研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

图论及其应用

Tulun Jiqi Yingyong

(第2版)

徐俊明　编著

中国科学技术大学出版社

图论及其应用

（第 2 版）

徐俊明　编著

中国科学技术大学出版社
2004 · 合肥

内 容 简 介

本书以有向图为着眼点，系统地阐述了图论的基本概念、理论和方法以及基本应用. 内容包括 Euler 图与 Hamilton 图、树与图空间、平图与平面图、网络流与连通度、匹配与独立集、染色理论、图与群，以及它们在矩阵论、组合数学、组合优化、运筹学、线性规划、科学管理、电子学以及通讯和计算机科学等多方面的应用. 本书选材颇具特点，内容处理很有新意，立论严谨，叙述条理清晰，语言流畅. 书中附有大量习题和有价值的参考文献.

本书既可用作高校数学系、计算机科学系、电子学系、管理科学系等专业高年级本科生和研究生的必修课或选修课教材；也可用作高校教师、图论工作者的参考书；同时也为数学爱好者、科学管理工作者和工程技术人员提供一本自学图论的读本.

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/徐俊明编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2004.8
ISBN 7-312-01725-8

Ⅰ. 图…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 图论-高等学校-教材　Ⅳ. 0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083048 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销
开本：787×960/16　印张：17.5　字数：330 千
1998 年 1 月第 1 版　2004 年 8 月第 2 版
2004 年 8 月第 3 次印刷　印数：4201—7200 册
ISBN 7-312-01725-8/O・293　定价：25.00 元

第 2 版前言

我十分欣喜地获悉《图论及其应用》一书被国务院学位委员会审定批准为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书。这是各级领导、同行专家学者和广大读者对我的鼓励和鞭策。借此机会，我向他们表示真诚的谢意。

中国科学技术大学出版社极为重视本书的出版，组织了大量的人力和物力对本书进行重新排版和绘图。我借重新排版的机会，对原版进行了小规模的修订。第 2 版基本上保持了原版本的原貌，修正了一些勘误，改写了定理 4.2 和定理 4.3 的证明，使其更为简洁。采纳了部分读者的意见，对个别图论记号进行了改进。例如，群 Γ 关于 S 的 Cayley 图 $D_S(\Gamma)$ 必为 $C_\Gamma(S)$。由于版面的需要，第 2 版删去了原版中少量较容易或者过于难解的习题。第 2 版增加了部分最新的参考文献，供读者进一步阅读时参考。

徐俊明

2003 年 1 月 17 日于

中国科学技术大学，合肥

前　言

图论(Graph Theory)的产生和发展历经了二百多年的历史,大体上可以划分为三个阶段.

第一阶段是从 1736 年到 19 世纪中叶.这时的图论处于萌芽阶段,多数问题是围绕着游戏产生的,最有代表性的工作是著名的瑞士数学家 L. Euler 于 1736 年的 Königsberg 七桥问题.他的那篇论文被公认为图论历史上第一篇论文.

第二阶段从 19 世纪中叶到 1936 年.这个时期中图论问题大量出现,如四色问题(1852 年)和 Hamilton 问题(1856 年).同时出现了以图为工具去解决其他领域中一些问题的成果.最有代表性的工作是 Kirchhoff(1847 年)和 Cayley(1857 年)分别用树的概念去研究电网络方程组问题和有机化合物的分子结构问题."图(Graph)"这个词第一次出现是在 1878 年的英国〈自然〉杂志中.进入 20 世纪 30 年代,出现了一大批精彩的新理论和结果,如 Menger 定理(1927 年),Kuratowski 定理(1930 年)和 Ramsey 定理(1930 年)等等.这些理论和结果为图论的发展奠定了基础. 1936 年,匈牙利数学家 D. König 写出了第一本图论专著〈有限图与无限图的理论〉.图论作为数学的一个新分支已基本形成.

1936 年以后是第三阶段.由于生产管理、军事、交通运输、计算机和通讯网络等方面许多离散性问题的出现,大大促进了图论的发展.进入 70 年代以后,特别是大型电子计算机的出现,使大规模问题的求解成为可能. 图的理论及其在物理、化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、网络理论、社会科学及经济管理等几乎所有学科领域中各方面应用的研究都得到"爆炸性发展". 主要有以下三个原因:

1. 图论提供了一个自然的结构,由此而产生的数学模型几乎适合于所有科学(自然科学和社会科学)领域,只要这个领域研究的主题是"对象"与"对象"之间的关系.

