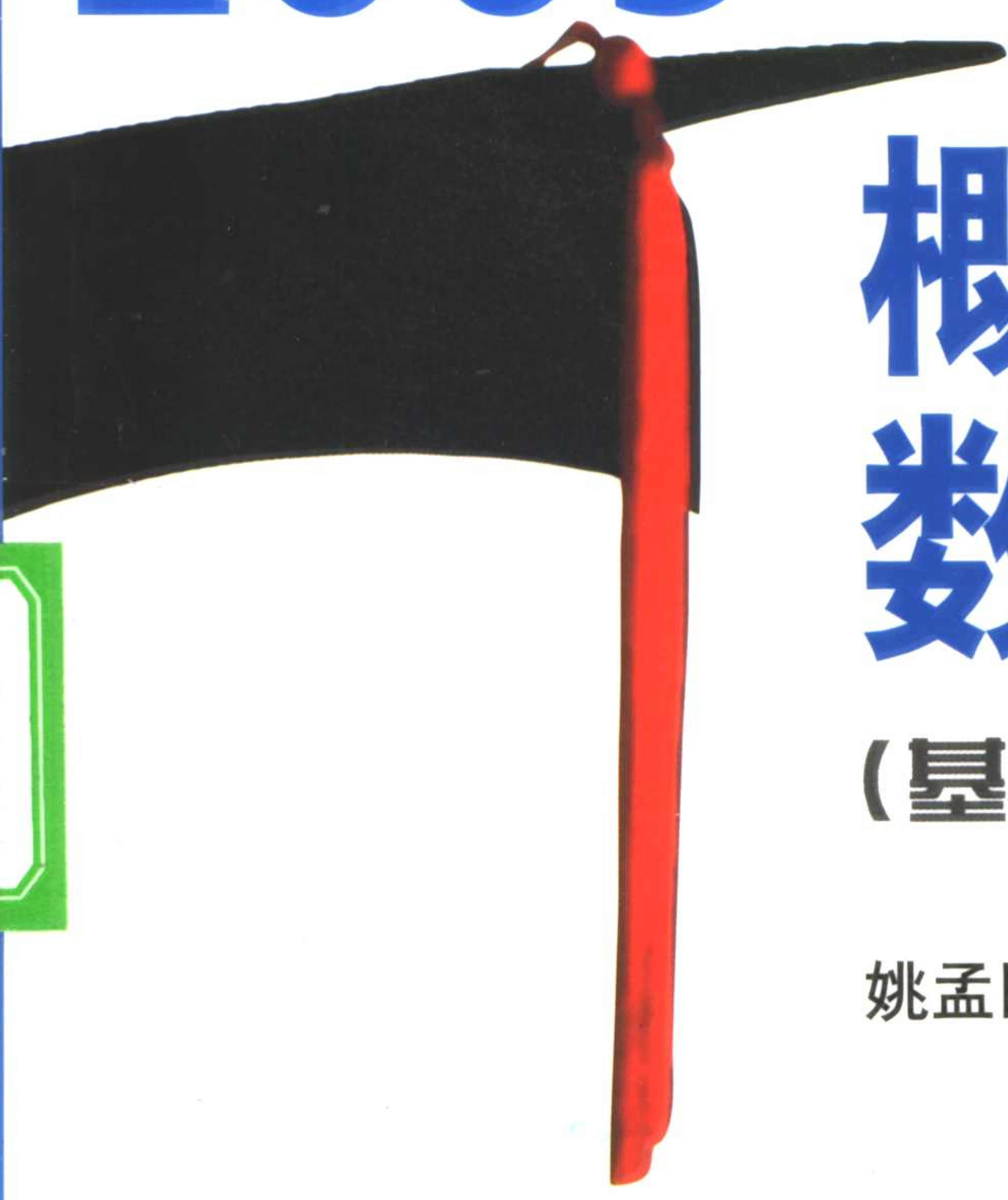
北京大学研究生院策划

北大版

研究生入学考试 2005



概率论与数理统计

（基础篇）

姚孟臣 编著

北京大学出版社

2005年研究生入学考试应试指导丛书

概率论与数理统计

（基础篇）

姚孟臣　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/姚孟臣编著. 一北京:北京大学出版社,2004.3
(2005 年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04480-1

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O21

内 容 简 介

本书是工学类、经济和管理学类硕士研究生入学考试科目“概率论与数理统计”复习指导书.本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学,深知考生的疑难与困惑.作者把他们的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩.

