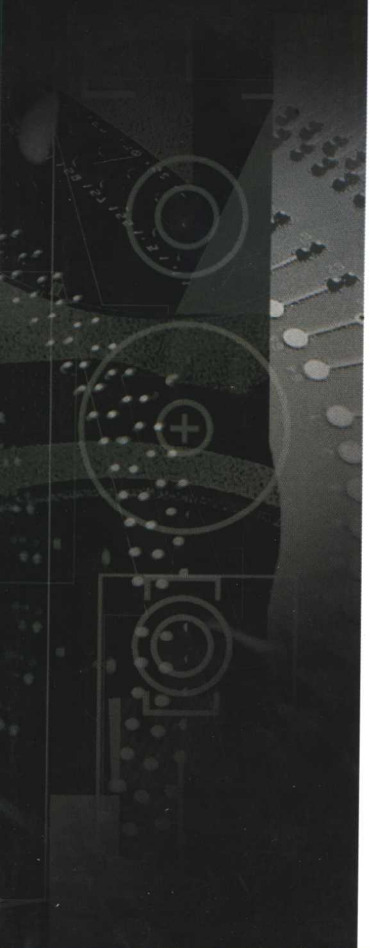
高等学校公共必修课教材

XIANXINGDAISHU
JIAOCHENG

线性代数教程

杨奇　孟道骥　编著



南开大学出版社

高等学校公共必修课教材

线性代数教程

杨 奇 孟道骥 编著

南开大学出版社
·天津·

内 容 提 要

本书系统地介绍了线性代数的基本理论和方法，注意代数与几何的结合与联系.在提供几何背景的基础上，加强了线性空间及其线性变换的教学，并把它们作为核心内容放到书中较前位置来讲授，让读者尽早接触公理化定义与方法，为学习现代数学打下基础.本书也充分考虑到初学者的学习困难，设法分散教学难点，着意对较抽象的内容分层次进行论述.全书共分 7 章：复习与推广、初等变换·线性方程组、矩阵及其运算、线性空间·线性方程组、特征值与特征向量·线性变换、实对称矩阵·欧几里得空间、二次型.其中第一章介绍了数域以及 n 元有序数组的向量空间，它是全书的基础.本书各章都配有一定数量的习题，其中含有填空选择题以及近年来的考研试题.书后还附有习题参考答案与提示.

本书可作为综合性大学、工科大学、师范院校、经济类院校以及自学考试的线性代数课程的教材.它深入浅出，既崇尚理性思维的培养，也注重应试能力的提高；它还可以与高等数学一起作为大学数学的入门课程在一年级同时开设.

前　言

线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完美课程.近年来,由于众多学科和科学技术的迅速发展,特别是由于计算机的普遍使用,使得线性代数得到更加广泛的应用.线性代数的重要性在于它考虑了一类简单的数学模型,而大量的理论及应用问题,可以通过"线性化"变成线性代数的问题.作为基础训练,熟练掌握线性代数的理论与方法是十分必要的.与微积分一样,线性代数已是大学数学教育中一门主要的基础课程.

本书是编者在天津大学和南开大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的.其目的是希望学生通过这门课程的学习,打下一个良好的数学基础,提高数学素质以及分析问题、解决问题的能力.

按照现行的国际标准,线性代数是通过公理化来表述的.它是第二代数学模型,其根源来自欧几里得几何、解析几何以及线性方程组理论.现在,线性代数已多用矩阵运算以及线性空间的线性变换的理论来陈述.基于这一认识,我们仍以矩阵为主线,以矩阵的运算和各种等价关系(如相抵、相似、相合、正交相似)为重点,讲授一些基本的计算技巧和处理方法;另一方面,我们加强了线性空间和线性变换的教学,并把它们作为核心内容放在书中较前的位置来讲授,让读者尽早接触公理化定义和方法.同时我们也考虑到初学者的学习困难,设法分散教学难点,着意对较抽象的内容分层次进行讲述.例如,在第4章中,先讲具体的向量空间,然后讲抽象的线性空间.在第5章中,先讲矩阵的特征值和特征向量,然后讲线性变换及其特征值和特征向量.在第6章中,先讲具体的欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 及其性质,然后讲抽象的欧几里得空间及其性质;先讲正交矩阵和实对称矩阵及其性质,再讲正交变换和对称变换及其性质.这样安排教学,既使初学者易于接受,又能确保初学者优先掌握好教材的基本内容.

代数学的研究对象是各种代数系统及其相互关系.代数学在数学与其他学科(如理论物理、计算机科学、通信理论、系统工程、经济管理

科学等)中的影响与应用日益扩大,它的一些观点和方法也为越来越多的人所掌握和运用.而线性代数只是代数学中一个较初等的分支,它研究一类较简单的代数系统——线性空间及其线性变换.我们采用现代数学的观点来阐述线性代数的理论是想让读者最终能较好和较深入地掌握线性代数的内容,为以后学习现代数学新知识打好基础.

本书虽然比较崇尚理性思维的培养,但起点并不高,尽量注意与中学数学以及解析几何内容的衔接,时刻想到该书是一本大学数学的入门教材.其理论的阐述、概念的引入力求符合人们的认识规律.我们采用由具体事物抽象出一般概念,再从一般概念回到具体事物去的辩证观点.既注重立论的准确和证明的严谨,也注意讲清想法和思路.在不需要增加较多新知识的前提下,多介绍一些应用,多举一些实例.

本书各章末都配有适量的习题,其中一部分是近年来的考研试题.学数学的最好方法是"做数学".希望读者通过这些习题的练习,巩固和掌握所学的基本理论和方法.同时提醒读者,不要过分依赖书后的习题参考答案与提示,做题时不要轻易放过先作独立思考的机会.

鉴于有些学科对线性代数这门课程的要求较高,本书力求能系统地、科学地阐述线性代数的基本理论和方法,并且把全书的教学时数定在60左右.但是,为了保障本课程所审定的教学基本要求,适应分层次教学的需要,我们把教学内容分成了三个层次,在书中用单星号"*"和双星号"**"加以区别.在学习时数不够时,读者可根据实际情况淡化、缓读或不读那些加星号的内容,也可不做与此有关的习题,这对全书的学习无甚影响.另外,有部分内容是用楷体字排印的,它们可以作为读者的自学内容或教师的选讲内容.

使用本教材时倘若能与高等数学课程的教学相协调,例如,提前讲授空间解析几何中的部分内容,也可以把线性代数与高等数学一起作为大学数学的入门课程在一年级同时开设.这样做可以使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、微积分联系起来的能力.另外,提前开设线性代数课程,既利于高等数学的教学,也为高等数学课程中多元微积分内容的更新、线性微分方程组内容的引入提供了可能.

书中不妥之处,恳请读者多提宝贵意见.

编　者

2004年3月

目　录

第 1 章　复习与推广

首先，我们想从代数的观点简要地介绍与本书有关的一些概念和结果．所介绍的内容大部分以某种形式包括在中学数学课程中或空间解析几何课程中，这里就不再给出证明．另外，还对某些内容作了推广，这对以后的学习是有益的．本章是全书的基础，它包括数域、二阶与三阶行列式，n 维向量空间 $\mathbf{P}^n$．教师可根据教学需要选讲其中的内容．

1.1　数域及其运算律

我们知道，数是数学的一个最基本的概念，一切计算最后都归结为数的代数运算．数的概念经历了一个长期的发展过程．从逻辑上讲，数的扩充是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$，然后是有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

数的扩充与数的运算有关，其中加、减、乘、除四种运算（或四则运算）是最基本的代数运算，它们有许多好用的运算律．概括地说，代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去谋求各种类型代数问题的通用解法，即以通性求通解．这些通性正是有理数、实数、复数的全体所共有的．具有这些通性的集合对于以后一些问题的讨论是重要的．为此，我们引入一个一般的概念．

定义 1.1　设 $\mathbf{P}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集．如果满足以下两个条件：

1) $0,1\in\mathbf{P}$（或者至少 $1\in\mathbf{P}$）；

2) 任意 $a,b\in\mathbf{P}$，都有 $a\pm b, ab\in\mathbf{P}$，并且当 $b\neq0$ 时，有 $\frac{a}{b}\in\mathbf{P}$.

则称 $\mathbf{P}$ 为一个**数域**．

性质 2)称为 $\mathbf{P}$ 对于加、减、乘、除四种运算**封闭**．

有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 对加、减、乘、除四种运算都封闭，都是数域. 它们分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**.

自然数集 **N** 对加法与乘法封闭，但对减法与除法不封闭；整数集 **Z** 对加法、减法与乘法封闭，但对除法不封闭. 所以 **N** 和 **Z** 不是数域.

除了 **Q**,**R**,**C** 外还有许多数域. 其中，有理数域 **Q** 是最小的数域.

最后，我们把"人人都懂，到处有用"的数域 **P** 中的运算律罗列如下：任意 $a,b,c\in\mathbf{P}$.

一、关于加法

1) $a+b=b+a$ （交换律）；

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ （结合律）；

3) $a+0=0+a=a$ （0 的特征）；

4) 有惟一的 $-a\in\mathbf{P}$，使得

$a+(-a)=(-a)+a=0$ （加法的逆元素）.

二、关于乘法

5) $ab=ba$ （交换律）；

6) $(ab)c=a(bc)$ （结合律）；

7) $a\cdot 1=1\cdot a=a$ （1 的特征）；

8) 若 $a\neq 0$，则有惟一的 $a^{-1}\in\mathbf{P}$，使得

$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ （乘法的逆元素）.

三、加法与乘法的联系

9) $a(b+c)=ab+ac$ 及 $(a+b)c=ab+bc$ （分配律）.

利用运算律可以简化计算，而且以后所有代数系统的研究都是以数域的运算律为基础的. 本书常用的数域是实数域 **R**.

1.2 二阶与三阶行列式

在空间解析几何中读者已经用到了 2 阶与 3 阶行列式. 行列式起源于二元和三元线性方程组的求解. 例如，二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用加减消元法求得(1)的惟一解是

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是四个数分成两对数相乘再相减而得．其中分母是由方程组(1)的四个系数确定的．为了简化我们的结果，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

称之为**2阶行列式**，它是方程组(1)的**系数行列式**，含有两行两列．横写的称为**行**，竖写的称为**列**．数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(3)的**元素**．a_{ij} 就是位于第 i 行第 j 列处的元素．

上述行列式的定义可用**对角线法**来记忆．参看图1.1，即2阶行列式等于它的**主对角线**(由左上至右下的对角线)上的元素的乘积减去它的**次对角线**(由右上至左下的对角线)上的元素的乘积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图1.1

根据定义，式(2)中的两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1)的惟一解(2)就可以简写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}.$$

对于三元线性方程组也有相仿的结论．设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4}$$

我们引入**3 阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{5}$$

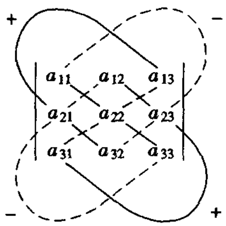


图 1.2

称之为方程组(4)的**系数行列式**.式(5)是由方程组(4)的 $3^2=9$ 个系数确定的.它有 $3!=6$ 项,其中正负项各半,每项均为不同行、列的三个元素的乘积.其规律遵循图 1.2 所示的**对角线法则**:三条实线是平行于主对角线的连线,三条虚线是平行于次对角线的连线;实线上的三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

那么,当 $D\neq 0$ 时,方程组(4)的惟一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{6}$$

请读者用消元法验证式(6)是成立的.

另外,把行列式的行改为列,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

因为数的乘法和加法满足交换律,显然式(7)两边相等.

3 阶行列式也可以用 2 阶行列式来计算,即它可以按第 1 行(列)展开.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

把式(8)中的 2 阶行列式展开,就可以看出式(8)和式(5)是一致的.

在线性代数中,行列式是一个基本工具,下一章将一般地讨论 n 阶行列式.

1.3　n 维向量空间 $\mathbf{P}^n$

1.3.1　几何向量及其运算

一、向量的概念

具有大小和方向的量称为向量(或矢量).向量可以用有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示,用长度$|\overrightarrow{AB}|$表示向量的大小(或模),用箭头"→"表示向量的方向.向量也常用一个黑体字母来表示,例如,$\boldsymbol{\alpha}$,它的长度用$|\boldsymbol{\alpha}|$表示.用有向线段表示的向量称为**几何向量**.两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 相等,是指它们有同样的大小和方向,记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.只考虑大小和方向的向量称为**自由向量**.

长度等于 1 的向量称为**单位向量**.长度为零的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\overrightarrow{0}$.与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**,记

作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

二、向量的线性运算

两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的(几何)和是一个向量,记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,它服从平行四边形法则,即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为邻边组成的平行四边形的对角线.

以实数 k 乘向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 就得到 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数量乘积**,记作 $k\boldsymbol{\alpha}$.当 $k>0$ 时,$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度伸缩 k 倍,$k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向;当 $k<0$ 时,$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度伸缩 $|k|$ 倍,$k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 反向;当 $k=0$ 时,$k\boldsymbol{\alpha}$ 是零向量.

向量的加法和数量乘法统称向量的**线性运算**,按定义并利用几何图形容易证明,向量的线性运算满足以下运算规律:

1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ (交换律);
2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ (结合律);
3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ (零向量的特征);
4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ (加法的逆元素);
5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;
6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$ (数乘的结合律);
7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$ (第一分配律);
8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$ (第二分配律).

可见,几何向量的线性运算可以像实数域中的数那样去运算,且有大体相同的运算规律.不同的是,两个向量的和是一个向量,数乘向量也是一个向量,它们有简明的几何意义.向量的运算能有效地表述几何概念及几何问题,描述空间结构.向量的线性运算及其八条运算规律则构成一组代数化的几何公理体系(见4.5),它是线性空间一个具体、生动的几何模型.

三、用坐标进行向量的线性运算

在解析几何中,通过引进坐标系,使得在实数与直线上的点之间,在实数偶与平面上的点之间,以及在实数三元组与空间中的点之间,都存在着自然的对应.于是,许多几何问题可以转化为代数问题来研究.反过来,许多代数问题可以用几何方式来解释.例如,在几何空间中引进坐标系;以坐标系为枢纽,几何向量的运算就可以化为相应坐标之间的运算.设在空间中引进(直角)坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$,其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为

x 轴、y 轴、z 轴的正向单位向量，称为**基本向量**；又设空间中任意一点 M 的(直角)坐标为 x,y,z，则点 M 的**向径**(或**矢径**)为

$$\boldsymbol{\delta}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

另外，设 $\boldsymbol{\delta}_i=(x_i,y_i,z_i)$，其中 $x_i,y_i,z_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2$；$k\in\mathbf{R}$，则

$$\boldsymbol{\delta}_1+\boldsymbol{\delta}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2); \tag{1}$$

$$k\boldsymbol{\delta}=k(x,y,z)=(kx,ky,kz). \tag{2}$$

这样，空间中任一向量也有了坐标，并且容易验证，坐标向量的线性运算(1)和(2)也满足上述八条运算规律.

四、内积(或数量积)

两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**是一个实数，记作 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，并且规定

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角. 由此可知，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$；当 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是**正交的**(或**垂直的**).

根据向量内积的定义可以证明，内积具有以下基本性质：对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，任意 $k\in\mathbf{R}$，

1) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$　　(对称性)；

2) $(k\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$　　(线性性之一)；

3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$　　(线性性之二)；

4) 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}>0$　　(正定性).

在空间中取定右手直角坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，则

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

设 $\boldsymbol{\delta}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}$，其中 $x_i,y_i,z_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2$，则向量 $\boldsymbol{\delta}_1$ 与 $\boldsymbol{\delta}_2$ 的内积在直角坐标系下有简单的计算公式：

$$\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{\delta}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{3}$$

这个公式也表明，$\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{i}=x_1$，$\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{j}=y_1$，$\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{k}=z_1$.

从而

$$\boldsymbol{\delta}_1=(\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

五、三个向量共面的条件

取定(直角)坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，设 $\boldsymbol{\delta}_i=(x_i,y_i,z_i)$，其中 x_i,y_i，