2. 图论已形成自己的丰富词汇语言,它能简洁地表示出各个领域中"对象-关系"结构复杂而又难懂的概念. 图论思想和方法越来越被许多科学领域所接受,并已发挥且将日益发挥它的重要作用. 反过来,这些得益于图论的科学领域又向图论提出新的研究课题、新的概念和新的研究方法.

3. 图论提供了大量令人跃跃欲试的智力挑战性问题,小到初学者的简单习题,大到能使所有资深数学家感到棘手且悬而未决的难题.

由于图论的重要性,越来越多的大学已把它作为数学、计算机科学、电子学和科学管理等专业本科生和研究生的必修课和选修课. 编者已为中国科学技术大学数学系和全校高年级本科生和研究生多次开设此课程. 本书就是编者在《图论及其应用》讲义的基础上修改而成的.

本书所讨论的问题都是图论及其应用中最基本的课题. 我们对这些材料的处理方式是:着眼于有向图,而把无向图作为有向图的特例. 这样处理并不增加难度(几年来的教学实践证明了这一点),除避免定义和结果的重复叙述外,更直观而且似乎更接近图论的本质和发展的趋势.

图论内容之丰富和应用之广泛,是很难包括在一个学期使用的教材中的. 本书所涉及的材料,编者认为是必不可少的. 全书共分 7 章. 除介绍图的基本概念外,各章节所讨论的内容几乎都是图论研究中的专题. 我们对每个专题提供一些基本概念、经典结果和基本应用,并在一定程度上予以阐述. 各专题可以独立成章,但我们力争加强各专题之间的贯通联系,进一步揭示图论的数学本质,使之更具系统性和科学性。为了保留其独立性,我们用楷体给出部分主要结果的独立证明. 标有 * 号的章节和楷体字内容,初学者可以略去不读.

按照定义—定理—应用的叙述方式将每章分为两部分. 第一部分着重介绍概念和经典结果,并尽可能地对这些结果给出最新最简单的证明(有的结果给出多种证明). 所有定义用黑体字标出,并给出相应的英文,为读者今后进一步阅读英文文献提供方便. 第二部分介绍以第一部分的基本理论为依据的应用,强调解决实际问题有效方法的重要性并给出若干著名的有效算法. 略去那些仅利用图论术语而与阐明理论无关的所谓"应用". 我们在介绍图的理论、方法以及应用时,注重体现图论与组合学、代数、矩阵论、群论、组合优化、运筹学、线性规划、计算机科学、电子学和管理科学等的相互渗透. 每章末附有小结和参考文献,目的是为初学者提供进一步阅读的指南,同时也说明所用材料的原始和间接来源. 编者向这些论文和著作的作者表示感谢. 书末附有图论常用记号和名词索引,供备查之用.

节末的习题是正文的补充和扩展,有些乃是图论研究中的重要结论. 习题中引入的新定义,建议读者熟悉它,这对进一步学习有好处. 习题较多,读者应尽力多做一些,特别是那些用斜体标出的习题,因为后面的讨论要用到它们. 做图论习题不仅需要对概念和定理的深刻理解,而且还需要智慧和技巧,不做习题是很难学会和掌握图论的思想和方法的. 即使不能全做,阅读一下这些结论也是很有用处的. 较难的习题用黑体标出.

阅读本书只需要具备集合论和线性代数的基本知识. 对于研究生和高年级本科生来讲,这些知识都已具备.

根据编者以往的经验，作为数学系一学期的课程，每周 4 学时可以讲完本书的全部内容. 作为非数学系的选修课程，每周 3 学时可以讲完前六章第一部分（部分定理的证明及 2.4 节、3.3 节、6.3 和 6.4 节可以不讲）；部分应用内容（视其选修对象而定），也可以安排一些自习内容.

编者衷心感谢上海交通大学应用数学系李乔教授和中国科技大学数学系李炯生教授对编者的指导和帮助及对编写本书的始终不渝的鼓励和支持. 真诚感谢中国科学院系统科学研究所田丰教授和北方交通大学数学系刘彦佩教授对编者的关心和指导. 非常感谢中国科学技术大学出版社、教务处研究生院和数学系对本书出版的支持. 编者感谢中国科学技术大学历届选修此课程的同学们对学习这门课程表现出的极大热忱和对讲义提出的宝贵意见.