本书紧扣数学考试大纲,贴切考试实践,内容丰富.全书共分八章.内容包括:随机事件和概率,随机变量及其分布,二维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计及假设检验等.本书结构新颖,每一章按照:考试要求,复习要点(重要定义、定理及公式),典型例题分析,练习题四部分编写.本书概念叙述简捷,解题思路清晰,对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养,是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为硕士研究生入学考试数学一至数学四“概率论与数理统计”的复习指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习参考用书.

书　　名:概率论与数理统计(基础篇)
著作责任者:姚孟臣　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04480-1/G·0564
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内 100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16 开本　14.25 印张　360 千字
2001 年 4 月第 2 版　2004 年 3 月第 3 次修订
2004 年 3 月第 4 次印刷
定　　价:18.00 元

前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2005年研究生入学考试应试指导丛书》，其中包括复习指导书：《高等数学(工学类)》、《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)以及《数学模拟试卷(经济学类)》共5册，其中《线性代数》、《概率论与数理统计》(基础篇)供数学一至数学四考生共同使用，《微积分》、《数学模拟试卷(经济学类)》为经济学与管理学考生所编写。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成：

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确把握考试要求，这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳，总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示，这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成：一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十四份，其中数学三、四各7份；另一部分是历年数学三、四考研试题及解答。

本套书可作为参加硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考用书。

张清允同志参加了本书的资料整理及有关章节的编写工作。由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年3月

目　　录

第一章　随机事件和概率

一、考试要求

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，重点掌握事件的关系与运算；

2. 理解概率与条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会运用古典概型、几何概型计算有关的概率；

3. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概公式及贝叶斯公式；

4. 理解事件独立性的概念，掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法；理解独立重复试验的概念，掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

二、复习要点

（一）重要概念及性质

定义 1.1（随机现象）　在一定条件下，具有多种可能发生的结果的现象称为**随机现象**. 这类现象的一个共同点是：事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

定义 1.2（随机试验）　为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的两个条件：

（1）在相同的条件下可以重复进行；

（2）试验都有哪些可能的结果是明确的，但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的，

那么就称它是一个**随机试验**，简称为**试验**. 一般用字母 E 表示.

定义 1.3（样本空间）　在随机试验中，每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω.

例 1　设 E_1 为从 10 件产品（其中 2 件次品，8 件正品）之中任取 3 件，观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品（$i=0,1,2$），于是 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 2　设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击，直到击中目标为止，观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次（$i=1,2,\cdots$），于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 3　设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω. 显然有 $\omega\in[0,5)$，即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出，随机试验大体可以分成只有有限个可能结果的（如 E_1）；有可列个可能结果的（如 E_2）和有不可列个可能结果的（如 E_3）这样三种情况.

应该说明的是，一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外，一个随机试验的条件有的是人为的，有的是客观存在的. 在后一种情况下，每当试验条件实现时，人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果，但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此，我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含意的.

例 4　写出下列随机试验的样本空间 Ω：

（1）同时掷两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

（2）10 件产品中有 3 件是次品，每次从中取 1 件，取出后不再放回，直到 3 件次品全部取出为止，记录抽取的次数；

（3）生产某种产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；

（4）将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

解 (1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$;

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$;

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$;

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度,有

$$\Omega=\{(x,y,z)|x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

定义 1.4(随机事件) 所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集,随机事件简称为**事件**,用字母 A,B,C 等表示.因此,某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生,记为 $\omega\in A$.

