、三章由王亚峰编写，第四、六章由张欣编写。全书由焦其祥教授主编和统稿。

最后，感谢李书芳、李莉、高泽华在本书的编写过程中所做的贡献；感谢在读博士、硕士和本科的同学在书稿整理、绘图等工作中所给予的大力支持；感谢北京邮电大学电信工程学院的领导，无线通信中心、光通信中心的领导和同行们所给予的帮助和支持。

书中难免有疏漏和不当之处，敬请广大读者批评指正，殷切希望提出宝贵的意见和建议。

编　者

2004年6月

目　录

第一章　矢 量 分 析

一、内容提要

1. 标量、矢量与标量场、矢量场

标量指仅由数量确定的物理量，或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量，若标量与坐标系的选择无关，则称为绝对标量。矢量指用数值和方向表示的物理量。若标量函数的值域是一个无穷集合，这个无穷集合即表示这个标量的场，称为标量场，如果标量场与时间无关，则为静态场或稳态场；如果标量场与时间有关，则为动态场或时变场。若矢量函数的值域是一个无穷集合，这个无穷集合即表示这个矢量的场，称为矢量场。

2. 矢量的运算

(1) 加法

平行四边形法则，分量法。

(2) 数乘

实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积定义为实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，结果为矢量，写成 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模和方向分别为

1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。

2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0$。

(3) 标量积

标量积的定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

结果为标量。

(4) 矢量积

矢量积的定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

结果为矢量。其大小等于这两个矢量的模与其夹角的正弦的乘积,即

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

矢量 $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并且矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 遵循右手法则。

(5) 矢量的三重积

标量三重积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

结果为一标量,大小等于由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成的平行六边形的体积。它有如下的循环互换规律:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

矢量三重积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

结果为一矢量,可展开为两矢量的差:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

3. 矢量的通量　散度

(1) 矢量的通量

矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过一有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量为

$$\Psi=\int_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_S a\,\mathrm{d}S\cos\theta$$

(2) 矢量的散度

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

引入哈密顿算符∇,在直角坐标系中$\nabla=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$。

散度可以写成

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z)$$
$$=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

两个矢量场之和的散度等于各个矢量场的散度之和,即

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

(3) 散度定理(高斯定律)

通过闭合曲面 $\boldsymbol{S}$ 的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通量,等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 对 $\boldsymbol{S}$ 所包体积 V

的积分，即

$$\oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}V$$

其中在 S 内部，矢量是连续的，并具有连续的一阶偏导数。

4. 矢量的环流　旋度

(1) 矢量的环流

矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿闭合曲线 C 的线积分 $\oint_C \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的环路积分，又称环流量或环流。

$$\oint_C \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C a\cos\theta \mathrm{d}l$$

(2) 矢量的旋度

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度，记为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \left[\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \right]_{\max}$$

其方向规定为与闭合路径遵循右手螺旋法则。$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 描述空间某一点单位面积的最大环流量。

利用哈密顿算符，旋度可以写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z)$$

两个矢量场之和的旋度等于各个矢量场的旋度之和，即

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \nabla \times \boldsymbol{a} + \nabla \times \boldsymbol{b}$$

常用的旋度性质：即旋度的散度恒等于零。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \equiv 0$$

5. 斯托克斯定理

矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿闭合曲线 C 的环路积分，等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度通过张在 C 上的任意曲面 S 的通量，即

$$\oint_C \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

6. 标量场的梯度

在标量场 $\varphi(x,y,z)$ 中的一点 A 处存在矢量 $\boldsymbol{b}$，其方向为函数 $\varphi(x,y,z)$ 在 A

点处变化率最大的方向，其模是这个最大变化率的值，则称矢量 $\boldsymbol{b}$ 为函数 $\varphi(x,y,z)$ 在 A 点处的梯度，记为 $\mathrm{grad}\varphi$，即

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

利用哈密顿算符，梯度可以写成

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

两个标量场之和的梯度等于各个标量场的梯度之和，即

$$\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2$$

常用的梯度性质：梯度的旋度恒等于零，即

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) \equiv 0$$

7. 亥姆霍兹定理

矢量场的散度 $\rho(x,y,z)$ 和旋度 $\boldsymbol{J}(x,y,z)$ 的空间分布及边界条件确定后，矢量场本身也就唯一确定。

二、习题解答

1.1 试证明下列三个矢量：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 11+\boldsymbol{e}_y 9+\boldsymbol{e}_z 18,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x 17+\boldsymbol{e}_y 9+\boldsymbol{e}_z 27,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x 4-\boldsymbol{e}_y 6+\boldsymbol{e}_z 5$$