衷心希望同行专家、各位师友和读者批评指教.

徐俊明

1997 年 4 月 1 日于

中国科学技术大学，合肥

目 录

第 1 章　图的基本概念

在自然界和人类社会的实际生活中，用图形来描述某些对象（或事物）之间具有某种特定关系常常感到特别方便. 例如用工艺流程图来描述某项工程中各工序之间的先后关系，用竞赛图来描述某循环比赛中各选手之间的胜负关系，用网络图来描述某通讯系统中各通讯站之间信息传递关系，用交通图来描述某地区内各城市之间的铁路连接关系，用原理电路图来描述某电器内各元件导线连接关系，等等. 图形中的点表示对象（如上例中的工序、选手、通讯站等），两点之间的有向或无向连线表示两对象之间具有某种特定的关系（如上例中的先后关系、胜负关系、传递关系、连接关系等）. 事实上，任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图形来模拟. 由于我们感兴趣的是两对象之间是否有某种特定关系，所以图形中两点间连接与否甚为重要，而连接线的曲直长短则无关紧要. 由此数学抽象产生了图的概念. 研究图的基本概念和性质、图的理论及其应用，构成了图论的主要内容.

本章介绍图的基本概念、术语、记号和若干初等结果，它是本书的基础；然后介绍图在矩阵论中的应用.

提请读者注意的是，大多数图论学者在他们的著作、论文和演讲中都习惯使用自己的一套术语和记号. 甚至“图”这个词的意义也是不统一的. 为了在有关图论的讨论中避免歧义，每个人都得预先说清楚他所使用的图论语言. 本书将采用大多数学者所采用的术语和记号，书末附有索引.

1.1　图与图的图形表示

所谓**图**（**graph**）是指有序三元组 (V,E,ψ)，其中 V 非空称为**顶点集**（**vertex-set**），E 称为**边集**（**edge-set**），而 ψ 是 E 到 V 中元素有序对或无序对簇 $V\times V$ 的函数，称为**关联函数**（**incidence function**）. V 中元素称为**顶点**（**vertex**）（或**点**（**point**）），E 中元素称为**边**（**edge**），ψ 刻画了边与顶点之间的关联关系. 若 $V\times V$ 中元素全是有序对，则 (V,E,ψ) 称为**有向图**（**digraph**），记为 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$. 若 $V\times V$ 中元素全是无序对，则 (V,E,ψ) 称为**无向图**（**undirected graph** 或 **graph**），记为 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$. 设 $a\in E(D)$，则存在 $x,y\in V(D)$ 和有序对 $(x,y)\in V\times V$ 使 $\psi_D(a)=(x,y)$. a 称为**从 x 到 y 的有向边**（**directed edge from**

x **to** y). x 称为 a 的**起点**(**origin**),y 称为 a 的**终点**(**terminus**),起点和终点统称为**端点**(**end-vertices**). 设$e\in E(G)$,则存在 $x,y\in V(G)$ 和无序对$\{x,y\}\in V\times V$ 使$\psi_G(e)=\{x,y\}$. 由于无序对$\{x,y\}$和$\{y,x\}$表示同一个元素,所以通常简记 $\psi_G(e)=xy$ 或 yx. e 称为**连接** x **和** y **的边**(**edge connecting** x **and** y).

例 1.1.1 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$,其中:

$V(D)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,

$E(D)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$,

而 ψ_D 定义为:

$\psi_D(a_1)=(x_1,x_2),\psi_D(a_2)=(x_3,x_2),\psi_D(a_3)=(x_3,x_3),$

$\psi_D(a_4)=(x_4,x_3),\psi_D(a_5)=(x_4,x_2),\psi_D(a_6)=(x_4,x_2),$

$\psi_D(a_7)=(x_5,x_2),\psi_D(a_8)=(x_2,x_5),\psi_D(a_9)=(x_3,x_5).$

例 1.1.2 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$,其中:

$V(H)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$,

$E(H)=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9\}$,

而 ψ_H 定义为:

$\psi_H(b_1)=(y_1,y_2),\psi_H(b_2)=(y_3,y_2),\psi_H(b_3)=(y_3,y_3),$

$\psi_H(b_4)=(y_4,y_3),\psi_H(b_5)=(y_4,y_2),\psi_H(b_6)=(y_4,y_2),$

$\psi_H(b_7)=(y_5,y_2),\psi_H(b_8)=(y_2,y_5),\psi_H(b_9)=(y_3,y_5).$

例 1.1.3 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$,其中:

$V(G)=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}$,

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$,

而 ψ_G 定义为:

$\psi_G(e_1)=z_1z_2,\quad \psi_G(e_2)=z_1z_4,\quad \psi_G(e_3)=z_1z_6,$

$\psi_G(e_4)=z_2z_3,\quad \psi_G(e_5)=z_3z_4,\quad \psi_G(e_6)=z_3z_6,$

$\psi_G(e_7)=z_2z_5,\quad \psi_G(e_8)=z_4z_5,\quad \psi_G(e_9)=z_5z_6.$

我们采用"图"这个词,是因为我们所定义的图可以用图形来表示,而且这种图形表示比较直观而有助于我们理解图的许多概念和性质. 每个顶点用点(为清晰起见,点往往被画成小圆圈)来表示. 有向图中的每条边用一条从起点对应的点连到终点对应的点的有向曲线段来表示;无向图中的每条边用一条连接两端点对应的点之间的线段来表示. 这样的图形称为图的**图形表示**(**diagrammatic representation**).

例如,图 1.1 所示的两个图形都是例 1.1.1 中所定义的图 D. 例 1.1.2 中所定义的图 H 和例 1.1.3 中所定义的图 G 的图形表示分别如图 1.2(a)和(b)所示.

因为表示顶点的点和表示边的曲线段的相对位置是无关紧要的，所以图形表示并不是惟一的. 例如，图 1.1 中所示的图形就是例 1.1.1 中定义的图 D 的两种图形表示. 也正是利用了这一特点，图的图形表示可以画得非常精美. 因为图的图形表示已描述出它的顶点与边之间所具有的关联关系，所以，在大多数场合下，其图形表示不用标出边的名称. 例如，图 1.2(b)中所示的图形就是例 1.1.3 中无向图 G 的图形表示，虽然没有标出边的名称，但其边与顶点之间的关联关系已是一目了然。

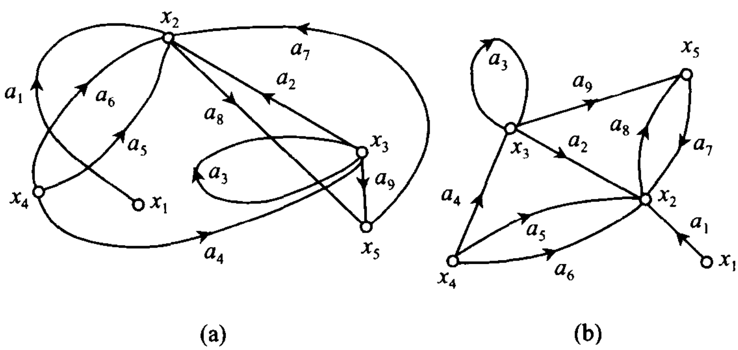


图 1.1　图 D 的两种图形表示

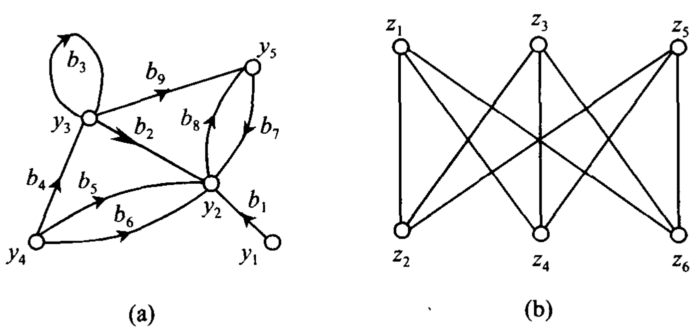


图 1.2　有向图 H 和无向图 G 的图形表示

必须指出，图是一个抽象的数学概念. 尽管我们能用图形来表示，使图的结构形象化，但是图的定义与这些图形毫不相干. 然而，我们常常给出图的图形表示，把它的点称为“顶点”，它的曲线段称为“边”. 因此，当我们画出图的图形表示时，每条线段的内部自身不要相交，也不要穿过表示顶点的点.