在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,记作 Ω.在每次试验中必定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.我们知道,必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 都不是随机事件.因为作为试验的结果,它们都是确定性的,并不具有随机性.但是为了今后讨论问题方便,我们也将它们当作随机事件来处理.

定义 1.5(事件的关系)

(1) 包含

设 A,B 为两个事件.如果 A 中的每一个样本点都属于 B,那么称事件 B **包含**事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.这就是说,在一次试验中,如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 等价

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立,那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**,记为 $A=B$.这就是说,在一次试验中,等价的两个事件同时发生或同时不发生,因此可以把它们看成是一样的.

(3) 互斥(互不相容)

设 A,B 为两个事件.如果 $A\cdot B$[①]$=\varnothing$,那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的(或**互斥**的).这就是说,在一次试验中事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形.即,如果 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n=\varnothing$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互斥的.如果 $A_i\cdot A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,这时我们又称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**两两互斥**的.注意,如果 n 个事件两两互斥,那么这 n 个事件之间一定互斥;反之不真.

(4) 独立

设 A,B 是某一随机试验的任意两个随机事件.称 A 与 B 是**相互独立**的,如果

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

这就是在 A 与 B 独立的情况下事件 A 与 B 乘积的概率公式.可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系.所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性.类似地当 $P(B)\neq 0$ 时,A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A|B)=P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义,我们可以得到:若事件 A 与 B 相互独立,则 $\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

如果事件 A,B,C 满足

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

---

① 这里出现的 $A\cdot B$(及后面出现 AB)表示事件 A 与 B 的**交**,在第 3 页才给出了它的定义.本书为了便于考生复习,集中分类归纳叙述了一些概念或术语,这就可能导致某些概念或术语提前引出,而它们的定义是滞后给出的.请读者在阅读本书时能正确理解作者的用意.

注意，事件 A,B,C 相互独立与事件 A,B,C 两两独立不同，两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立. 因此，相互独立一定是两两独立，但反之不一定.

对于 n 个事件的独立性，我们有

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$ 下列各式同时成立：

$$\begin{cases}P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),\end{cases}$$

那么称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

定义 1.6（事件的运算）

(1) 并

设 A,B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**并**或**和**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 这就是说，事件 $A\cup B$ 表示在一次试验中，事件 A 与 B 至少有一个发生.

我们用 $A_1+A_2+\cdots+A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；进而用 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \xlongequal{\text{def}} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生.

(2) 交

设 A,B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**交**或**积**，记为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$，有时也简记为 AB. 这就是说，事件 $A\cap B$ 表示在一次试验中，事件 A 与 B 同时发生.

我们用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生；进而用 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n\cdots \xlongequal{\text{def}} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

(3) 逆（对立）

对于事件 A，我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的**逆**（或 A 的**对立事件**），记为 $\overline{A}$. 这就是说，事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生（即 $A\cdot\overline{A}=\varnothing$，称它们具有**互斥性**），而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生（即 $A+\overline{A}=\Omega$，称它们具有**完全性**）. 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：

$$\begin{cases}A\cdot\overline{A}=\varnothing,\\ A+\overline{A}=\Omega.\end{cases}$$

根据上面的基本运算定义，不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律：

1) $A+B=B+A$（加法交换律）；

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$（加法结合律）；

3) $A+A=A$；

4) $A+\overline{A}=\Omega$；

5) $A+\Omega=\Omega$；

6) $A+\varnothing=A$；

7) $A\cdot B=B\cdot A$（乘法交换律）；

8) $(AB)C=A(BC)$（乘法结合律）；

9) $A\cdot A=A$；

10) $A\cdot\overline{A}=\varnothing$；

11) $A\cdot\Omega=A$；

12) $A\cdot\varnothing=\varnothing$；

13) $A(B+C)=AB+AC$（分配律）；

14) $A+BC=(A+B)(A+C)$（分配律）；

15) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$（对偶原理(1)）；

16) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$（对偶原理(2)）.

