注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材
注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试辅导教材

公共基础部分

李惠昇 主编

- 把握考试大纲应试要求
- 讲解考试大纲逐条内容
- 体现知名专家宝贵经验

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材
注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试辅导教材

公共基础部分

李惠昇　主编

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材
注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试辅导教材

内容提要

注册电气工程师执业资格考试即将于今年9月份进行，根据2004年3月公布的大纲，现组织出版注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材，共分为公共基础部分、专业基础部分和专业部分三册。本书组织者和每一部分的执笔人均为该领域的专家，并正在参与注册电气工程师培训讲课工作，他们具有深厚的专业知识和丰富的工程设计经验，从而使该套图书具有较强的指导性和实用性。

本书为公共基础部分，由北京建筑学院组织编写，包括了高等数学、普通物理、普通化学、理论力学、材料力学、流体力学、计算机应用基础、电工电子技术和工程经济九门课程的基础知识。因该部分内容与注册公用设备工程师（暖通空调）公共基础部分内容相同，故本书也可作为注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试公共基础部分的辅导教材。

本书可作为建筑、电力、化工、冶金、纺织等专业的电气工程设计人员应试注册电气工程师的培训教材，也可作为电气设计人员日常工作学习用书和相关专业的人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材 注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试辅导教材. 公共基础部分/李惠昇主编. —北京：中国电力出版社，2004

ISBN 7-5083-2356-4

Ⅰ. 注… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①供电-工程师-资格考核-教材②配电系统-工程师-资格考核-教材 Ⅳ. TM72

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第044887号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号 100044 http://www.cepp.com.cn）
北京丰源印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2004年6月第一版 2004年8月北京第三次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 19.75印张 495千字
印数6001—9000册 定价40.00元

前言

近几年我国在工程建设领域陆续开展了注册工程师执业资格认证工作，参加并通过相应的考核、考试是广大工程技术人员合法地从事工程技术工作的必经之路，是工程技术工作与国际接轨的体现。

注册电气工程师执业资格考试即将于今年9月份进行，根据2004年3月公布的大纲，现组织出版注册电气工程师(供配电)执业资格考试辅导教材，共分为公共基础部分、专业基础部分和专业部分三册。本书组织者和每一部分的执笔人均为该领域的专家，并正在参与注册电气工程师培训讲课工作，他们具有深厚的专业知识和丰富的工程设计经验，从而使该套图书具有较强的指导性和实用性。本书为公共基础部分，包含了高等数学、普通物理、普通化学、理论力学、材料力学、流体力学、计算机应用基础、电工电子技术和工程经济九门课程的基础知识。

对于复习备考的工程技术人员，这九门课程的教科书摞起来足有尺余高，真让考生望书兴叹、无从下手，在短时间内难于通读、掌握。考虑到这个难题，北京建筑工程学院的专家、教授，充分运用他们的教学、实践经验，紧密结合考试大纲，将教材中的内容加以提炼、归纳，编写了这本仅40余万字却囊括了九门课程基本知识的复习材料，以便于考生复习备考使用。

考虑到考生工作繁忙、时间有限，本书的编写特别注重精练，以够用、扣纲为准，避免烦琐，力图使考生在按照此书复习时，时间利用率达到最大。

根据公用基础部分的考试大纲，本书还可作为注册电气工程师发输变电专业，注册公用设备工程师其他专业执业资格考试的辅导教材。

对于有精力希望深入学习的学员，可以进一步学习本书后面所列的相关参考文献。这些参考文献都是相应学科领域中的精品之作，相信对学员的深入学习会有很大帮助。

由于水平有限加之时间紧迫，虽经数次审校，仍难免有错漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2004年5月

注册电气工程师（供配电）执业资格考试辅导教材
注册公用设备工程师（暖通空调）执业资格考试辅导教材
公 用 基 础 部 分

编写人员名单

主　编　李惠昇

参　编　（以姓氏笔画为序）

马鸿雁　王文海　叶安丽　陈志新　岳冠华

郝　莉　钱民刚　章美芬　程学平

各章编写人员名单如下：

第1章	马鸿雁
第2章	程学平
第3章	岳冠华
第4章	郝　莉
第5章	钱民刚
第6章	王文海
第7章	陈志新
第8章	叶安丽
第9章	章美芬

目录[1]

①本书目录即为注册电气工程师(供配电)执业资格考试基础考试大纲前一部分内容(后一部分内容见本套书专业基础部分),读者可根据需要查阅相关内容。

1

高 等 数 学

1.1 空间解析几何

空间解析几何是用代数方法研究三维空间中的几何问题。

1.1.1 向量代数

1.1.1.1 空间直角坐标系

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离

$$\overline{M_1M_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1.1.1.2 向量

既有大小又有方向的量称为向量。常用有向线段表示向量，其长度为向量的大小称为向量的模，其方向为向量的方向，用 $\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 表示。

