自学参考用書

初中几何講話

王云海編著

浙江人民出版社

自学参考用書

初中几何講話

王云海編著

浙江人民出版社

自学参考用書

初中几何講話

王云海編著

*

浙江人民出版社出版
杭州武林路万石里1号
浙江省書刊出版营業許可証出字第001号
地方國营杭州印刷厂印刷　新華書店浙江分店發行

*

開本787×1092 耗 1/32　印張5　字數108,000
1956年11月第一版
1956年11月第一次印刷
印數：1—104,594

出版者的話

我們出版这套書，是为了满足具有初中文化程度的青年羣众、干部（包括初中畢業生）学習文化科学知識的需要，使他們通过自学，一方面打下進一步掌握科学知識的牢固基礎，另一方面能够把学到的知識应用到实际生活和生產中去，更好地为祖國的社会主义建設事業服务。

这套書是根据自学这个特點進行編寫的，在合乎科学性和系統性的原則下，適当地与实际相联系，并結合貫徹政治思想教育。每一种学科各有重點，不是初中課本的复述，而是課本內容的概括和提高。因此，这套書不但可作为初中畢業生的自学参考讀物，也可作为初中教師教学上的輔助材料。

目　　錄

第一講　緒　論

第二講　三角形

第三講　平行綫

第四講　对　称

第五講　四边形

第六講　圓

第七講　圓和多边形

第八講　軌跡和作圖

練習題的解答

第一講 緒 論

§1. 幾何圖形和幾何学

几何学是研究几何圖形性質的科学。要学習几何学，首先就得明白兩个問題：（1）什么是几何圖形？（2）我們要研究的是几何圖形的哪些性質？

現在，先从構成几何圖形的要素——几何体、面、綫、點講起。必須明確，几何体、面、綫、點这些基本概念，都是人類从億万次实踐活動中形成的。例如观察皮球、鉄球、粉筆、桌子等等，我們發現它們都占有空間的一个有限部分，这就使我們形成了几何体的观念。再如，从裝在同一个瓶內的油和水間的境界面，从皮球和空气接觸的表面等等，我們形成了面的观念。同样，从摺紙的摺痕，从头髮、蛛絲等等，我們形成了綫的观念。从兩条綫的交叉处，从鉛筆的尖端等等，我們形成了點的观念。很明顯，把几何体所占空間的有限部分和其他部分隔開的是面；把面的一部分和鄰接部分隔開的是綫；而把綫的一部分和鄰接部分隔開的則是點。

对于几何体，我們只注意它的形狀和大小，而不管它是什么物質構成的，也不管它的輕重顏色等。例如我們研究球，就不管它是鉄球还是皮球，也不管它是黑的还是白的，我們只是从鉄球、皮球……这些球中抽出它們形狀相同的这个性質來研究。

几何体、面、綫和點都不是單独存在的，但是我們可以想象离開几何体來研究面，离開面來研究綫，离開綫來研究點。例如研究黑板表面以及在它上面的綫和點，这些面、綫和點自然是和整塊黑板联繫着的，但是我們要研究的只是黑板表面，而不是整塊黑板，因此我們就可以想象，不管整塊黑板而僅僅研究它的表面。根据这样的看法，我們自然可以不必關心这黑板有多少厚。所以对于面，我們只研究它的長短和寬窄，而不管它的厚薄。再看在黑板面上的綫，除了不管它的厚薄以外，我們連它的寬窄也都不管了，我們所關心的只是它的長短。至于點，則更連長短都不管了，我們只關心它的位置。在日常的說話中，我們常常提到甲地和乙地的分界綫，某某路綫的起點和終點，这里的“綫”和“點”对我們上述的概念都是很好的說明。

點、綫、面、体，以及將它們連合起來得到的各种各样的圖形，都叫做几何圖形，根据以上所說，我們要研究的是几何圖形的形狀，大小和位置。这就是前面所提出的兩个問題的回答。

在研究几何圖形的時候，我們常常要把它們移動。譬如我們要比較兩張紙是否有一样的形狀和大小，就常常把其中的一張放在另外一張的上面來观察。从实踐，我們得出一个重要的結論：“在空間可以把几何圖形的位置任意移動，而不改变它的形狀和大小”。如果有兩个几何圖形經过移動后把它們叠起來能够处处重合，那末，这兩个圖形就叫做全等形。这就是我們以后研究几何圖形的全等与否的依据。