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算. 例如，我们称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 可见，事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

例 5 设 A,B,C 是三个随机事件. 试用 A,B,C 表示下列各事件：

(1) 恰有 A 发生；　(2) A 和 B 都发生而 C 不发生；

(3) 所有这三个事件都发生；　(4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) 至少有两个事件发生；　(6) 恰有一个事件发生；

(7) 恰有两个事件发生；　(8) 不多于一个事件发生；

(9) 不多于两个事件发生；　(10) 三个事件都不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) ABC；(4) $A+B+C$；

(5) $AB+BC+CA$；(6) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(7) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(8) $\overline{AB+BC+CA}$；(9) $\overline{ABC}$；(10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 6 设某工人连续生产了四个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品；　(2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品；　(4) 至少有三个不是次品；

(5) 恰好有三个是次品；　(6) 至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$；(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$；

(4) $A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1A_2A_3A_4$；

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$；

(6) $A_1A_2A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$.

例 7 下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系？

(1) $AB=A$；　(2) $A+B=A$.

解 (1) 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$ 且 $A\subset AB$”是等价的，由 $A\subset AB$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $A\subset B$，因此有 $A\subset B$.

(2) 因为“$A+B=A$”与“$A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$”是等价的，由 $A+B\subset A$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $B\subset A$，因此有 $B\subset A$.

定义 1.7(概率的公理化定义) 设 E 是一个随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，定义一个函数 $P(A)$(其中 A 为任一随机事件)，且 $P(A)$ 满足以下三条公理，则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

公理 1(非负性) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2(规范性) $P(\Omega)=1$.

公理 3(可列可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

利用概率的公理化定义，可导出概率的下列一些性质：

1) $P(\varnothing)=0$；

2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个互不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$$

此称为概率的有限可加性；

3) 对任意事件 A，$P(\overline{A})=1-P(A)$，$P(A)=1-P(\overline{A})$；

4) 对事件 A,B，若 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)，且\ P(A)\geqslant P(B)；$$

5) 对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

该公式称为**加法公式**. 利用归纳法可推出 n 个事件的加法公式：

对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

这些性质将帮助我们解决概率计算问题.

定义 1.8(概率的统计定义) 在一组不变的条件 S 下，独立地重复作 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数，当试验次数 n 很大时，如果 A 的频率 $f_n(A)=\dfrac{\mu}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动；而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**. 记作

$$P(A)=p.$$

定义 1.9(概率的古典定义) 我们把具有特性：

1) 试验的结果是有限个；

2) 每个结果出现的可能性是相同的

随机试验称为**古典概型随机试验**，就是说，在我们所讨论的基本事件空间 Ω 中，基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 是有限个，并且

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n).$$

设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

所谓**古典概型**就是利用关系式(1.1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

例 8 一个口袋装有 10 个外形相同的球，其中 6 个是白球，4 个是红球. "无放回"地从袋中取出 3 个球，求下述诸事件发生的概率(所谓"无放回"是指，第一次取一个球，不再把这个球放回袋中，再去取另一个球)：

(1) $A_1=\{$没有红球$\}$； (2) $A_2=\{$恰有两个红球$\}$；

(3) $A_3=\{$至少有两个红球$\}$； (4) $A_4=\{$至多有两个红球$\}$；

(5) $A_5=\{$至少有一个白球$\}$； (6) $A_6=\{$颜色相同的球$\}$.

解 设 $A=\{$任取三个球$\}$，其基本事件空间中基本事件的个数(即从 10 个球中任取 3 个的"一般组合"数)

$$n=C_{10}^{3}=120.$$

(1) A_1 是由上面 120 个基本事件中的

$$m_1=C_6^3C_4^0=20$$

个组成. 这里的 $C_6^3C_4^0$ 是从 6 个白球中任取 3 个，从 4 个红球中取出 0 个(即不取红球的"两类不同元素的组合"数). 根据关系式(1.1)，有

$$P(A_1)=\frac{m_1}{n}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}.$$

(2) A_2 是由基本事件中的

$$m_2=C_6^1C_4^2=36$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_2)=\frac{m_2}{n}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}.$$