模为 1 的向量称为单位向量；模为 0 的向量称为零向量，记作 0，零向量的方向不定。和向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$。

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 是两个向量，有关向量有如下一些基本概念要掌握。

(1)模 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。

(2)方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$，

$\cos\beta=\dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$，

$\cos\gamma=\dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$ 且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

(3)向量的加减法 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$。

(4)数乘向量 $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$，其中 λ 为数量，$\lambda\vec{a}$ 为与 $\vec{a}$ 平行的向量。

(5)数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，两个向量的数量积是一个数。

(6)向量积 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$，两个向量的向量积是一个向量

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$$

$(\vec{a}\times\vec{b})$ 垂直 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 成右手系。

(7)两个向量平行或垂直的充分必要条件

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ 或 $\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

1.1.1.3 向量的坐标表达式

将向量的始点移到空间直角坐标系的原点 O,设向量的终点为 $M(x,y,z)$,且 Ox 轴、Oy、Oz 轴正方向上的单位向量依次为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则 $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,或记为 $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$,称上述两种表达式为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式。

1.1.2 平面

1.1.2.1 平面的方程

(1)平面的点法式方程:垂直于平面的非零向量 $\vec{n} = (A,B,C)$ 为平面的法向量。过点 (x_0, y_0, z_0) 以 $\vec{n}$ 为法方向的平面方程为 $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

(2)平面的一般式方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,法方向:$\vec{n} = (A,B,C)$。

(3)平面的截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

式中 a,b,c——分别为平面的 x 截距,y 截距,z 截距。

1.1.2.2 特殊的平面方程

(1) $Ax + By + Cz = 0$ 表示过原点的平面方程;

(2) $Ax + By + D = 0$ 表示平行于 Oz 轴的平面方程;

(3) $Ax + B = 0$ 表示过 Oz 轴的平面方程;

(4) $Cz + D = 0$ 表示平行于坐标平面 Oxy 的平面方程,其余可以此类推。

1.1.2.3 两平面的关系

平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,法方向 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$;

平面 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,法方向 $\vec{n} = (A_2, B_2, C_2)$。

(1)相互垂直的充要条件:$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$,即 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(2)相互平行的充要条件:$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$,即 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

(3)重合的充要条件:π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

系数不满足以上条件时,两平面斜交。

(4)平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ 满足 $\cos\theta = \dfrac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$。

1.1.2.4 点到平面的距离

点 (x_1, y_1, z_1) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为 $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$。

1.1.3 直线

1.1.3.1 直线的方程

如果非零向量 $\vec{l} = (a,b,c)$ 平行于一已知直线,则称 $\vec{l}$ 为直线的方向向量。

(1)直线的标准式(点向式或对称式)方程:

过点(x_0,y_0,z_0)以$\vec{l}$为方向向量的直线方程是$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$。

(2)参数式方程:由标准方程化为参数方程得$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$

(3)一般式方程:两平面的交线为一直线,即直线的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

方向向量$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$,其中$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$。

(4)两点式方程:过点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

1.1.3.2 直线与直线的关系

直线l_1的方向向量$\vec{l}_1=(a_1,b_1,c_1)$;直线l_2的方向向量$\vec{l}_2=(a_2,b_2,c_2)$。

(1)相互平行的充要条件:$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\vec{l}_1/\!/\vec{l}_2$,即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$。

(2)相互垂直的充要条件:$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\vec{l}_1\perp\vec{l}_2$,即$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$。系数不满足以上条件时,两直线斜交。

(3)两直线的夹角θ满足:$\cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$。

1.1.3.3 直线与平面的位置关系

直线l_1的方向向量$\vec{l}_1=(a_1,b_1,c_1)$,平面π_1的$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,法方向$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$。

(1)直线与平面的夹角θ满足:$\sin\theta=\frac{|A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$。

(2)直线与平面平行的充要条件:$l_1/\!/\pi_1\Leftrightarrow\vec{l}_1\perp\vec{n}_1$,即$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=0$。

(3)直线与平面垂直的充要条件:$l_1\perp\pi_1\Leftrightarrow\vec{l}_1/\!/\vec{n}_1$,即$\frac{a_1}{A_1}=\frac{b_1}{B_1}=\frac{c_1}{C_1}$。