图论中大多数定义和概念是根据图的图形表示提出来的. 例如，边与它的两端点称为**关联的**(**incident**)；与同一条边关联的两端点或者与同一个顶点关联的两条边称为**相邻的**(**adjacent**). 两端点相同的边称为**环**(**loop**). 例如，图 1.1 和图 1.2(a)所示的图中边 a_3 和 b_3 都是环. 有公共起点并有公共终点的两条边称

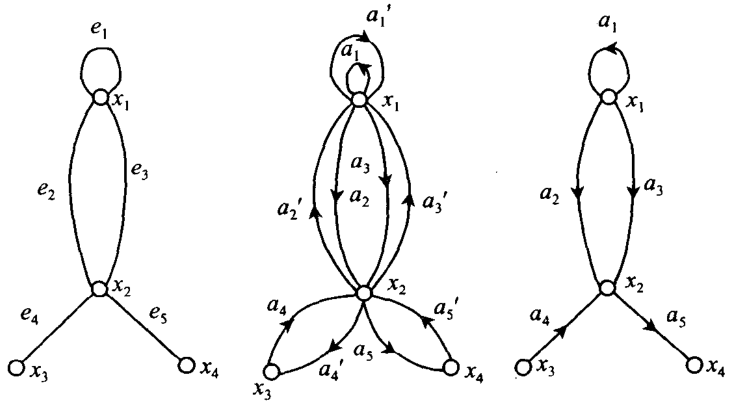
为**平行边**(**parallel edges**)或者称为**重边**(**multi-edges**). 两端点相同但方向互为相反的两条有向边称为**对称边**(**symmetric edges**). 例如,图 1.1 所示的图 D 中,两条边 a_5 和 a_6 是平行边,但两条边 a_7 和 a_8 不是平行边,而是对称边.

无环并且无平行边的图称为**简单图**(**simple graph**). 例如,上面定义的 3 个图,其中图 D 和图 H 都不是简单图,而图 G 是简单图. 在简单图(V,E,ψ)中,由于起点为 x 且终点为 y 的边至多有一条,因此,图中边可以直接用顶点对来表示,而关联函数 ψ 就可以直接表示在其边集中,故可简记为(V,E). 例如,在例 1.1.3 中定义的图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$中,其边集 $E(G)$可以写成

$$E(G)=\{z_1z_2,z_1z_4,z_1z_6,z_2z_3,z_3z_4,z_3z_6,z_2z_5,z_4z_5,z_5z_6\}.$$

于是该图 G 可以写成$G=(V(G),E(G))$.

由图的定义,我们立即可以看出,有向图与无向图的差别仅在于 $V\times V$ 中元素是 V 中元素的有序对还是无序对. 然而,无序对$\{x,y\}$可以视为两个有序对(x,y)和(y,x). 也就是说,对于无向图 G,将 G 中每条边 e 用两条与 e 有相同端点的对称边 a 和 a'来替代后得到一个有向图 D. 这样得到的有向图 D 称为 G 的**对称有向图**(**symmetric digraph**). 由此可见,无向图可以视为特殊的有向图. 图 1.3(a)和(b)中所示的图就是这样的两个图.



(a) 无向图 G　　(b) G 的对称有向图 D　　(c) G 的定向图 H

图 1.3

图论中研究的部分内容常与边的方向没有关系,故在讨论与边方向没有关系的有向图 D 时,人们通常去掉边上的方向. 这样得到的无向图 G 称为 D 的**基础图**(**underlying graph**). 反之,任给一个无向图 G,将 G 的边指定一个方向从而得到一个有向图 H,称这样的有向图 H 为G 的一个**定向图**(**oriented graph**). 图 1.3(a)和(c)所示的图就是这样的两个图.

设(V,E,ψ)是图,V 中元素的个数ν 和 E 中元素的个数ε,即 $\nu=|V|$和 $\varepsilon=|$

$E|$ 分别称为该图的**顶点数**或**阶**(**order**)和**边数**(**size**).

例如,对于例 1.1.1,例 1.1.2 和例 1.1.3 中定义的图 D,H 和 G 分别有 $\nu(D)=\nu(H)=5$, $\nu(G)=6$, $\varepsilon(D)=\varepsilon(H)=\varepsilon(G)=9$.

阶数为 1 的简单图称为**平凡图**(**trivial graph**),边数为零的图称为**空图**(**empty graph**). ν 和 ε 都是有限的图称为**有限图**(**finite graph**).