(3) A_3 是由基本事件中的

$$m_3=C_6^1C_4^2+C_6^0C_4^3=40$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_3)=\frac{m_3}{n}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}.$$

(4) A_4 是由基本事件中的

$$m_4=C_6^3C_4^0+C_6^2C_4^1+C_6^1C_4^2=116$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_4)=\frac{m_4}{n}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}.$$

(5) A_5 是由基本事件中的

$$m_5=C_6^1C_4^2+C_6^2C_4^1+C_6^3C_4^0=116$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_5)=\frac{m_5}{n}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}.$$

(6) A_6 是由基本事件中的

$$m_6=C_6^3C_4^0+C_6^0C_4^3=24$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_6)=\frac{m_6}{n}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}.$$

例9 在例8的条件下,"有放回"地从袋中取出3个球,求例8中诸事件发生的概率(所谓"有放回"是指,第一次取一个球,记录下这个球的颜色后,再把这个球放回袋中,然后再去任取一个球).

解 显然有放回的抽取是一个可重复的排列问题,于是基本事件的个数

$$n=10^3=1000.$$

(1) A_1 是由上面1000个基本事件中的

$$m_1=6^3=216$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_1)=\frac{m_1}{n}=\frac{216}{1000}=0.216.$$

(2) A_2 是由基本事件中的

$$m_2=3\times 6\times 4^2=288$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_2)=\frac{m_2}{n}=\frac{288}{1000}=0.288.$$

(3) A_3 是由基本事件中的

$$m_3=3\times 6\times 4^2+4^3=352$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_3)=\frac{m_3}{n}=\frac{352}{1000}=0.352.$$

(4) A_4 是由基本事件中的

$$m_4=3\times 6\times 4^2+3\times 6^2\times 4+6^3=936$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_4)=\frac{m_4}{n}=\frac{936}{1000}=0.936.$$

(5) A_5 是由基本事件中的

$$m_5=6^3+3\times 6^2\times 4+3\times 6\times 4^2=936$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_5)=\frac{m_5}{n}=\frac{936}{1000}=0.936.$$

(6) A_6 是由基本事件中的

$$m_6=6^3+4^3=280$$

个组成.根据关系式(1.1),有

$$P(A_6)=\frac{m_6}{n}=\frac{280}{1000}=0.28.$$

例 10 把 10 本书随意放在书架上,求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

解 基本事件总数 $n=10!$,有利于将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数 $m=6!\ 5!$ (其中 6! 是指 5 本书当作一个元素进行全排列的总数,5! 是 5 本书相互之间进行全排列的总数),故

$$P(A)=\frac{6!5!}{10!}=\frac{1}{42}.$$

例 11 将 k 个不同的球随机地放入 N 个盒子中去($k\leqslant N$).假设每个盒子能容纳的球数不限,试求下列事件的概率:

(1) 指定的 k 个盒子中各有一球(事件 A);

(2) 恰有 k 个盒子,其中各有一球(事件 B).

解 将 k 个球放入 N 个盒子中去的不同放法作为不同的基本事件,因每只球都有 N 个盒子可供放入,故共有 $N\times N\times\cdots\times N=N^k$ 种不同放法,即基本事件总数 $n=N^k$.

(1) 对事件 A,其不同放法相当于这 k 个球在这 k 个指定位置的全排列 $k!$,即 $m=k!$,故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{k!}{N^k}.$$

(2) 对事件 B,首先在 N 个盒子中任选 k 个盒子出来,其不同选法有 C_N^k 种;再在选定的 k 个盒子中各放一球,其不同放法由(1)知为 $k!$ 种,故有利于事件 B 的不同放法共有 $C_N^k\cdot k!$ 种,即 $m=C_N^k\cdot k!=A_N^k$,所以

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{A_N^k}{N^k}.$$

例 12 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一枚色子(骰子)接连掷两次先后出现的点数,求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解 一枚色子(骰子)掷两次其基本事件总数 $n=6^2=36$,方程有实根的充要条件是 $B^2-4C\geqslant 0$ 或 $C\leqslant B^2/4$.易见