在同一平面上。

【分析】若三个矢量的混合积为 0，则这三个矢量在同一平面上。

【证明】
$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 17 & 9 & 27 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{e}_x(9\times5+27\times6)+\boldsymbol{e}_y(27\times4-17\times5)+\boldsymbol{e}_z(-17\times6-9\times4)$$
$$= \boldsymbol{e}_x 207+\boldsymbol{e}_y 23-\boldsymbol{e}_z 138$$
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x 11+\boldsymbol{e}_y 9+\boldsymbol{e}_z 18)\cdot(\boldsymbol{e}_x 207+\boldsymbol{e}_y 23-\boldsymbol{e}_z 138)$$
$$=11\times207+9\times23-18\times138=0$$

故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 在同一平面上。

同理，也可以通过证明 $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=0$ 或 $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$ 来证明结论。

1.2 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3,\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x 5-\boldsymbol{e}_y 2$$

求：1) $\boldsymbol{e}_A$（$\boldsymbol{e}_A$ 表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向上的单位矢量）。

2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。

3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$。

【解】1) $\boldsymbol{e}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\boldsymbol{e}_x0.27+\boldsymbol{e}_y0.54-\boldsymbol{e}_z0.80$。

2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3)\cdot(-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z)=-11$。

3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & -2 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y15-\boldsymbol{e}_z12$。

1.3 证明:如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

【分析】矢量的点积和叉积没有消去率,即不能由 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。但若同时满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则可以消去。

【证明】已知 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$。

由矢量公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$,有

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

又因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,则

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,得证。

1.4 如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量积和矢量积,那么便可以确定该未知矢量。设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量,$P=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$,$P$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知,试求 $\boldsymbol{X}$。

【解】因 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$,则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$。

又因 $P=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2$,故

$$\boldsymbol{X}=\frac{(P\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P})}{|\boldsymbol{A}|^2}$$

【点评】本题给出了一种新颖的求矢量的方法。

1.5 设 $\boldsymbol{a}=xz^3\boldsymbol{e}_x-2x^2yz\boldsymbol{e}_y+2yz^4\boldsymbol{e}_z$,求 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度。

【解】
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{a}&=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xz^3\boldsymbol{e}_x-2x^2yz\boldsymbol{e}_y+2yz^4\boldsymbol{e}_z)\\&=\left(\frac{\partial(2yz^4)}{\partial y}-\frac{\partial(-2x^2yz)}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial(xz^3)}{\partial z}-\frac{\partial(2yz^4)}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y\\&\quad+\left(\frac{\partial(-2x^2yz)}{\partial x}-\frac{\partial(xz^3)}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=(2z^4+2x^2y)\boldsymbol{e}_x+(3xz^2)\boldsymbol{e}_y+(-4xyz)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

所以在 $M(1,-1,-1)$ 点的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$$

1.6 设 $\varphi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$,求在点 $M(1,-2,1)$ 的 $\nabla\varphi$。

【解】$\nabla\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

$$=\frac{\partial(3x^2y-y^3z^2)}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial(3x^2y-y^3z^2)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial(3x^2y-y^3z^2)}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$
$$=6xy\boldsymbol{e}_x+(3x^2-3y^2z^2)\boldsymbol{e}_y-2y^3z\boldsymbol{e}_z$$
$$=-12\boldsymbol{e}_x-9\boldsymbol{e}_y+16\boldsymbol{e}_z$$

1.7 求$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$。

【解】 1) 在直角坐标系中，

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\nabla[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$$
$$=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$
$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\boldsymbol{e}_x-y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\boldsymbol{e}_y-z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\boldsymbol{e}_z$$
$$=-\frac{x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

2) 在球坐标系和圆柱坐标系中，

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r^2}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

1.8 设$|\boldsymbol{R}|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]$为源点$\boldsymbol{r}'$到场点$\boldsymbol{r}$的距离，$\boldsymbol{R}$的方向规定为从源点指向场点。试利用直角坐标证明：

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

【分析】 首先要掌握∇^2算符的含义，其次本题中要用到散度定理和δ函数（冲激函数）的性质。

【证明】 将$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)$在包含场点$\boldsymbol{r}$和源点$\boldsymbol{r}'$的任意体积$V$内积分，有

$$\int_V\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V=\oint_S\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=-\oint_S\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\oint_S\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\oint_S\frac{\mathrm{d}S'}{R^2}=-\oint_S\mathrm{d}\Omega$$
$$=-4\pi$$

则有

$$-\frac{1}{4\pi}\int_V\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V=1$$

利用δ函数的性质之一

$$\int_V\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=1\quad(\boldsymbol{r}'\text{ 在 }V\text{ 内})$$

上式变为

$$-\frac{1}{4\pi}\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V = \int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V = 1$$

由于上式对任意包含场点 $\boldsymbol{r}$ 和源点 $\boldsymbol{r}'$ 的体积 V 均成立，则等式成立的条件只能是等式两端的被积函数相等，即得

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

1.9 试判断下列矢量场是否为均匀矢量场：

1) 圆柱坐标系中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r A_1\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi A_1\cos\phi+\boldsymbol{e}_z A_2$，其中 A_1，A_2 都为常数。

2) 球坐标系中，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r A_0$，其中 A_0 为常数。

【分析】 通过坐标系的转换确定是否为均匀矢量场。

【解】 1) 圆柱坐标系与直角坐标系单位矢量之间的关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\cos\phi + \boldsymbol{e}_y\sin\phi \\ \boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x\sin\phi + \boldsymbol{e}_y\cos\phi \\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{e}_x\cos\phi + \boldsymbol{e}_y\sin\phi)A_1\sin\phi + (-\boldsymbol{e}_x\sin\phi + \boldsymbol{e}_y\cos\phi)A_1\cos\phi + \boldsymbol{e}_z A_2 \\ &= \boldsymbol{e}_y A_1 + \boldsymbol{e}_z A_2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ 的模 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=$常数，与 y 轴的夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{A_2}{A_1}=$常数，即 $\boldsymbol{A}$ 的大小和方向均不随空间坐标的变化而变化，故为均匀场。

2) 球坐标系中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r A_0$。

尽管 $\boldsymbol{A}$ 的大小不变，但方向为 $\boldsymbol{e}_r$，不同点 $\boldsymbol{e}_r$ 方向不同，故不是均匀场。

事实上，由单位矢量的变换关系

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta$$

可知 $\boldsymbol{e}_r$ 是(θ,ϕ)的函数，对应不同的点(r,θ,ϕ)，$\boldsymbol{A}$ 有不同的方向。

1.10 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $M(x,y,z)$ 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模，试证明 $\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}_0$。

【证明】 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$

同样可得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

所以

$$\nabla r = \boldsymbol{e}_x\frac{x}{r} + \boldsymbol{e}_y\frac{y}{r} + \boldsymbol{e}_z\frac{z}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}_0$$

1.11 计算：

1）矢量 $\boldsymbol{r}$ 对一个球心在原点，半径为 a 的球表面的积分。

2）$\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ 对球体积的积分。

【解】$\oint_S \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{e}_r r \cdot (\boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_\theta r \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_\phi r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta)$

$$= \oint_S r^3 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 4\pi a^3$$

由

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cdot r) = 3$$

而

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{r} \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 3r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 4\pi a^3$$

可见

$$\oint_S \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{r} \mathrm{d}V = 4\pi a^3$$

【分析】该计算结果验证了散度定理。

1.12　在由 $r=5, z=0, z=4$ 围成的圆柱形区域内，对矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r r^2 + \boldsymbol{e}_z 2z$ 验证散度定理。

【解】　$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S (\boldsymbol{e}_r r^2 + \boldsymbol{e}_z 2z) \cdot (\boldsymbol{e}_r r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_\phi \mathrm{d}r \mathrm{d}z + \boldsymbol{e}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi)$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi} 5^3 \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z + 2\int_0^5\int_0^{2\pi} 4r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi = 1200\pi$$

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_V \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z)\right]\mathrm{d}V = \int_V (3r+2)\mathrm{d}V$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^5 (3r+2) r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r \mathrm{d}z = 1200\pi$$

由上面的结果可知 $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，验证完毕。

1.13　利用散度定理证明 $\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$，应用斯托克斯定理证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\varphi = \oint_l \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

【分析】本题证明中要用到矢量计算的一些性质。

【证明】令 $\boldsymbol{B}$ 为一任意常矢量，用它点乘第一式的左端，有

$$\boldsymbol{B}\cdot\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\int_V\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$

$$=\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V$$

$$=\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}$$

在推导过程中用到恒等式

$\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 和 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是任意常矢量，则当上式成立时，必有

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}$$

同理，有

$$\boldsymbol{B}\cdot\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi)=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\varphi\times\boldsymbol{B})$$