本书只涉及有限图. 除特别声明外,字母 D 总表示有向图,而字母 G 总表示无向图,ν 和 ε 总表示图的阶和边数. 所涉及的数都是非负整数. 设 r 是一个正实数,$\lceil r\rceil$ 表示不小于 r 的最小整数; $\lfloor r\rfloor$ 表示不大于 r 的最大整数. 一个 n 元素集的 $k(\leqslant n)$ 个元素不重复组合数记为 $\binom{n}{k}$,即

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

例 1.1.4　证明:在任意 6 个人的集会上,要么有 3 人曾相识,要么有 3 人不曾相识.

证明　我们用 A,B,C,D,E,F 代表这 6 个人,其中 2 人曾相识,则代表这 2 人的两顶点之间连 1 条红边;否则连 1 条蓝边. 于是原来的问题就等价于证明在这样得到的图中必含同色三角形. 考察某一个顶点,设为 F. 与 F 关联的边中必有 3 条同色. 不妨设它们是 3 条红边 FA、FB 和 FC. 再看三角形 ABC. 如果它有 1 条红边,设为 AB,则 FAB 是红边三角形;如果三角形 ABC 没有红边,则它本身就是蓝边三角形. □

习　题

1.1.1　分别画出下列 5 个顶点集为 V 并且边集为 E 的无平行边图 B,K,Q,D 和 G 的图形表示,其中:

(a) $V(B)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1\}\}$,并且若 $x,y\in V(B)$, $x=x_1x_2x_3$, 则 $(x,y)\in E(B)\Leftrightarrow y=x_2x_3\alpha$,其中 $\alpha\in\{0,1\}$;

(b) $V(K)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1,2\}, x_{i+1}\neq x_i\}$, 并且若 $x,y\in V(K)$, $x=x_1x_2x_3$, 则 $(x,y)\in E(K)\Leftrightarrow y=x_2x_3\alpha$, 其中 $\alpha\in\{0,1,2\}$ 且 $\alpha\neq x_3$;

(c) $V(Q)=\{x_1x_2x_3: x_i\in\{0,1\}\}$,并且若 $x=x_1x_2x_3$, $y=y_1y_2y_3\in V(Q)$,则 $xy\in E(Q)\Leftrightarrow|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|=1$.

1.1.2　证明:

(a)若 D 是简单有向图,则 $\varepsilon\leqslant\nu(\nu-1)$;

(b)若 G 是简单无向图,则 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$.

1.1.3　用 $\mathscr{D}_\nu$ 和 $\mathscr{G}_\nu$ 分别表示以 $\{x_1,x_2,\cdots,x_\nu\}$ 为顶点集的 ν 阶简单有向图集和 ν 阶简单无向

图集. 证明:

(a) $|\mathscr{D}_\nu|=2^{\nu(\nu-1)}$; (b) $|\mathscr{G}_\nu|=2^{\nu(\nu-1)/2}$.

1.1.4 证明:无向图 G 有 $2^{\varepsilon(G)}$ 个定向图.

1.1.5 用 $\mathscr{D}(\nu,\varepsilon)$ 和 $\mathscr{G}(\nu,\varepsilon)$ 分别表示阶数为 ν 且边数为 ε 的简单有向图集和简单无向图集. 证明:

(a) $|\mathscr{D}(\nu,\varepsilon)|=\binom{\nu(\nu-1)}{\varepsilon}$;

(b) $|\mathscr{G}(\nu,\varepsilon)|=\binom{\nu(\nu-1)/2}{\varepsilon}$.

1.2 图的同构

设 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 是两个图. 如果 $V(D)=V(H)$,$E(D)=E(H)$ 且 $\psi_D=\psi_H$,则称 D 和 H 是**恒等的(identical)**,记为 $D=H$. 显然,恒等的两个图可以用同一个图形来表示. 但不恒等的两个图也可能有相同的图形表示. 例如,由例 1.1.1 所定义的图 D 和由例 1.1.2 所定义的图 H 是不恒等的,但它们有完全相同的图形表示(如图 1.1(b)和图 1.2(a)所示),差别仅在于它们的顶点和边的名称不同.

两个图 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$ 和 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$ 称为**同构的(isomorphic)**,记为 $D\cong H$,如果存在两个双射

$$\theta: V(D)\to V(H)$$

和

$$\varphi: E(D)\to E(H),$$

使得 $\forall\, a\in E(D)$,

$$\psi_D(a)=(x,y)\Leftrightarrow\psi_H(\varphi(a))=(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

映射对 (θ,φ) 称为 D 和 H 之间的一个**同构映射(isomorphic mapping)**.