附注：几何学是人類在实踐中產生的。事实上，“几何”这个名詞是从希臘文譯音过來的。希臘文原來就是“測地術”的意思。希臘

的几何学是继承埃及人的。埃及人由于尼罗河的定期泛滥而引起了測地的需要，这样就不断地積累了許多几何知識。同样，在我國古代，由于農業的發達，在几何学上也有着很多的成就，这在古代的數学書籍如周髀算經和九章算術等書中都有詳細的記載。不过，对于几何学作为一門有系統的科学來說，我們应該提出希臘人的成就，特別是歐几里得（公元前330—275）的名著“几何原本”。这本書在明朝的時候，由徐光啓（1562—1638）翻譯成中文，“几何”这个名詞也是从那時開始应用的。

§2. 平面和直綫

最簡單的面和綫是平面和直綫。从光滑的桌面、鏡面和平靜的水面，我們形成了平面的观念；而从拉得很緊的綫我們形成了直綫的观念。

平面有着这样的性質，即可以將它的一部分放到另一部分（或者另一个平面）上去，使得它的點都落在上面，就是說，它們可以处处重合，并且在放上去以前，把那一部分預先翻轉过來也是一样的。我們看到別的面就沒有这样的性質。对于球面，虽然可以把它的一部分放到另一部分上去而使它的點都落在上面，但在放上去以前，如果預先翻轉一下，就是把凹的面放在凸的面上，那就不能处处重合了。并且，如果把一个較小的球面的一部分，放到較大的球面上去，也是不能处处重合的。

再來談談直綫的性質。在說明直綫的時候，我們曾提起拉得很緊的綫，注意到拉得很緊的綫用力的地方是兩點。因此，我們容易明白：“經过空間的任意兩點可以引也只能引一条直綫。”从这里可以知道，如果把直綫的一部分放到另一部分（或者另一条直綫）上去，只要它們有兩點相合，那末它們就

完全重合了。

如果已經知道兩个點，我們就可以用唯一的直綫把它們連起來。我們用來画直綫的工具叫做直尺。这里所說的直尺是沒有刻度的，它不能用來量長短，但它有下列的用途：（1）过兩點作直綫以及把已知直綫的一部分任意延長，（2）画出相交二直綫的交點。这些用途对于我們以后的学習是很重要的。

另一方面，我們可以根据直綫的基本性質來檢驗一条直尺。在紙上任意画兩个點，用直尺画綫把它們連起來，然后把直尺翻轉，再用原來的边画綫把兩點連起來。如果这兩条綫不重合，那末，这尺就是不正確的。这个道理很明顯，因为經过兩个點只能画一条直綫，假使画出兩条綫來，那末这綫自然不是直綫，而所用的工具也自然不是正確的直尺了。

此外，还有一个重要的性質：若在平面上經过任意兩點引一条直綫，則这直綫上的一切點都在这平面上。我們就可利用这个性質來檢驗一个平面。例如我們可以把木工用的曲尺的一边（就这一边來說，相当于我們的直尺），放到地板上，看这边和地板中間有沒有空隙來判斷地板是不是光滑的平面。

对于直綫，我們想象它的兩端是沒有限制的。如果象光源射出的光綫，一端有限制而另一端沒有限制，这叫做射綫。至于兩端都有限制的，象練習簿的一条边，这叫做綫段。綫段是直綫的一部分，如果把綫段向兩边無限地延長，就成为直綫。

在日常生活中，我們要比較兩根棒是否一样長，只要把它們的一端并在一起，再看另一端是否也并在一起就好了。这時我們当然可以不管棒的粗細，因此，可以把这些知識用到綫段上來。設有二綫段AB和A′B′，要比較它們，只須把綫段AB放到綫段A′B′上，使點A和點A′重合，如果點B和點B′也重合，