B	1	2	3	4	5	6
使 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$ 的基本事件数	0	1	2	4	6	6
使 $C=\frac{B^2}{4}$ 的基本事件数	0	1	0	1	0	0

所以

$$p=\frac{1+2+4+6+6}{36}=\frac{19}{36},\quad q=\frac{1+1}{36}=\frac{1}{18}.$$

定义 1.10(概率的几何定义) 我们把具有特性：

1) 试验的结果是无限且不可列的；

2) 每个结果出现的可能性是均匀的

随机试验称为**几何型随机试验**. 在几何型随机试验中，我们是通过几何度量(长度、面积、体积等)来计算事件出现的可能性.

设 E 为几何型的随机试验，其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述，而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件，则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}, \tag{1.2}$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的**几何度量**.

所谓**几何概型**就是利用关系式(1.2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意，上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关，而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

例 13 某地铁每隔五分钟有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每一个乘客到站等车时间不多于 2 分钟的概率.

解 设 $A=\{$每一个乘客等车时间不多于 2 分钟$\}$. 由于乘客可以在接连两列车之间的任何一个时刻到达车站，因此每一乘客到达站台时刻 t 可以看成是均匀地出现在长为 5 分钟的时间区间上的一个随机点，即 $\Omega=[0,5)$.

图 1.1

又设前一列车在时刻 T_1 开出，后一列车在时刻 T_2 到达，线段 T_1T_2 长为 5(见图1.1)，即 $L(\Omega)=5$；T_0 是 T_1T_2 上一点，且 T_0T_2 长为 2. 显然，乘客只有在 T_0 之后到达(即只有 t 落在线段 T_0T_2 上)，等车时间才不会多于 2 分钟，即 $L(A)=2$. 因此

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{2}{5}.$$

例 14(会面问题) 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，如果甲船的停泊时间是一小时，乙船停泊的时间是两小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

解 这是一个几何概型问题. 设 $A=\{$它们中任何一艘都不需要等候码头空出$\}$. 又设甲乙两船到达的时刻分别是 x,y，则 $0\leqslant x\leqslant 24, 0\leqslant y\leqslant 24$. 由题意，若甲先到，则乙必须晚 1 小时到达，即 $y\geqslant 1+x$，若乙先到，则甲必须晚 2 小时到达，即 $x\geqslant y+2$. 由图1.2可知：$L(\Omega)$ 是由 $x=0, x=24, y=0, y=24$ 所围图形面积 $S=24^2$，而

$$L(A)=S_1+S_2=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2=\frac{1}{2}(23^2+22^2).$$

所以

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{S_1+S_2}{S}=\frac{1013}{1152}\approx 0.8793.$$

例 15 从区间(0,1)内任取两个数，求这两个数的积小于 1/4 的概率.

解 设 $A=\{$这两个数的积小于 $1/4\}$，以 x,y 表示从(0,1)内任取的两个数，那末样本空间所对应的区域为(见图 1.3)：

$$S=\{(x,y): 0<x<1,\ 0<y<1\},$$

S 的面积$=1$. 事件 A 所包含的区域为

$$G=\left\{(x,y): xy<\frac{1}{4},\ 0<x<1,\ 0<y<1\right\},$$

区域 G 的面积为

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4},$$

于是所求的概率为

$$P(A)=\frac{L(G)}{L(S)}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}.$$