要证明两个图是同构的,就必须指出它们之间的一个同构映射. 例如,例 1.1.1 中的图 D 和例 1.1.2 中的图 H 是同构的,因为由

$$\theta(x_i)=y_i,\ i=1,2,\cdots,5$$

和

$$\varphi(a_j)=b_j,\ j=1,2,\cdots,9$$

所确定的映射 $\theta:V(D)\to V(H)$ 和 $\varphi:E(D)\to E(H)$ 是双射,而且 (θ,φ) 是 D 和 H 之间的一个同构映射.

容易看到,图的同构关系是一种等价关系. 这种等价关系将 ν 阶图分成若干等价类,同构的两个图属于同一类. 同一类图有相同的结构,差别仅在于顶点和边的名称不同. 由于人们感兴趣的是图的结构,所以常常略去名称,用一个其顶点和边都没有名称的图形表示作为同构图等价类中的代表元素. 有时我们也

给图的顶点和(或)边以标号,目的是为了便于称呼它们. 顶点已确定标号的图称为**标号图**(**labelled graph**).

下面介绍一些特殊的图类,在今后的讨论中经常遇到它们.

图 1.4 所示的图称为 Petersen 图. 以后,我们将看到这是一个结构简单而十分有趣的图. 它常常作为各种反例出现在任何一本图论教科书中.

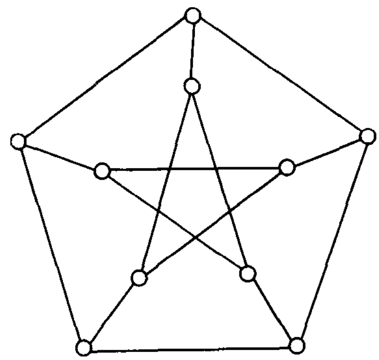


图 1.4 Petersen 图

任何不同两顶点之间都有边相连的简单无向图称为**完全图**(**complete graph**). 完全图的对称有向图称为**完全有向图**(**complete digraph**). 在同构意义下,ν 阶完全图和完全有向图都是唯一的,分别记为 K_ν 和 K_ν^*. 图 1.6(a)和(b)所示的图分别是 K_5 和 K_3^*. K_3 称为**三角形**(**triangle**). 由定义,我们立即有

$$\varepsilon(K_\nu)=\binom{\nu}{2}=\frac{1}{2}\nu(\nu-1),$$

$$\varepsilon(K_\nu^*)=2\binom{\nu}{2}=\nu(\nu-1).$$

完全图的定向图称为**竞赛图**(**tornament**). 之所以用这个名称,是因为这种图完全形象地描述了有 ν 个选手参加的某项循环比赛的结果. 选手 x 战胜了选手 y,则边 xy 定向从 x 到 y. 在同构意义下,1 阶竞赛图是平凡图;2 阶竞赛图仅有一个;3 阶竞赛图有两个;4 阶竞赛图有 4 个. 这些都表示在图 1.5 中.

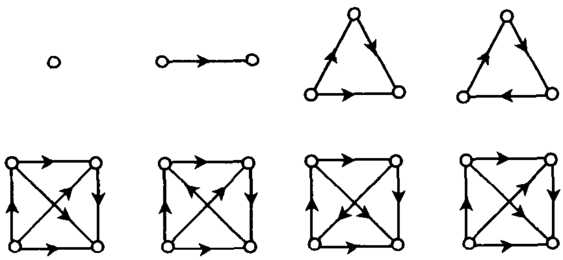


图 1.5 $\nu(=1,2,3,4)$阶不同构竞赛图

若无环图的顶点集可以划分为两个非空子集 X 和 Y 使得 X 中任何两顶点之间无边相连并且 Y 中任何两顶点之间也无边相连,则称该图为 **2 部分图**(**bipartite graph**),$\{X,Y\}$称为 **2 部划分**(**bipartation**). 例如,图 1.2(b)所示的图 G 是一个 2 部分图,其中 $X=\{z_1,z_3,z_5\}$,$Y=\{z_2,z_4,z_6\}$. 2 部划分为$\{X,Y\}$的 2 部分图有时记为$(X\cup Y,E,\psi)$. 简单 2 部分无向图$(X\cup Y,E)$称为**完全 2 部分图**(**complete bipartite graph**),如果 X 中每个顶点与 Y 中每个顶点之间均有边相连. 例如,图 1.2(b)中所示的图是一个完全 2 部分图. 如果$|X|=m$,$|Y|=n$,那