上海
交通大学
工商管理
系列教材

OPERATIONS RESEARCH

运筹学
基础教程

主编 黄桐城　副主编 王金桃

上海人民出版社

上海
交通大学
工商管理
系列教材

OPERATIONS RESEARCH

运筹学
基础教程

主编 黄桐城　副主编 王金桃

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础教程/黄桐城主编.
—上海:上海人民出版社,2004
(上海交通大学工商管理系列教材)
ISBN 7-208-05040-6

Ⅰ.运... Ⅱ.黄... Ⅲ.运筹学-高等学校-教材
Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010383 号

责任编辑 忻雁翔
封面设计 许晓峰
美术编辑 王晓阳

·上海交通大学工商管理系列教材·
运筹学基础教程
主 编 黄桐城
副主编 王金桃
世纪出版集团
上海人民出版社出版
(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)
世纪出版集团发行中心发行 商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787 × 1092 1/16 印张 14.5 插页 2 字数 261,000
2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—6,000
ISBN 7-208-05040-6/F·1122
定价 22.00 元

总　序

自改革开放以来,我国各类管理思想不断涌现,管理学科也迅速发展,不少高校纷纷开设了各具特色的管理类课程,出版了不少经济管理方面的教材。但由于我国国内现代企业管理的起步较晚,高校教学实践不足,相当多的经济管理类教材是根据国外教材改编而成的,未必完全适用于教学的需要,真正既能自成理论体系又具有实用性的教材更为缺乏。

经过积极缜密的准备,由上海交通大学管理学院有关教师总结十多年教学实践,力求体现中国管理特色的"上海交通大学工商管理系列教材"终于面世了。这套教材不但为中国经济管理类理论领域增添了一道独特的风景,更为从事管理学本科教学的教师提供了本土化的教学范本。

上海交通大学管理学院成立于1918年,是国内最早开办管理学科的学院之一。在新的世纪里,全院上下将致力于把上海交通大学管理学院建设成为"国内领先、亚洲一流、世界知名"的学院。学院的培养方针是:致力于培养国际化的企业经营管理人才,为各类现代工商企业和社会其他部门培养懂技术、懂经营、会管理的高级复合型管理人才。为了实现这一培养目标,学院决定编写一批具有现代气息的高质量的管理类系列教材。我们组织了一批教学经验丰富、理论功底扎实的资深教授编写这套教材,完成初稿后又请相关领域的专家对每本教材进行评审和鉴定,并对整体项目的运营和质量进行监控,力求使这套系列教材具有较高的水准。

这套系列教材从不同的层面、不同的视角对经济管理领域内的不同问题作了全面、系统和深入的研究,期待它能为改进我国高等学校经济管理类课程的教学工作起到重要的作用,同时对于推动我国经济管理理论的发展,提升我国企业经济管理的实践水平,也能有所帮助。这套系列教材紧跟时代步伐,汇集了国际上相关领域的最新观点、内容、原理和方法;以培养能力为目标,吸收了国内外教材的众多优点。既适合于全国各高等学校经济管理类专业的本科生使用,同时也可以成为在管理实践第一线工作的各类管理人员系统学习管理理论的参考书。

春华秋实。一批学有所成的毕业生在这个季节唱着骊歌告别了学校,铭记上海交通大学"饮水思源,爱国荣校"的校训奔赴祖国各地;而更多的莘莘学子马上又要来到这菁菁校园求学深造。肩负起为国塑才的重任,不辜负人类灵魂工

程师的称号，一直是我们每个教师心中的孜孜追求。这套系列教材可以说是上海交通大学管理学院的广大教师对先期教学工作的一个总结和归纳，更是一个新的起点。“雄关漫道真如铁，而今迈步从头越。”在我们面前将有更多令人兴奋和激动的新机遇和新挑战。在此，我谨希望这套教材能起到抛砖引玉的效果，为我国管理教育和管理实践的发展、繁荣尽到应有的责任。

是为序。

上海交通大学管理学院院长　王方华

2003年7月1日于交大安泰楼

前　言

运筹学(operations research)是用数学方法研究各种系统的最优化问题,是系统工程的基础理论之一,运筹学强调发挥现有系统的效能,应用数学模型求得合理利用各种资源的最佳方案,为决策者提供科学决策的依据。

运筹学的内容有数学规划、运输问题、图与网络分析、排队论、存贮论、决策论和对策论等,其中数学规划又包括线性规划、整数规划、非线性规划、目标规划和动态规划等。虽然运筹学包括的内容较多,但是它们有两个共同的特点:一是以全局最优作为研究问题的出发点;二是通过建立数学模型,运用优化技术求得系统最佳的运营方案。由于各种系统的运营特征各不相同,数学模型也各具特色,因此形成了运筹学的不同分支。