那末这两綫段就相等（AB＝A′B′）如果點B落在綫段A′B′中間，那末綫段AB就小于綫段A′B′(AB＜A′B′)；如果點B落在綫段A′B′外边，那末綫段AB就大于綫段A′B′(AB＞A′B′)。在实际上，我們并不眞的把綫段AB放在綫段A′B′上，而是用兩脚規去截，只要把兩脚規的兩脚分開，使得它的兩脚尖的距离正好等于AB，然后把一脚尖放在A′上，再看另一脚尖落在哪里，就代替了綫段的放置手續。

利用兩脚規，我們也可以求綫段的和与差。例如有三条綫段AB、CD和EF，在一直綫 l 上連續截取綫段MN、NP和PQ各等于AB、CD和EF，那末綫段MQ就等于三綫段AB、CD、EF的和（注意：綫段的加法是適合交换律和結合律的）。如果在

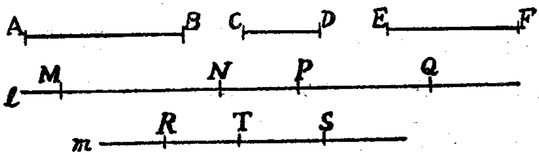

圖 1

直綫m上截取綫段RS等于綫段AB，又在綫段RS上截取綫段RT等于綫段CD，那末綫段TS就等于二綫段AB、CD的差。如果把相等的几条綫段加起來，就得到綫段的几倍，例如AB＋AB＋AB＝3AB。

以上所說的關于綫段的知識，在实用上就作为我們用有刻度的尺來量長短的根据。在算術中我們学过長度的單位如公尺、公分……現在就可以用來量綫段，并且將所量得的數表示綫段的長。这样，要求綫段的和、差等等，只需求量得的數的和、差等等就好了。

§3. 圓

在初中階段学習的几何圖形，都是在平面上的，并且这些

圖形，基本上由直綫和圓或它們的部分構成。一提起圓，我們就会想到太陽、月亮、車輪、樹木的横截面等等，事实上也正是这些东西引入了圓的观念。如果把兩脚規張開，使一脚尖固定在一點0上，而將另一脚尖（裝上鉛筆或鋼筆尖）繞着这點轉動，便画出一条連續的封閉曲綫。很明顯，这曲綫上的點和點0的距离都相同。这曲綫就叫做圓，點0叫做圓心，圓上的點和圓心的距离叫做半徑。（从这里知道为什么兩脚規也叫做圓規）容易明白，同一圓的半徑都是相等的。若兩圓有同一半徑，那末經过移動后，將它們的圓心重合，就可使兩圓全部重合，即它們是全等形。

圓上的一段叫做弧，以⌒表示。对于同一个圓（或者相等的圓），設有兩弧，將它們重叠起來，若它們的兩端能够重合，那末这兩弧相等。（这里要注意，只有同圓或等圓的弧才可能完全重合，而对于半徑不相等的兩圓中的兩弧，即使它們的兩端點能够重合，但这兩弧还是不能完全重合的，如圖2.）如果在同圓（或等圓）中，有兩段弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$，將$\overset{\frown}{AB}$移動，使它的一端A和$\overset{\frown}{A'B'}$的一端A′重合，若另一端B落在$\overset{\frown}{A'B'}$中間，那末$\overset{\frown}{AB}$就小于$\overset{\frown}{A'B'}$。同样，如果在同圓（或等圓）中有好几条弧，我們也可以仿照上節的方法來求出它們的和、差等等。例如在圖3中，$\overset{\frown}{AB}$等于$\overset{\frown}{MN}$，$\overset{\frown}{CD}$等于$\overset{\frown}{NP}$，那末$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$的和就等于$\overset{\frown}{MP}$。弧的加法和綫段一样，也是適合交換律和結合律的。

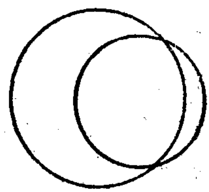

圖 2

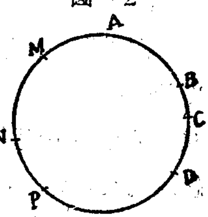

圖 3

此外，我們提一下有關圓的一些名詞，并請讀者参考圖4。通过圓上兩點的直綫（AB）叫做割綫，連結圓上兩點的綫段

（MN）叫做弦，通过圓心的弦（PQ）叫做直徑（直徑等于半徑的兩倍，因此，同圓的直徑都相等）。圓所包圍的平面叫做圓面，兩个半徑所截圓面的一部分(OCgD)叫做扇形，割綫所截圓面的一部分(MpN)叫做弓形。