系数不满足以上条件时,直线与平面斜交。

1.1.4 二次曲面

1.1.4.1 定义

如果曲面上的点的坐标用x,y,z表示,常用$F(x,y,z)=0$表示一张曲面的方程。如果$F(x,y,z)=0$为二次方程,则它所表示的曲面为二次曲面。

1.1.4.2 特殊的二次曲面方程

球面方程$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,球心$(a,b,c)$,半径$R$

椭球面$\frac{(x-a_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

单叶双曲面方程　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

椭圆抛物面方程 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q$ 同号)

双曲椭圆抛物面方程 $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q$ 同号)

锥面方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

1.1.5 柱面

如果曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中缺少一个变元,则称其为柱面方程。柱面的母线与所缺变元同名的坐标轴平行。如 $F(x,y)=0$ 为母线平行于 z 轴的柱面方程;$F(y,z)=0$ 为母线平行于 x 轴的柱面方程;$F(x,z)=0$ 为母线平行于 y 轴的柱面方程。

1.1.6 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面,这条定直线称为旋转曲面的轴,如 xOy 平面内一段方程为 $F(x,y)=0$ 的曲线 C,绕 x 轴旋转一周得到一个旋转面,该旋转曲面的方程为 $f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$。

1.1.7 空间曲线

(1)一般方程。空间曲线可以看作是两个曲面的交线。若空间曲线 L 是曲面 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$ 的交线,则 L 的方程可用下述方程组表示,此方程组称为空间曲线 L 的一般方程

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(2)参数方程。将空间曲线 L 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

这方程组称为空间曲线 L 的参数方程,例如,参数方程 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ 表示的空间曲线是螺旋线。

1.2 微分学

1.2.1 极限

1.2.1.1 定义

(1)数列的极限:如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$。

(2)函数的极限:

1)定义 1:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 $\delta>0$,使得对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$,当 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

2)定义 2:如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $N>0$ 使得对于满足 $|x|>N$ 的一切 x,恒有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

(3)左极限、右极限：

1)在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$。

2)在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$。

3)在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $|x|>N$ 换为 $x>N$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

4)在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $|x|>N$ 换为 $-x>N$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

1.2.1.2 极限的性质

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，则必存在 x_0 的某邻域，在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处，恒有 $f(x)>0$。

(2)若 $f(x)\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必有 $A\geqslant 0$。

(3)$f(x)$ 在 x_0 处极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限都存在且相等，三个值相同。

1.2.1.3 极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$[当 $\lim g(x)=B\neq 0$ 时]

注　自变量变化过程可以是 $x\to x_0$，$x\to\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$。但等号两端出现的必须是同一种。

1.2.1.4 极限存在准则和两个重要极限

(1)夹逼准则。若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且当 $x\to x_0$ 时，$g(x)\to A$，$h(x)\to A$，则当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)\to A$。

(2)单调有界的数列(或函数)必有极限。

(3)两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

1.2.1.5 无穷小量、无穷大量

(1)无穷小量。如果 $\lim\limits_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷小量(无穷小)。

(2)无穷小量的性质：

1)有限个无穷小量的代数和是无穷小量；

2)有限个无穷小量的乘积是无穷小量；

3)无穷小量和有界变量的乘积是无穷小量。

(3)无穷大量：如果当 $x \to x_0(x \to \infty)$，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0(x \to \infty)$ 时为无穷大量(无穷大)。

【例 1-1】 求 $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n \sin \dfrac{x}{2^n}$($x$ 为非零常数)极限。

解：对任意的 x，$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$，由重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 得

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \to \infty} x \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x$$

1.2.2 连续

1.2.2.1 函数的连续性

1.2.2.1.1 函数的连续性的定义

(1)若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

(2)如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，即 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续。

(3)如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，即 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续。

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续。特别是当 $I = [a, b]$ 时，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，是指 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点处连续，且在 a 处右连续，在 b 处左连续。

1.2.2.1.2 函数的间断点

由函数在一点连续的定义可知，函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处连续的条件是：

(1)$f(x_0)$ 有定义；

(2)$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3)$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

若上述条件中任何一条不满足，则 $f(x)$ 在 x_0 处就不连续，不连续的点就称函数的间断点，间断点分成以下两类：

第一类间断点：x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但 $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在；

第二类间断点：不是第一类的间断点。

在第一类间断点中，若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在但不相等，则称这种间断点为跳跃间断点；若 $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在而且相等，则称这种间断点为可去间断点。

1.2.2.2 初等函数的连续性

(1)基本初等函数和初等函数。幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

(2)初等函数的连续性。一切初等函数在其定义区间内都是连续的，这里的“定义区间”是

指包含在定义域内的区间。

1.2.2.3 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续上连续，则：

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界（有界性定理）；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值（最大值最小值定理）；

(3) 当 $f(a)$、$f(b)<0$ 时，在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$（零点定理）；

(4) 对介于 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$ 之间的任一数值 C，在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$（介值定理）。

【例 1-2】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{1}{x}\sin x & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\sin x=1$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的左右极限不相等，故极限不存在，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点间断。

由于 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点左连续，它的连续区间应为 $(-\infty,0]$，$(0,+\infty)$。

1.2.3 导数

1.2.3.1 导数的概念

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其某个邻域内有定义，对应于自变量 x 在 x_0 的改变量 $\Delta x=x_0-x$，函数 $y=f(x)$ 相应的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数。记作 $y'|_{x=x_0}$，或 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$。

左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$f'(x_0)$ 存在的充要条件 $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$ 存在且相等。

函数在 x_0 处连续是可导的必要条件，但不是充分条件，即 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续，反之不然。

1.2.3.2 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$，在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $[x_0,f(x_0)]$ 处的切线的斜率。

1.2.3.3 求导法则

(1) 导数的四则运算。设 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 均可导，则

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2) $(Cu)'=Cu'$（C 是常数）

3) $(uv)' = u'v + uv'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

(2)反函数求导法则。若 $x = \varphi(y)$在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y) \neq 0$,则它的反函数 $y = f(x)$在对应的区间 I_x 内也可导,且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

(3)复合函数求导法则。设 $y = f(u)$、$u = \varphi(x)$均可导,则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$也可导,且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \text{或} y'(x) = f'(u)\varphi'(x)$$

(4)隐含数求导法则。设方程 $F(x,y) = 0$ 确定一个隐函数 $y = y(x)$, F_x、F_y 连续且 $F_y \neq 0$,则隐函数 $y = y(x)$可导,且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

注　关于记号 F_x、F_y 参阅偏导数概念及其求法。

1.2.3.4　求导基本公式

(1) $(C)' = 0$;　　(2) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$;

(3) $(\sin x)' = \cos x$;　　(4) $(\cos x)' = -\sin x$;

(5) $(\tan x)' = \sec^2 x$;　　(6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

(7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$;　　(8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;

(9) $(a^x)' = a^x \ln a$;　　(10) $(e^x)' = e^x$;

(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;　　(12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;　　(16) $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

1.2.3.5　高阶导数

定义:若函数 $y = f(x)$的导函数 $y' = f'(x)$仍可导,则 $y' = f'(x)$的导数叫做函数 $y = f(x)$的二阶导数,记作或 y''或$\frac{d^2y}{dx^2}$或 $f''(x)$。

1.2.4　微分

1.2.4.1　微分的定义

设函数 $y = f(x)$在某区间正内有定义, $x_0 \in I$, $x_0 + \Delta x \in I$,若函数的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,则称 $y = f(x)$在点 x_0 可微分, $A\Delta x$ 叫做 $y = f(x)$在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分,记作 dy,即

$$dy = A\Delta x$$

函数 $y=f(x)$在点 x 的微分称为函数$y=f(x)$的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$。

1.2.4.2 函数可微分的充要条件

函数 $y=f(x)$在点 x_0 可微分的充要条件是 $f(x)$在点 x_0 可导，且当 $f(x)$在点 x_0 可导时，其微分一定是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$。函数的微分是 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$

通常把 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$。于是函数的微分可写成 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$。而导数可写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$。即导数等于函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商。

1.2.4.3 微分法则

(1)微分的四则运算。设函数 $u=u(x)$、$v=v(x)$均可微，则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$$

(2)复合函数的微分法则。设 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$均可微，则 $y=f[\varphi(x)]$也可微，且

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

1.2.4.4 基本微分公式

(1)$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$；　(2)$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

(3)$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；　(4)$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$；

(5)$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；　(6)$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x$；

(7)$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$；　(8)$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$；

(9)$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　(10)$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；

(11)$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；　(12)$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(13)$\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(14)$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(15)$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

1.2.5 偏导数

1.2.5.1 定义

函数 $z=f(x,y)$对 x、y 的偏导数依次记作$\frac{\partial z}{\partial x}$[或$f_x(x,y)$]，$\frac{\partial z}{\partial y}$[或$f_y(x,y)$]，它们的定义如下

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

类似地，可以定义三元函数 $f(x,y,z)$的偏导数 $f_x(x,y,z)$、$f_y(x,y,z)$、$f_z(x,y,z)$等。

1.2.5.2 多元复合函数的求导法则

设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$均具有偏导数，而 $z=f(u,v)$有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$的偏导数存在，且