运筹学在工业、农业、物流、经济计划、人力资源、军事等行业都有着非常广泛的应用。有人曾对世界上 500 家著名的企业集团或跨国公司进行过调查,发现其中 95%曾使用过线性规划,75%使用过运输模型,90%使用过网络计划技术,90%使用过存贮模型,43%使用过动态规划。由此可见运筹学是一门应用性很强的学科。特别是随着计算机技术的不断发展,运筹学各种优化模型的求解过程都可以通过专门的应用软件来完成,因此运筹学越来越显示出其广泛的使用价值。

运筹学这一名词最早出现于 1938 年,至今已有 60 多年历史了。当时正处于第二次世界大战前夕。英、美等国盟军在与德国的战争中遇到了许多错综复杂的战略和战术问题难以解决,比如英、美等国为了对付德国的空袭,配备了先进的雷达作为防空系统的一部分,但是通过防空演习发现实际效果并不理想,这里有一个如何对有限的雷达进行合理的布置,使防空的效果达到最理想的问题。又比如英、美等国需要对本国的商船队配备护航舰队,以防止德国潜艇的攻击,应该如何合理编队才能使商船队一旦遭受德国潜艇攻击时损失最少,这也是英、美盟军所面临的实际问题。为了对付上述各种复杂问题,英、美等国逐批召集不同专业背景的科学家,在三军组织了各种研究小组,研究的问题都是军事性质的,在英国称为"operational research",其他英语国家称为"operations research",意思是军事行动研究。这些研究小组运用系统优化的思想,应用数学技术分析军事问题,取得了良好的效果。

第二次世界大战以后,在军事运筹小组中工作过的一部分科学家开始转入

民用部门，他们把对军事系统最优化的研究成果拓展到各种民用系统的优化研究上。此时的“operations”这一概念已经从特指的“军事行动”逐步演变成泛指的系统“运营”上来了，不论是何种系统，只要是用数学方法研究系统的最优化问题，都是运筹学应当涵盖的内容。1947 年美国数学家 G. B. Dantzig 在研究美国空军资源配置时，提出了求解线性规划的有效方法——单纯形法。线性规划是运筹学数学规划理论的基石，单纯形法的提出对于数学规划和运筹学其他各分支的深入研究起着重要的推动作用。至 20 世纪 50 年代末，一些工业先进国家的大型企业已经较普遍地使用运筹学方法解决在生产经营管理中遇到的实际问题，至 60 年代中期，运筹学开始应用于一些服务性行业和公用事业。同时很多国家成立了运筹学研究学会，一些大学的相关专业也陆续设置了运筹学的有关课程。专门发表运筹学研究论文的刊物开始出版，运筹学的理论研究日趋成熟，在实际应用上也日臻完善。

我国运筹学的研究始于 20 世纪 50 年代中期，当时由钱学森教授将运筹学从西方国家引入我国，以华罗庚教授为首的一大批科学家在有关企事业单位积极推广和普及运筹学方法，在建筑、纺织、交通运输、水利建设和邮电等行业都有不少应用。关于邮递员投递的最佳路线问题就是由我国年轻的数学家管梅谷于 1962 年首先提出的，在国际上统称为中国邮递员问题。我国运筹学的理论和应用研究在较短时间内赶上了世界水平。

如今对运筹学的研究大致在三个领域发展：运筹学应用，运筹科学，运筹数学。一般的共识是，运筹学的研究不能忘记其原有的应用性强的特色，必须强调多学科的交叉联系和解决实际问题的研究。我们面临的很多系统通常涉及大量的经济、技术、社会、政治和心理等综合因素，这些综合因素受到人的影响和干预，存在非结构性的复杂问题，仅用数学模型是很难加以描述和解决的。总之，随着社会的不断发展和进步，实践将对运筹学提出更新更多的研究课题，运筹学正处于不断发展、不断进步的时期。

本书的第 1、2、3、4、6、7 章由黄桐城编写，第 5、8 章由王金桃编写。本书在编写过程中参阅了大量的专著和参考文献，本书的出版得到了上海交通大学管理学院领导和管理科学与工程系老师们的大力支持和帮助，博士研究生朱国玮、硕士研究生施圣玮、《系统工程理论方法应用》杂志社丛雪飞等为本书文字整理、表格和图形绘制、电子版输入等做了大量的工作，在此向他们表示由衷的感谢。

目　录

第 1 章　线性规划的基本概念

1.1　线性规划问题及其数学模型

1.1.1　问题的提出

在生产管理的经营活动中，通常需要对“有限的资源”寻求“最佳”的利用或分配方式。任何资源，如劳动力、原材料、设备或资金等都是有限的。因此，必须进行合理的配置，寻求最佳的利用方式。所谓最佳的方式，必须有一个标准或目标，这个标准或目标就是使利润达到最大或成本达到最小。

由此可以把有限资源的合理配置归纳为两类问题：一类是如何合理地使用有限的资源，使生产经营的效益达到最大；另一类是在生产或经营的任务确定的条件下，如何合理地组织生产，安排经营活动，使所消耗的资源数最少。这是最常见的两类规划问题。

与规划问题有关的数学模型总由两部分组成：一部分是约束条件，反映了有限资源对生产经营活动的种种约束，或者生产经营必须完成的任务；另一部分是目标函数，反映生产经营者在有限资源条件下希望达到的生产或经营的目标。

例 1　某制药厂生产甲、乙两种药品，生产这两种药品要消耗某种维生素。生产每吨药品所需要的维生素量，所占用的设备时间，以及该厂每周可提供的资源总量如下表所示：

	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲	乙	
维生素（公斤）	30	20	160
设备（台班）	5	1	15

已知该厂生产每吨甲、乙药品的利润分别为 5 万元和 2 万元。但根据市场需求调查的结果，甲药品每周的产量不应超过 4 吨。问该厂应如何安排两种药品的产量才能使每周获得的利润最大？

本例的目的是要制定一个最佳的生产作业计划，使该计划既不超过资源条件和市场需求的限制，同时又可使总利润达到最大。因此可定义 x_1 为生产甲种药品的计划产量数，x_2 为生产乙种药品的计划产量数。即本问题可归纳为确定 x_1 和 x_2 的值，使总利润：

$$Z = 5x_1 + 2x_2$$

极大化。

同时，生产计划必须服从每周资源总量的限制，即：

$$30x_1 + 20x_2 \leqslant 160$$

$$5x_1 + x_2 \leqslant 15$$

以及甲种药品每周产量不应超过 4 吨的限制：

$$x_1 \leqslant 4$$

因为产品计划生产数不可能是负数，所以 x_1，x_2 还必须服从非负性约束：

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

由此，本问题的数学模型为：

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leqslant 160 \\ 5x_1 + x_2 \leqslant 15 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这是一个将生产安排问题抽象为在满足一组约束条件的限制下，寻求变量 x_1 和 x_2 的决策值，使目标函数达到最大值的数学规划问题。

例 2 某化工厂根据一项合同要求为用户生产一种用甲、乙两种原料混合配制而成的特种产品。已知甲、乙两种原料都含有 A、B、C 三种化学成分，两种原料分别所含三种化学成分的百分比含量，以及按合同规定的产品中三种化学成分的最低含量如下表所示：

原料 / 化学成分	化学成分含量(%)		产品中化学成分的最低含量(%)
	甲	乙	
A	12	3	4
B	2	3	2
C	3	15	5

已知甲、乙两种原料的成本分别是每公斤 3 元和 2 元，厂方希望总成本达到最小，问如何配置该产品？

本问题是要确定单位产品中甲、乙两种原料的配置数量，可定义 x_1 为每公斤产品中甲种原料的数量，x_2 为每公斤产品中乙种原料的数量，目的是寻求最佳的配置方案，使总成本：

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

极小化。

由于产品由两种原料混合配制而成，因此必须满足配料平衡条件，即：

$$x_1 + x_2 = 1$$

同时服从产品中 A、B、C 三种化学成分的最低含量的约束条件，即：

$$12x_1 + 3x_2 \geqslant 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geqslant 2$$

$$3x_1 + 15x_2 \geqslant 5$$

以及非负性条件：

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

因此，可得下列形式的数学模型：

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 12x_1 + 3x_2 \geqslant 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 2 \\ 3x_1 + 15x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这是一个将原料配制问题抽象为寻求变量 x_1 和 x_2 的值，在满足一组约束条件的同时，使目标函数取得最小值的数学规划问题。

例 3　某铁器加工厂要制作 100 套钢架，每套要用长为 2.9 米、2.1 米和 1.5 米的圆钢各一根。已知原料长为 7.4 米，问应如何下料，可使材料最省？

这是一个典型的在生产任务确定的条件下，如何合理地组织生产(下料)，使所消耗的资源数量最少的问题。显然在长度确定的原料上截取三种不同规格的圆钢，有不同的下料方案，但是各种下料方案的基本原则是下料以后剩下的料头必须足够短，已不能再截下任何一种规格的圆钢，即料头的长度必须短于 1.5

米。由此可以归纳出 8 种不同的下料方案，按料头长度逐步递增排序可得如下数据表：

圆钢（米）＼下料方案	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
2.9	1	2	0	1	0	1	0	0
2.1	0	0	2	2	1	1	3	0
1.5	3	1	2	0	3	1	0	4
料头（米）	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1.1	1.4

由此，问题归纳为如何混合使用这 8 种不同的下料方案，来制造 100 套钢架，且要使剩余的料头总长为最短。

可假设 x_j 表示用第 j 种下料方案下料的原料根数，$j=1, 2, \cdots, 8$，目标是使料头总长度：

$$Z=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5+0.9x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

极小化。

100 套钢架生产任务的约束条件为：

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_4+x_6&=100\\
2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7&=100\\
3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8&=100
\end{aligned}$$

同时要求 $x_j\geqslant 0$ $(j=1, 2, \cdots, 8)$ 且为整数。

由此，本例的合理下料问题可抽象为如下的数学模型：

$$\min Z=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5+0.9x_6+1.1x_7+1.4x_8$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}
x_1+2x_2+x_4+x_6=100\\
2x_3+2x_4+x_5+x_6+3x_7=100\\
3x_1+x_2+2x_3+3x_5+x_6+4x_8=100\\
x_j\geqslant 0,\ j=1, 2, \cdots, 8, \text{且为整数}
\end{cases}$$

1.1.2 线性规划的一般数学模型

从以上的三个例子可以看出它们属于同一类优化问题，它们的共同特点是：

(1) 每一个问题都可以用一组决策变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示某一方案，且在

一般情况下，变量的取值是非负的。

（2）都有一个目标函数，且这个目标函数可表示为这组变量的线性函数。

（3）都存在若干个约束条件，且约束条件用决策变量的线性等式或线性不等式来表达。

（4）每个问题都要求目标函数实现极大化(max)或极小化(min)。

满足上述 4 个特征的规划问题称为线性规划问题，由于问题的性质不同，线性规划的模型也有不同的形式，但一般地总可描述为：

目标函数　$\max(\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$\text{满足约束条件}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\ \geqslant) b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

通常称 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为决策变量，c_1，c_2，$\cdots$，c_n 为价值系数，a_{11}，a_{12}，$\cdots$，a_{mn} 为消耗系数，b_1，b_2，$\cdots$，b_m 为资源限制系数。

线性规划是运筹学的重要分支，也是学习其他最优化理论的基础和起点。自从 1947 年美国数学家 Dantiz 提出了求解线性规划的一般方法——单纯形法以来，线性规划在理论上日趋成熟；在应用上也日趋完善，特别是电子计算机的产生和发展，使线性规划在工业、农业、商业、交通运输业、经济计划与管理等领域的应用越来越广泛。有人曾对世界上 500 家著名的企业集团或跨国公司进行过调查，发现其中 95%以上曾应用过线性规划。因此无论从理论体系，还是从实际应用角度出发，系统地学习线性规划的理论和方法都是十分必要的。本章将从线性规划的图解法出发，介绍线性规划的基本概念和基本理论，为以后各章的深入学习打好基础。

1.2　线性规划的图解法

线性规划的图解法是借助几何图形来求解线性规划的一种方法。这种方法通常只适用于求解两个变量的线性规划问题，因此它不是线性规划问题的通常算法。但是线性规划的图解法有助于直观地了解线性规划的基本性质以及将在第 2 章介绍的线性规划的通用算法，即单纯形法的基本思想。以下通过上一节的例 1，来说明图解法的步骤。

1.2.1 图解法的基本步骤

例 4 利用例 1 说明图解法的主要步骤，例 1 的数学模型为：

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}30x_1 + 20x_2 \leqslant 160 \\ 5x_1 + x_2 \leqslant 15 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

本例是要确定决策变量 x_1 和 x_2 的值，使它们满足约束条件，同时又能使目标函数达到最大值。因此作为求解的第一步，首先必须把满足约束条件的所有 x_1 和 x_2 的值找出来，例如 $x_1 = 1$，$x_2 = 1$，它们满足非负条件，同时又满足其他 3 个约束。这种满足全部约束条件的 x_1 和 x_2 的值称为原问题的一个可行解。当然一个线性规划问题的可行解通常有很多个，如果只有一个可行解，那么最优化决策就失去了意义。我们把全部可行解的集合称为可行域，求解线性规划就是要在可行域中找出能使目标函数达到最优的可行解。本例的最优可行解应使目标函数 $Z = 5x_1 + 2x_2$ 达到最大。

画可行域比较简单。首先作一个以 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系（见图 1.1），由非负条件 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$ 可知可行域确定在直角坐标系的第 1 象限，

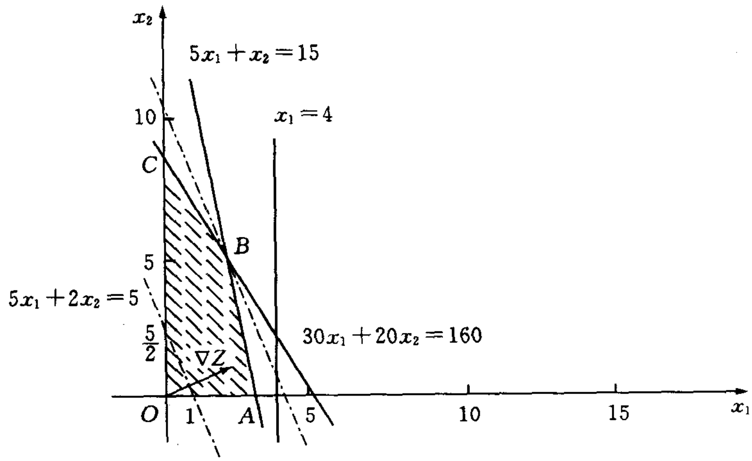

图 1.1

其他三个线性约束分别把坐标平面 Ox_1x_2 分为两半。例如第一个不等式 $30x_1 + 20x_2 \leqslant 160$ 以直线 $30x_1 + 20x_2 = 160$ 为界，把 Ox_1x_2 平面分为左下和右上两个半平面。显然满足不等式 $30x_1 + 20x_2 \leqslant 160$ 的所有点都在直线的左下方，为一个闭半平面。同理可以分别画出满足第二个不等式 $5x_1 + x_2 \leqslant 15$ 和第三个不等式 $x_1 \leqslant 4$ 的两个闭半平面。这三个闭半平面在第一象限的交集，即图 1.1 的闭四边形 $OABC$，就是本例中满足所有约束条件的可行解组成的可行域。

第二步要在可行域 $OABC$ 中找出一个点（可行解）$\boldsymbol{X}^* = (x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}}$，它在所有可行解中，可使目标函数值达到最大。目标函数 $Z = 5x_1 + 2x_2$ 在坐标平面 Ox_1x_2 中，可看成是以 x_1，x_2 为变量，以 Z 为参数的一簇平行直线，若 $Z = Z_0$，则在同一直线 $5x_1 + 2x_2 = Z_0$ 上的所有点 (x_1, x_2) 具有相同的目标函数值，因此称之为等值线，比如取 $Z = 5$，则在直线 $5x_1 + 2x_2 = 5$ 上的所有点 (x_1, x_2) 所对应的目标函数值都为 5。因此在可行域 $OABC$ 中寻找可使目标函数值达到最大的点，等价于在相互平行的一簇等值线中，寻找能使 Z 取得最大的且与可行域至少有一个交点的那条直线，该直线与可行域的交点就是最优的可行解。

由高等数学知识可知，目标函数 $Z = 5x_1 + 2x_2$ 作为一个二元函数存在一个能使函数值增加最快的方向，这个方向就是目标函数的梯度正方向，即 $\nabla Z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (5, 2)$，由梯度的性质可知，目标函数的梯度应与等值线簇相垂直。为了求出最优可行解，只需在坐标平面上画出梯度向量 $\nabla Z = (5, 2)$，然后任取一根与 ∇Z 相垂直的等值线。沿 ∇Z 的正方向（即 Z 的增加最快的方向）平移，直到等值线即将离开又未离开可行域时与可行域的那个交点（也可能是一条线段），就是最优解 $\boldsymbol{X}^*$。

本例中通过 B 点的等值线应为能使 Z 取值最大，同时与可行域又有一个交点的那条直线，B 点即为最优解。容易计算，B 点坐标为 $(2, 5)$，因此本题的最优解 $\boldsymbol{X}^* = (2, 5)^{\mathrm{T}}$，对应的最优值 $Z^* = 5 \times 2 + 2 \times 5 = 20$。即该厂每周安排生产甲种药品 2 吨，乙种药品 5 吨，每周可获最大利润 20 万元。

由上述分析可归纳出线性规划图解法的基本步骤：

(1) 建立以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系，画出线性规划问题的可行域。

(2) 求目标函数 $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ 的梯度 $\nabla Z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$。

(3) 任取等值线 $c_1x_1 + c_2x_2 = Z_0$，沿梯度 ∇Z 正方向平移（若是极小化问题，则沿负梯度方向 $-\nabla Z$ 平移），求等值线将离未离可行域时与可行域的