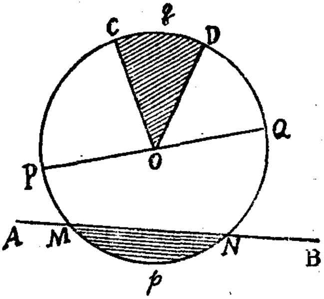

圖 4

§ 4.角

另一种重要的基本几何圖形是角，这也是我們在日常生活中很熟悉的，例如牆角、桌角……等。如果从一點（例如O）引兩条射綫（OA、OB），那末这样構成的圖形就叫做角，常以“∠”來記，在我們的例子中記作∠AOB或∠O。O叫做角的頂點，OA、OB叫做角的边。角的兩边把平面分成兩部分，一部分叫做角的內部，另一部分叫做角的外部。一般可以这样說，如在角的兩边上各取一點A、B，那末綫段AB所在的平面部分就是角的內部（圖6）。但有時也可以反一反，把圖中沒有陰影綫的一部分当作內部看，不过这時需要特别加以說明。（如圖7，是一个五角星，对于它上面的∠A……，我們就把沒有陰影綫的部分当作它的內部看待。）

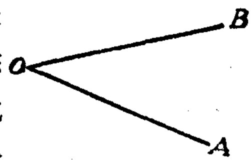

圖 5

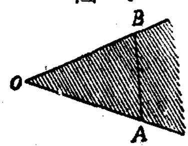

圖 6

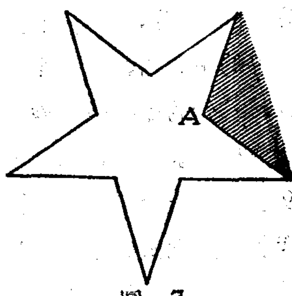

圖 7

設有兩个角∠AOB和∠A′O′B′，把點O放到O′上，并使

OA和O′A′重合，如OB与O′B′重合，那末$\angle AOB=\angle A'O'B'$；如OB落在$\angle A'O'B'$的內部，那末$\angle AOB<\angle A'O'B'$；如OB落在$\angle A'O'B'$的外部，(O′B′在$\angle AOB$的內部)，那末$\angle AOB>\angle A'O'B'$。又若有$\angle MNP=\angle AOB$，$\angle PNQ=\angle CO'D$，那末$\angle MNQ$就等于$\angle AOB$、$\angle CO'D$的和（圖8）。同样，也可以引出角的差，角的倍數，角的几分之几。

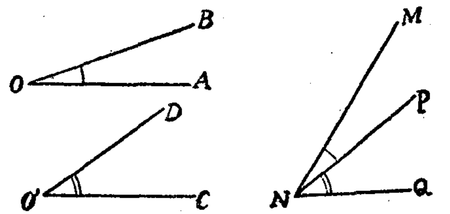

圖 8

对于綫段，我們可以用有刻度的尺來量，对于角，可以用量角器來量。在講量角器以前，讓我們先來明確一个重要的關系："在同圓（或等圓）中，若中心角（兩条半徑所構成的角）相等，則它們的对应弧也相等；反过來若弧相等，則它們的对应中心角也相等"。这个關系的正確性是顯然的，只要把相等的中心角重合起來，那末兩半徑的端點也重合，因而对应弧也就重合了。反过來也是容易了解的。这样，如果我們把圓分成360等分，并且把每一等分叫做一度，那末就对应有360个相等的中心角，每一个中心角叫做一度角。一度的$\frac{1}{60}$叫做一分，一分的$\frac{1}{60}$叫做一秒。度、分、秒別用°、′、″來記。

根据前面所講弧和中心角的關系，就可做一个量角器（圖9）。取一个半圓形，把半圓分成180等分（每一等分卽是一度），这就做成了一个量角器。如要量一个角（如$\angle ECD$），只要把量角器的圓心和角頂C重合，使角的一边和直徑重合，則角的另一边在圓弧上截出的度數就是$\angle ECD$的度數了。