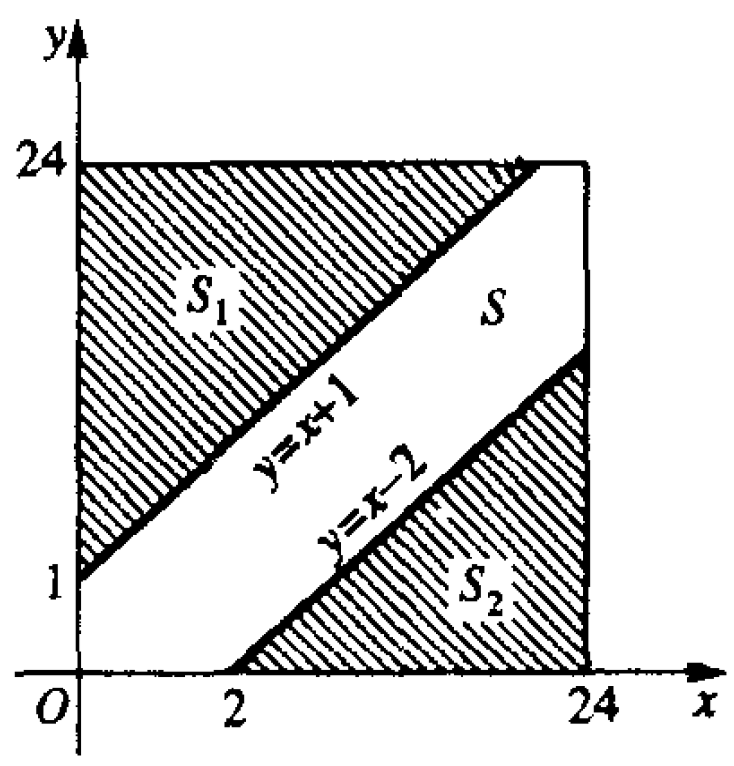


图 1.2

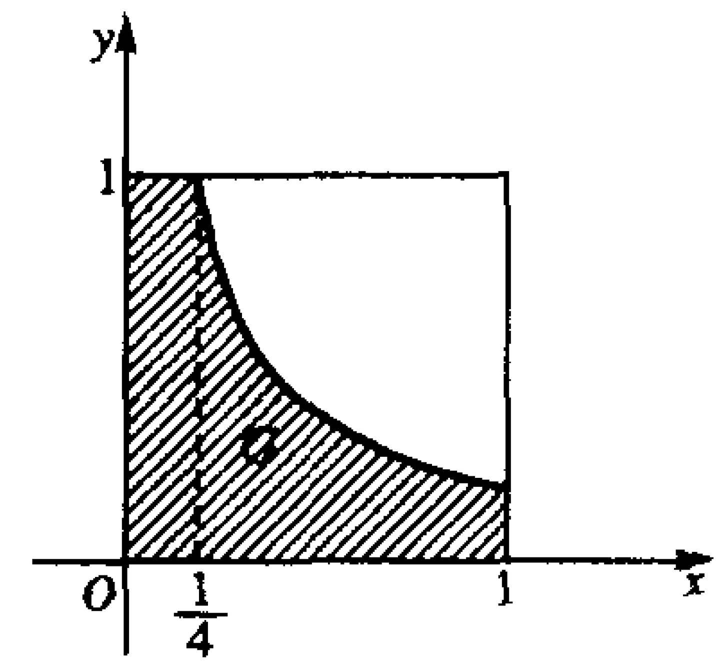


图 1.3

定义 1.11(条件概率) 在一般情况下,我们所讨论的事件 B 的概率$P_S(B)$,都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率(但是为了叙述简练,一般不再提及条件组 S,而把 $P_S(B)$简记为 $P(B)$).

设 A、B 是条件 S 下的两个随机事件,且$P(A)\neq 0$. 则把在 A 发生的前提下 B 发生的概率称为**条件概率**,记作 $P(B|A)$,读作在 A 发生的条件下事件 B 的概率,其定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例 16 在 100 个圆柱形零件中有 95 件长度合格,有 93 件直径合格,有 90 件两个指标都合格. 从中任取一件(这就是条件 S)讨论在长度合格的前提下,直径也合格的概率.

