師生必備

平面三角法表解

上海學生書局印行

師生必備

三角法表解

駱承緒著

平面三角法表解

目　次

第一章　銳角的三角函數

第二章　三角函數表

第三章　直角三角形的解法

第四章 簡易測量問題

第五章 一般角的三角函數

第六章 三角形邊與角的關係

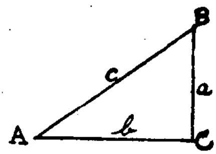
平面三角法表解

第一章 銳角的三角函數

1. 三角函數的定義

(i)用三角形各邊的比表示:

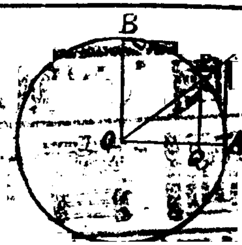
設△ABC是直角三角形，C是直角．用A，B，C表各角，用a，b，c表各角對邊，有六種三角函數如下:



函數	定　　義	函數	定　　義
正弦	$\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$.	餘切	$\cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{b}{a}$.
餘弦	$\cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$.	正割	$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$.
正切	$\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$.	餘割	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{c}{a}$.

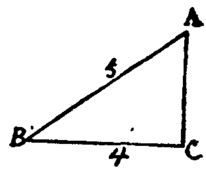
(ii)用關於圓的各線表示．

用單位長度做半徑畫圓O，任作∠POA，又作PQ⊥AO，TA⊥OA，BC⊥OB．則因OP=OA=OB=1，故有定義如下:



$\sin POA=\frac{PQ}{OP}=PQ,$	$\cot POA=\frac{OQ}{PQ}=\frac{BC}{OB}=BC.$
$\cos POA=\frac{OQ}{OP}=OQ.$	$\sec POA=\frac{OP}{OQ}=\frac{OT}{OA}=OT.$
$\tan POA=\frac{PQ}{OQ}=\frac{AT}{OA}=AT.$	$\operatorname{cosec} POA=\frac{OP}{PQ}=\frac{OC}{OB}=OC.$

〔例〕 設$\angle C=\angle R$, $AB=5$, $BC=4$, 求$\angle B$的三角函數。



解　$AC=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$.故

$\sin B=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$, $\tan B=\frac{3}{4}$,

$\cot B=\frac{4}{3}$, $\sec B=\frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec} B=\frac{5}{3}$.

2. 三角函數值的大小

範圍	一角的 sin, cos 都小於 1. tan, cot 可有任何值. sec, cosec 都大於 1.
增減	角增大時, sin, tan, sec 都跟着增大. cos, cot, cosec 反都減小.

3. 餘角的三角函數

設$\angle A+\angle B=90°$,則有關係如下:

$\sin A=\cos B=\cos(90^\circ-A)$,	$\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A)$,
$\tan A=\cot B=\cot(90^\circ-A)$,	$\cot A=\tan B=\tan(90^\circ-A)$,
$\sec A=\operatorname{cosec} B=\operatorname{cosec}(90^\circ-A)$,	$\operatorname{cosec} A=\sec B=\sec(90^\circ-A)$,

〔例〕 設$\sin 7x=\cos 8x$，求x。

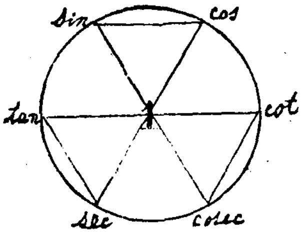
解 由題意，知7x和8x互爲餘角，

故$7x+8x=90^\circ$， $x=6^\circ$

4. 三角函數的基本關係式

倒數關係	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}$， $\sin A\operatorname{cosec} A=1$。 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}$， $\cos A\sec A=1$。 $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$， $\tan A\cot A=1$。
除商關係	$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$， $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$。
平方關係	$\sin^2A+\cos^2A=1$， $1+\tan^2A=\sec^2A$， $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$。

以上關係，依下圖表記憶很便：



1. 對角兩函數，有倒數關係。

2. 任一函數用相鄰一函數除，得另一相鄰函數.

3. 每一三角形中，上二數平方的和，等於下一數平方.

〔例1.〕 已知$\sin A=\frac{5}{13}$求$\cos A$(江西)

解 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\frac{12}{13}$.

〔例2.〕 已知$\cos x=\frac{b}{a}$求x角其餘之各函數.(福建)

解 $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\div\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}=1\div\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}=1\div\frac{b}{a}=\frac{a}{b}.$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}=1\div\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

5. 同角的三角函數關係

	sinA	cosA	tanA	cotA	secA	cosecA
sinA	sinA	$\sqrt{1-\cos^2A}$	$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2A}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2A-1}}{\sec^2A}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}A}$
cosA	$\sqrt{1-\sin^2A}$	cosA	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2A}}$	$\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2A}}$	$\frac{1}{\sec A}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1}}{\operatorname{cosec}^2A}$
tanA	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2A}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2A}}{\cos A}$	tanA	$\frac{1}{\cot A}$	$\sqrt{\sec^2A-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1}}$
cotA	$\frac{\sqrt{1-\sin^2A}}{\sin A}$	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2A}}$	$\frac{1}{\tan A}$	cotA	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2A-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1}$
secA	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2A}}$	$\frac{1}{\cos A}$	$\sqrt{1+\tan^2A}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2A}}{\cot A}$	secA	$\frac{\operatorname{cosec}A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2A-1}}$
cosecA	$\frac{1}{\sin A}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2A}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$	$\sqrt{1+\cot^2A}$	$\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2A-1}}$	cosecA

〔例〕 設$\sin x=\frac{2}{3}$求$\cos x$, $\sec x$, $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ 諸函數.(上海)

解 用上表來解:

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\cot x=\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\sec x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

6. 恆等式

證明恆等式,沒有一定的方法,全在乎隨機應變,普通所用的,有下列三法:

1. 將式中的三角函數,都化做正弦或餘弦來證明.
2. 從複雜的一邊,用已知恆等式誘導到簡單.
3. 將兩邊各化成同一式.

〔例 1.〕 試證$\sin^4A-\cos^4A=\sin^2A-\cos^2A$.(上海)

〔證〕 $\sin^4A-\cos^4A=(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^2A-\cos^2A)$

$=\sin^2A-\cos^2A$.

〔例 2〕 試證$\tan^2A-\sin^2A=\tan^2A\sin^2A$(青島)

〔證〕 $\tan^2A-\sin^2A=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}-\sin^2A$

$$=\frac{\sin^2A-\sin^2A\cos^2A}{\cos^2A}$$

$$=\frac{\sin^2A(1-\cos^2A)}{\cos^2A}=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\sin^2A$$

$$=\tan^2A\cdot\sin^2A.$$

〔例 3.〕 試證下列二式:(上海)

(a) $\tan^2x\cos^2x+\cot^2x\sin^2x=1$.

(b) $\dfrac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\cos^2x-\sin^2x$.

〔證〕(a)左邊$=\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}\cdot\cos^2x+\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\cdot\sin^2x$(見4節)

$$=\sin^2x+\cos^2x=1.$$

(b)　左邊 $=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$(見 4 節)

$=\cos^2 x-\sin^2 x$.

〔例 4.〕　試證 $\sec A-\cos A=\sin A\tan A$.(廣州)

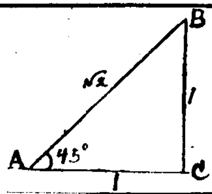
〔證〕　左邊 $=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A$(見4節) $=\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos A}=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$.

右邊 $=\sin A\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}$(見4節) $=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$.

故　左邊＝右邊.

第二章　三角函數表

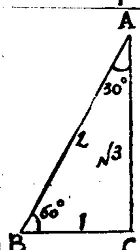
7. 特別角的三角函數



$\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 45°=1$,　$\cot 45°=1$,

$\sec 45°=\sqrt{2}$,　$\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}$



$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$, $\cos 60°=\dfrac{1}{2}=\sin 30°$,

$\tan 60°=\sqrt{3}=\cot 30°$, $\cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$,

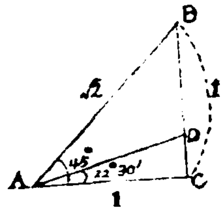
$\sec 60°=2=\operatorname{cosec} 30°$, $\operatorname{cosec} 60°=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30°$,

$$\sin 0° = 0 = \cos 90°,\qquad \cos 0° = 1 = \sin 90°,$$

$$\tan 0° = 0 = \cot 90°,\qquad \cot 0° = \infty = \tan 90°,$$

$$\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°,\qquad \operatorname{cosec} 0° = \infty = \sec 90°.$$

〔例〕 求$\tan 22°30'$至小數五位。



解 $\angle C=\angle R$，$\angle A=45°$，引$\angle A$的平分線AD，則$BD:DC=AB:AC$。

$$\therefore\ BD+DC:DC=AB+AC:AC.$$

$$\therefore\ DC=\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}=\frac{1\times 1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1=1.41421-1$$

$$=0.41421.$$

$$\tan DAC=\tan 22°30'=\frac{CD}{AC}=\frac{0.41421}{1}=0.41421.$$

8. 三角函數表

將三角函數的值，一一求出小數，列成一表，就叫三角函數表。依第3節理由，只要有0°到45°的三角函數值，因上下順逆的不同，同時可以表45°到90°的三角函數值，故簡單的三角函數表如下：

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	.0000	1.0000	.0000	∞	1.00 0	∞	90°
1°	.0175	.9998	.0175	57.290	1.0 0	57.299	89°
2°	.0349	.9994	.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	.0 23	.9986	.0524	9. 81	1.0014	9 107	87°
4°	.0698	.9976	.0699	14.300	1.0024	4. 33	86°
5°	.0872	.9962	.0875	1 .430	1.0038	11.474	85°
6°	.1045	.9945	.1051	9. 144	1.00 5	9.5668	84°
7°	.1219	.9925	. 228	8. 443	1.007	8 2055	83°
8°	.1392	.9903	.1405	7.11 4	1.0098	7.1853	82°
9°	.1564	.9877	.1 84	6.3138	1.0 25	6.3925	81°
10°	.1736	.9848	.17 3	5.67 3	1.0 54	5.7588	80°
11°	.1908	.9816	. 944	5.1446	1.0 87	5.2408	79°
12°	.2 79	.9781	.2 26	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	.2250	.9744	.2309	4.33 5	1.0263	4.4454	77°
14°	.2419	.9703	.2493	4.01 8	1.0306	4.1 33	76°
15°	.2 88	.9659	.2 79	3.7321	1.03 3	3.8637	75°
16°	.2756	.9613	.28 7	3.4874	1.0403	3. 280	74°
17°	.29 4	.95 3	.30 7	3.2709	1.04 7	3.4203	73°
18°	.30 0	.9 11	.3249	3.0777	1.0 15	3.23 1	72°
19°	.3256	.9455	.3443	2.9042	1.0576	3 07 6	71°
20°	.3420	.9397	.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	.3584	.9336	.3839	2.60 1	1.07 1	2.7904	69°
22°	.3746	.9272	.4040	2.4751	1.0785	2 6695	68°
23°	.3907	.9205	.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	.40 7	.9135	.44 2	2.2460	1.0946	2.4586	66°
25°	.4226	.9063	.4 63	2 1445	1.1034	2.3662	65°
26°	.4384	.8988	. 877	2.0 03	1.1126	2.28 2	64°
27°	.4540	.8910	.50 5	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	.4695	.8829	.5317	1.8807	1.1326	2.13 1	62°
29°	.4848	.8746	.5 43	1.8040	1.1434	2.0 27	61°
30°	.5000	.8660	.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	.5150	.8572	.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	.5299	.8480	.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	.5446	.8387	.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	.5592	.8290	.6745	1.4826	1.20 2	1.7883	56°
35°	.57 6	.8192	.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55°
36°	.5878	.8090	.7265	1.3764	1.2361	1.70 3	54°
37°	.6018	.7986	.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	.61 7	.7880	.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	.6293	.7771	.8098	1.2349	1.28 8	1.58 0	51°
40°	.6428	.7660	.839	1.19 8	1.3054	1.5557	50°
41°	.6561	.7547	.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	.6691	.74 1	. 004	1.1 06	1.34 6	1.4945	48°
43°	.6820	.73 4	.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	.6947	.7 93	.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4 42	45°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	角

9. 已知角度求函數值

1. 在三角函數表中，從左行(或右行)查得角度，上列(或下列)查得函數，在橫直和對交格的數便是。

2. 若角度有分秒數，表中沒有列出，可查略大略小角的二函數值求差，再將已知角同略小角求差，依角度的差與函數值的差列成正比例，求得一數，依2節理由在略大角的函數值中加或減便得。

〔例 1.〕 表中tan一行向上，53°一列向左，得1.3270，故 $\tan 53° = 1.3270$.

〔例 2.〕 求sin27°48′的值。

解

$$\sin 28° = 0.4695 \qquad 27°48' - 27° = 48'.$$

$$\underline{\sin 27° = 0.4540} \qquad 60'' : 48'' = 0.0155 : x,$$

$$差\ \ 1° = 0.0155 \qquad \therefore x = 0.0124.$$

因角度愈大，in的數值也愈大，

故$\sin 27°48' = 0.4540 + 0.0124 = 0.4664$.

10. 已知函數值求角度

1. 在三角函數表中，從上列(或下列)查得函數，對下(或對上)查得數值，依同列橫推到左行(或右行)的角度便是。

2. 若表中沒有全同的函數值，可查略大略小函數值的二角度求差，再將已知函數值同略小函數值求差，

依函數值的差與角度的差列成正比例，求得一數，依2節理由，在略大函數值的角度中加或減便得。

〔例 1.〕 求$\cot x=0.5543$的x

解 表中cot在下的一行，向上逆推，恰有0.5543，向右橫推得61°，故$x=61°$.

〔例 2.〕 求$\cos x=0.5200$的x.

解 $0.5229=\cos 58°$　　$0.5200-0.5150=0.0050$

$0.5150=\cos 59°$　　$0.0149:0.0050=60:x$,

差$0.0149=\quad 1°$　　$\therefore\ x'=20'$.

因cos的數值愈大，角度愈小，

故$0.5200=\cos(59°-20')=58°40'$.　故$x=58°40'$.

11. 簡易的三角方程式

含未知角三角函數的方程式，叫三角方程式。求得適合於此方程式的角，叫方程式的解法。

〔例 1.〕 求方程式$\tan\theta+\cot\theta=2$中之θ.（安徽）

解 原式可化做$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$,

$\therefore \tan^2\theta+1=2\tan\theta$，$\therefore \tan^2\theta-2\tan\theta+1=0$.

故 $(\tan\theta-1)^2=0$，$\therefore \tan\theta-1=0$.

$\tan\theta=1=\tan 45°$.　即$\theta=45°$.

〔例 2.〕 解下列聯立方程式：

$\tan(7x+6y)=\infty\cdots(1)$　$\cos(4x-3y)=1\cdots(2)$

解 因$\tan 90° = \infty$，　　$\cos 0° = 1$。

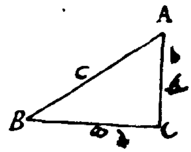
故從(1)，$7x + 6y = 90°$，　從(2)，$4x - 3y = 0°$。

解此聯立方程式，得$X = 6°$，$y = 8°$。

第三章 直角三角形的解法

12. 直角三角形解法

三角形有三角與三邊，共有六原素，從已知原素求未知原素，叫解三角形。解直角三角形，因直角是已知，故只要另外知二要素（必要有一邊）便可解。解法的公式如下：（參照右圖）



(1) 已知$\angle B$及邊c時：

$\angle A = 90° - \angle B$.　$\dfrac{a}{c} = \cos B$，　$\therefore a = c\cos B$.

$\dfrac{b}{c} = \sin B$，　$\therefore b = c\sin B$.

(2) 已知$\angle B$及邊b時：

$\angle A = 90° - \angle B$.　$\dfrac{a}{b} = \tan A$，　$\therefore a = b\tan A$.

$\dfrac{b}{c} = \sin B$，　$\therefore c = \dfrac{b}{\sin B}$.

(3) 已知二邊a及c時：

$\cos B = \dfrac{a}{c}$.　$\angle A = 90° - \angle B$.　$b = \sqrt{c^2 - a^2}$.