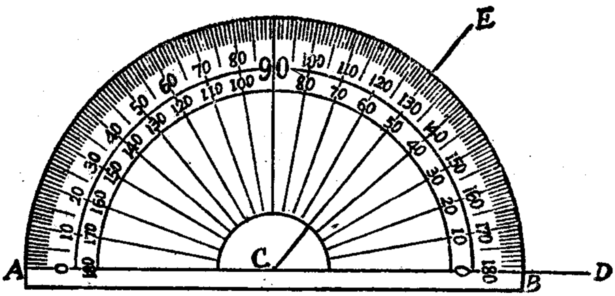

圖 9

假使有好几个角相加，而最后的一边和最初的一边相合（如圖 10，∠AOB+∠BOC+∠COD+∠DOA，最初的一边和最后的一边都是OA），这样所成的圖形叫做周角。周角的度數是 360°。又若有一个角，它的兩条边成了一条直綫并互为延長綫（如圖11），这叫做平角，平角的度數是 180°。平角的一半也就是 90° 的角，叫做直角，常以字母d 來表示。（因此，一周角等于四直角，一平角等于二直角）。所有的直角都是90°，因此都相等。小于90° 的角叫做銳角；大于90°而小于180°的角叫做鈍角。兩个角的和等于一直角時，叫它們互为余角，兩个角的和等于一平角時，叫它們互为補角。

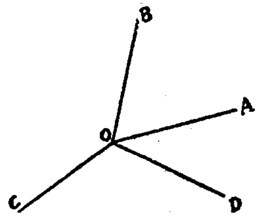

圖 10

圖 11

兩个角的頂點公共，一边也公共，并且兩角的內部各在公共边的一旁，这样的兩角叫做互为鄰角。兩个角中，一角的兩边分别是另一角兩边的延長綫，就叫做对頂角。（圖12）

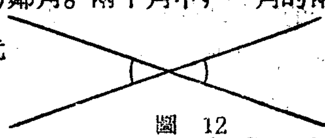

圖 12

若射綫OB与直綫AC交于O點，而且所成兩个鄰角不相

等，那末OB叫做AC的斜綫。若所成兩个鄰角相等，那末OB就叫做AC的垂綫，O點叫做垂足，这時，所成的兩个鄰角都等于一直角。所以我們也这样說：若兩直綫相交成直角，則这兩直綫叫做互相垂直（垂直常用記号“⊥”來表示）。我們看到，过已知直綫（AB）外一點（M）可引这直綫的一条垂綫，也只能引一条垂綫。（如圖13）設想沿着直綫AB把平面翻摺，則M落到AB另一側的一點N上，把圖还原，用直綫連接MN，和AB相交于C。再照样翻摺，那末MC和NC必定相重合，因此∠BCM＝∠BCN，但∠BCM+BCN＝2 d,所以这兩个角都等于直角，也就是MN⊥AB。其次，如果过點M任意再作一条直綫交AB于D，那末MD一定不是AB的垂綫。因为，連接DN，再將圖形沿AB翻摺，可知∠BDM＝∠BDN，但MDN不是一条直綫（否則，通过M、N二點就要有兩条直綫了，这是不对的），所以这兩个角都不是直角，这說明通过點M的直綫除了MN外，再也沒有別的直綫垂直于AB了。

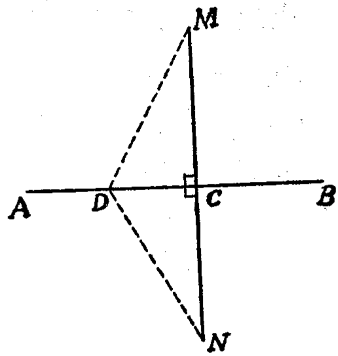

圖 13

从这里我們很容易得出一个用摺紙的方法來作垂綫，讀者可以自己去試驗。此外，我們知道，三角板的一个角是直角，所以可以利用三角板來画垂綫。（看圖14）同時，我們知道

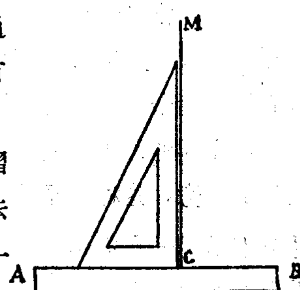

圖 14