利用恒等式 $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{B})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{B}+\varphi\nabla\boldsymbol{B}$，则上式变为

$$\boldsymbol{B}\cdot\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot[\nabla\times(\varphi\boldsymbol{B})]$$

$$=\oint_l\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot(\varphi\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\oint_l\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

故

$$\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\oint_l\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

1.14 **求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y x^2-\boldsymbol{e}_z y^2 z$ 沿 x,y 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两个边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此回路所包围的表面积的积分，验证斯托克斯定理。**

【解】 $\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^2x\mathrm{d}x+\int_0^2 2^2\mathrm{d}y+\int_2^0x\mathrm{d}x+\int_2^0 0\mathrm{d}y=\int_0^2x\mathrm{d}x+8-\int_0^2x\mathrm{d}x=8$

而

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\boldsymbol{e}_x2yz+\boldsymbol{e}_z2x$$

则由闭合曲线 l 所包围的开面的面积分为

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^2\int_0^2(\boldsymbol{e}_x2yz+\boldsymbol{e}_z2x)\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\int_0^2 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8$$

可见 $\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=8$，验证了斯托克斯定理。

1.15 **求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分。再求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此圆面积的积分，验证斯托克斯定理。**

【证明】 已知圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\phi\\y=a\sin\phi\end{cases}$，则 $\begin{cases}\mathrm{d}x=-a\sin\phi\mathrm{d}\phi\\\mathrm{d}y=a\cos\phi\mathrm{d}\phi\end{cases}$。

矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分为

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l x^2\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^{2\pi}[a^2\cos^2\phi(-a\sin\phi)\mathrm{d}\phi+a\cos\phi(a\sin\phi)^2a\cos\phi\mathrm{d}\phi]=\frac{\pi a^4}{4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\boldsymbol{e}_z y^2$$

设 S 为此圆所围的面积，有

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S y^2\mathrm{d}S=\int_0^a\int_0^{2\pi}r^2\sin^2\phi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi=\frac{\pi a^4}{4}$$

由上面的结果有 $\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，验证了斯托克斯定理。

1.16　在球坐标系中证明 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$ 为有势场，并求其势函数 u。

【分析】一个场为有势场，则其旋度必为零。

【解】在球坐标系中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r^2}$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta r & \boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，并且势函数满足 $\boldsymbol{A}=-\nabla u$，即有

$$\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r^2}=-\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial u}{\partial\phi}=0$$

则 $u=\frac{1}{r}+C$，C 为任意常数。

1.17　两个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r z^2\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi z^2\cos\phi+\boldsymbol{e}_z 2rz\sin\phi$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z 2z$$

1) 哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

2) 求出这些矢量的源分布。

【分析】一个无旋矢量场可用一标量函数的梯度来表示，一个无散矢量场可用一矢量函数的旋度来表示。若矢量的散度或旋度不为零，则分别表示了该矢量的源分布。

【解】1) 在柱坐标系中 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\phi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\phi & A_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\phi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2\sin\phi & rz^2\cos\phi & 2rz\sin\phi\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_r(2z\cos\phi-2z\cos\phi)+\boldsymbol{e}_\phi(2z\sin\phi-2z\sin\phi)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{z^2\cos\phi}{r}-\frac{z^2\cos\phi}{r}\right)=0$$

在柱坐标中，$\boldsymbol{A}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rz^2\sin\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(z^2\cos\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(2rz\sin\phi)$$
$$=\frac{z^2\sin\phi}{r}-\frac{z^2\sin\phi}{r}+2r\sin\phi=2r\sin\phi$$

可见，矢量 $\boldsymbol{A}$ 为一个有散无旋场，可以用一个标量函数的梯度表示，其源分布为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=2r\sin\phi$$

2) 在直角坐标系中 $\boldsymbol{B}$ 的散度和旋度分别为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$
$$=\boldsymbol{e}_x\left[\frac{\partial}{\partial y}(2z)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right]+\boldsymbol{e}_y\left[\frac{\partial}{\partial z}(3y^2-2x)-\frac{\partial}{\partial x}(2z)\right]$$
$$+\boldsymbol{e}_z\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-2x)\right]$$
$$=0+0+\boldsymbol{e}_z(2x-6y)=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2x)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=-2+0+2=0$$

可见，矢量 $\boldsymbol{B}$ 为一个无散有旋矢量，可以用一个矢量的旋度表示，其源分布为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$$

1.18 利用直角坐标系证明：$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f$。

【证明】在直角坐标系中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y+\boldsymbol{e}_zA_z,\ \nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$