解 设 $A=\{$任取一件,长度合格$\}$,$B=\{$任取一件,直径合格$\}$,$AB=\{$任取一件,长度与直径都合格$\}$. 根据古典概型,在条件 S 下,基本事件的总数

$$n=C_{100}^1.$$

事件 A 与 B 所包含的基本事件个数分别为

$$m_A=C_{95}^1,\quad m_B=C_{93}^1.$$

AB 所包含的基本事件个数为

$$m_{AB}=C_{90}^1.$$

所以在长度合格的情况下直径也合格的零件概率 $P(B|A)$为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{90/100}{95/100}=\frac{90}{95}.$$

例 17 设随机事件 B 是 A 的子事件,已知 $P(A)=1/4$,$P(B)=1/6$,求$P(B|A)$.

解 因为 $B\subset A$,所以 $P(B)=P(AB)$. 因此,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{2}{3}.$$

例 18 某牌号的电视机使用到 3 万小时的概率为 0.6,使用到 5 万小时的概率为 0.24,一台电视机已使用到 3 万小时,求这台电视机使用到 5 万小时的概率.

解 设 $A=\{$使用到 3 万小时$\}$,$B=\{$使用到 5 万小时$\}$,于是 $P(A)=0.6$, $P(AB)=P(B)=0.24$,则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.4.$$

定义 1.12(完备事件组) 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

1) $\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 且 $P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$;

2) $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,

则称之为**完备事件组**.

定义 1.13(独立重复试验) 在实际问题中,我们常常要做多次试验条件完全相同(即可以看成是一个试验的多次重复)并且都是相互独立(即每次试验中的随机事件的概率不依赖于其他各次试验的结果)的试验.我们称这种类型的试验为**独立重复试验**.

(二) 重要定理及公式

公式 1.1(加法公式) 设 A,B 为任意两个随机事件,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.3}$$

上面的加法公式可以推广到有限多个事件的情况,例如对于三个事件 A_1,A_2,A_3,我们有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3).$$

推论 1 设 A 为任意随机事件,则

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

推论 2 设 A,B 为两个任意的随机事件,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由于 $P(B-A)\geqslant 0$,根据推论 2 可以推得:当 $A\subset B$ 时,

$$P(A)\leqslant P(B).$$

例 19 一批产品共有 100 件,其中 90 件是合格品,10 件是次品,从这批产品中任取 3 件,求其中有次品的概率.

解 **方法 1** 设 $A=\{$有次品$\}$,$A_i=\{$有 i 件次品$\}$,$i=1,2,3$. 故 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,并且 A_1,A_2,A_3 是两两互斥的,由概率的古典定义,我们有

$$P(A_1)=\frac{C_{10}^1\cdot C_{90}^2}{C_{100}^3}=0.24768,$$

$$P(A_2)=\frac{C_{10}^2\cdot C_{90}^1}{C_{100}^3}=0.02504,\quad P(A_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{100}^3}=0.00074.$$

于是

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.2735.$$

方法 2 由于事件 A 的对立事件 $\bar{A}=\{$取出的 3 件产品全是合格品$\}$,故

$$P(\bar{A})=\frac{C_{90}^3}{C_{100}^3}=0.7265.$$

由推论 1,

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.7265=0.2735.$$

例 20 某一企业与甲乙两公司签订某物资长期供货关系的合同,由以前的统计得知,甲公司按时供货的概率为 0.9,乙公司能按时供货的概率为 0.75,两公司都能按时供货的概率为 0.7,求至少有一公司能按时供货的概率.

解 分别用 A,B 表示甲乙两公司按时供货的事件,由题意,A,B 为非互斥事件,由(1.3),我们有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9+0.75-0.7=0.95.$$

故至少有一公司能按时供货的概率为 0.95.

例 21 在某城市中,共发行三种报纸 A,B,C. 在这城市的居民中,订购 A 的占 45%,订购 B 的占 35%,订购 C 的占 30%,同时订购 A 及 B 的占 10%,同时订购 A 及 C 的占 8%,同时订购 B 及 C 的占 5%,同时订购 A,B,C 的占 3%. 试求下列百分率:

(1) 只订购 A 的;　　(2) 只订购 A 及 B 的;

(3) 只订购一种报纸的;　　(4) 正好订购两种报纸的;

(5) 至少订购一种报纸的;　　(6) 不订购任何报纸的.

解 由题目条件可知: