平面解析几何一题多解

翟连林主编

北京出版社

中学数学智力开发丛书

中学数学智力开发丛书

平面解析几何一题多解

抑　限　表

主编　翟连林

编者　李振祥　杨香琴

　　　张家壮　刘凤海

平面解析几何一题多解

Pingmian Jiexi Jihe Yiti Duojie

翟连林 主编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路 6 ）

新华书店北京发行所发行

北京顺义北方印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 12.125印张 267,000字

1990年 5 月第 1 版 1991年 5 月第 2 次印刷

印数：17,900—38,900

ISBN 7-200-00875-3/G·380

定 价：4.50元

编写说明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务.要完成这一任务，必须演算一定数量的题目.但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律.这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微.

长期的教学实践使我们体会到：恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度“追踪”，能“以少胜多”地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧.为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套“中学数学智力开发丛书”.这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》.

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及基本解题规律.

在本书编写过程中，刘金玲、董春容、耿雪、王学东四位同志帮助核算，阮光南同志帮助绘图，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

1989年1月

目　录

第一章　一题多解的意义与作用

解析几何是中学数学的重要内容，它是联系中学数学各部分知识的纽带.学好解析几何，对学好中学数学有着重要的意义.

一题多解是学好解析几何的重要途径，它既可以利用解析几何知识的内在结构，选择不同的坐标系或运用不同的公式纵向求解，又可以利用代数、三角与平面几何等知识横向求解，从而帮助读者掌握各种复杂曲线的特征，培养逻辑思维、运算和解决实际问题的能力.下面通过举例加以说明.

例　已知圆$x^2+y^2=4$的一条割线的斜率为2，此割线被圆所截的弦长为$2\sqrt{2}$，求此割线方程.

【解法1】 如图1-1所示，已知割线的斜率为2，可设割线的斜截式方程为$y=2x+b$，由方程组$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y=2x+b,\end{cases}$

消去y，整理后得

$$5x^2+4bx+b^2-4=0.$$

设割线与圆的交点是$Q_1(x_1,y_1)$、$Q_2(x_2,y_2)$，则x_1、x_2是该方程的两个根.

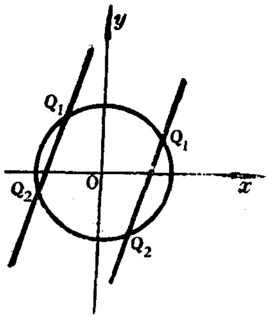

图 1-1

$$\therefore\quad x_1+x_2=-\frac{4}{5}b,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{5}(b^2 - 4).$$

$\because$ $|Q_1Q_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$,

又 $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$,

$$\therefore \quad |Q_1Q_2|^2 = (x_2 - x_1)^2(1 + k^2)$$
$$= [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2](1 + k^2)$$
$$= \left[\frac{16}{25}b^2 - \frac{4}{5}(b^2 - 4)\right] \cdot 5$$
$$= \frac{1}{5}(80 - 4b^2).$$

由已知 $|Q_1Q_2| = 2\sqrt{2}$，得

$$\frac{1}{5}(80 - 4b^2) = 8, \quad b = \pm\sqrt{10}.$$

$\therefore$ 此割线的方程为 $y = 2x \pm \sqrt{10}$.

【解法2】 已知割线的斜率为2，即 $\operatorname{tg}\alpha = 2$（$\alpha$为锐角），故 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.设割线在$y$轴上的截距为$b$，则此割线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}t, \\ y = b + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}t. \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

把参数式代入圆的方程，得

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}t\right)^2 + \left(b + \frac{2\sqrt{5}}{5}t\right)^2 = 4.$$

整理，得 $t^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}bt + b^2 - 4 = 0.$

设割线与圆的交点Q_1、Q_2的对应参数为t_1、t_2，则t_1、t_2为该方程的两个根，即

$$t_1+t_2=-\frac{4\sqrt{5}}{5}b, \qquad t_1\cdot t_2=b^2-4.$$

$$\therefore \quad (2\sqrt{2})^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\frac{16}{5}b^2-4(b^2-4)$$

$$=\frac{1}{5}(80-4b^2),$$

得 $b=\pm\sqrt{10}$.

∴ 割线方程为 $y=2x\pm\sqrt{10}$.

【解法3】 由于圆$x^2+y^2=4$的半径为2，可设割线与圆的交点Q_1、Q_2的坐标分别为$(2\cos\theta_1, 2\sin\theta_1)$，$(2\cos\theta_2, 2\sin\theta_2)$ $(\theta_1$、$\theta_2\in[0,2\pi))$，则有

$$4(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+4(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2=(2\sqrt{2})^2,$$

整理后得 $\operatorname{tg}\theta_1\cdot\operatorname{tg}\theta_2=-1$,

∴ $OQ_1\perp OQ_2$, 则 $\theta_2=\theta_1\pm\frac{\pi}{2}$.

又 $\frac{2\sin\theta_1-2\sin\theta_2}{2\cos\theta_1-2\cos\theta_2}=2$,

即 $\sin\theta_1-\sin\theta_2=2(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$.

将 $\theta_2=\theta_1\pm\frac{\pi}{2}$代入，得

$$\sin\theta_1\mp\cos\theta_1=2(\cos\theta_1\pm\sin\theta_1),$$

∴ $-\sin\theta_1=3\cos\theta_1$ 或 $3\sin\theta_1=\cos\theta_1$.

即 $\operatorname{tg}\theta_1=-3$ 或 $\operatorname{tg}\theta_1=\frac{1}{3}$.

则割线方程为 $y-2\sin\theta_1=2(x-2\cos\theta_1)$.

即 $y=2x\pm\frac{2}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta_1}}\ (\mathrm{tg}\theta_1-2)$.

将 -3 和 $\frac{1}{3}$ 分别代替 $\mathrm{tg}\theta_1$，即得到所求割线方程为

$y=2x\pm\sqrt{10}$.

【解法4】 自圆心 O 引所求割线的垂线，垂足分别为 D 及 D'，则 D、D' 是弦的中点，如图1-2所示。

因为圆的半径长为 2，弦长为 $2\sqrt{2}$，所以弦心距 $d=|OD|=|OD'|=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$.

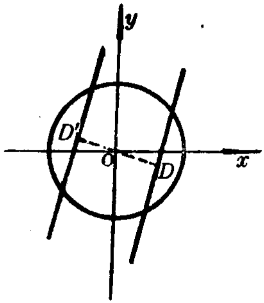

图 1-2

设割线的倾角为 α，则 $\mathrm{tg}\alpha=2$（α 为锐角），

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

则 D' 点的坐标为

$$\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\ \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

即 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

D 是 D' 关于原点的对称点，故点 D 的坐标为

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right).$$

所求割线的方程为 $y\mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=2\left(x\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

即 $y=2x\pm\sqrt{10}$.

【解法5】由解法4可知，割线方程的法线式为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-\sqrt{2}=0.$$

可化为 $\dfrac{x+y\text{tg}\theta}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}}-\sqrt{2}=0$.

因直线与其法线互相垂直，故$\text{tg}\theta=-\frac{1}{2}$.代入上式，

得 $\dfrac{x-\frac{1}{2}y}{\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}}}-\sqrt{2}=0$.

即 $2x-y\mp\sqrt{10}=0$.

【解法6】分别以x、y轴为实、虚轴（原点属于实轴），在复平面内建立坐标系.

由解法4可知，把两割线绕原点依顺时针方向旋转α角，使其达到$y=\pm\sqrt{2}$的位置.

设$P(x,y)$为割线上的任一点，则复数$(x+yi)[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]$的虚部为$\pm\sqrt{2}i$，

即 $y\cos\alpha-x\sin\alpha=\pm\sqrt{2}$.

由已知$\text{tg}\alpha=2$（α是锐角），得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

代入上式，得 $y\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-x\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\pm\sqrt{2}$.

即 $y-2x=\pm\sqrt{10}$.

以上这六种解法，涉及到解析几何中直线和圆的许多知识，有斜截式、点斜式、两点式、法线式、参数式等直线方程，有两点间距离公式、直线的斜率公式、两直线垂直的充要条件，还用到了二次方程的韦达定理、复数知识、勾股定理及三角函数式的变化公式等.运用这些知识的纵横联系解决几何问题，不但可以加深对直线和圆这一章内容的理解，也可认清数学知识的内在矛盾和相互依存的辨证关系.

以上六种解法，是通过对已知条件和结论的全面分析而得出的.从已知直线的斜率，想到求直线在y轴上的截距，通过直线和圆的两个方程联立而得；也可以用直线的参数式，消去参数而得.从已知圆的半径，想到用三角形式表示直线和圆的两个交点，通过两点间的距离公式、直线的斜率公式和三角函数式的变化求出割线方程；也可以用求圆心到弦所引的垂线足的坐标和点斜式方程求出.还可以从求圆心到割线的距离，想到割线的法线式；从旋转割线与x轴平行，割线上任一点的纵坐标等于圆心到割线的距离，想到在复平面内建立坐标系的方法，根据复数的性质求解.

为了寻求一题多解，必须从知识的各个方面去探求、去思考、去寻找与题设和结论有关的定义、定理、公式和法则。在这六种解法中，解法1、解法2是一般方法，解法3较繁，解法5和解法6都很简便.因此，一题多解不仅能开发智力，从多角度寻求解题途径，而且还能掌握各种解题技巧，寻求最佳解题方法.

加强对一题多解的练习，不但能够帮助我们总结解题规律，提高解题的速度和质量，通过少量的题目，复习较多的基础知识，达到“以少胜多”的目的，而且还能培养我们在学习上的钻研能力和刻苦精神.

第二章 怎样培养多解能力

一题多解，可以拓宽解题思路，沟通数学各科知识之间的联系，对于运用基础知识，掌握知识结构，培养逻辑思维能力、综合运用能力，都有很大帮助.同时还能培养对数学的学习兴趣和探求精神.那么怎样才能准确、迅速地解决解析几何问题，提高解题能力，这是本章要进一步讨论的问题.

一、要有扎实的数学基础

平面解析几何是中学数学课程的重要组成部分，它是以坐标系为工具，用代数方法研究几何图形，是代数、三角及平面几何等多种知识的综合运用.因此，要想准确、迅速地用多种方法解决解析几何问题，必须牢固地掌握数学基础知识，即数学概念、公式、法则和定理等.对于数学概念，要掌握它的内涵和外延，即掌握它的本质属性和概念所涉及到的所有对象.对于数学公式及定理，要掌握它成立的条件、结论、主要作用和应用范围.做到公式、定理应用准确，运用自如，心中有数，有的放矢.

还要重视数学知识纵向与横向的联系，要辩证地理解数学知识，灵活地运用数学知识，把定义、公式、定理学活，这样，在解题过程中才能少走弯路，做到简练、迅速、准确.

例如，直线的斜率是个重要概念，它的定义为直线倾斜角α的正切，而α的定义范围是$0\leqslant\alpha<\pi$。在这里，$\mathrm{tg}\alpha$是斜率概念的本质属性，而$0\leqslant\alpha<\pi$，$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$是斜率概念的适用范围。因此在解有关斜率概念题时，就要考虑斜率存在或不存在两种情况，不然将会出现漏解。

例1　求过点（0,1）与抛物线$y^2=4x$相切的切线方程。

【解】设该切线的斜率为k，得方程组$\begin{cases}y-1=kx,\\ y^2=4x.\end{cases}$

消去y，整理，得　$k^2x^2+2(k-2)x+1=0$。

令$\Delta=0$，　解得$k=1$。

故所求切线方程为　$y-1=x$，

即　$x-y+1=0$。

显然，丢掉了$x=0$这个解。究其原因，是只考虑到当k存在时的情况，而没有考虑到k不存在时的情况。因此，本题的正确解法除得到方程$x-y+1=0$外，还有过点（0,1）k不存在时的切线方程$x=0$。

在解析几何问题中，求轨迹方程的证明是个难点。要解好这类题，必须要灵活、合理地运用代数式的各种等与不等的变形，解题中要根据已知条件，边运算、边分析，使问题逐步接近所要达到的目的。例如，根据椭圆的定义求椭圆方程时，从$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$很容易导出$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。这里，$a>b>0$，$b^2=a^2-c^2$。这就证明了椭圆上任一点的坐标满足方程。还要证明坐标满足方程的点都在椭圆上。

设$M(x_1,y_1)$的坐标满足方程，即$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$.

$\therefore\quad y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)=(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$.

$\therefore\quad |MF_1|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}$

$$=\sqrt{(x_1+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}$$

$$=\sqrt{a^2+2cx_1+\frac{c^2x_1^2}{a^2}}=\left|a+\frac{c}{a}x_1\right|.$$

同理，$|MF_2|=\left|a-\frac{c}{a}x_1\right|$.

要证明 $|MF_1|+|MF_2|=2a$.就要设法去掉绝对值符号，并且要证明 $a+\frac{c}{a}x_1>0$，$a-\frac{c}{a}x_1>0$，也就是要证明$\left|\frac{c}{a}x_1\right|<a$.

由 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b_2}=1$ 可知

$\frac{x_1^2}{a^2}\leqslant1$，$x_1^2\leqslant a^2$，$\therefore |x_1|\leqslant a$.

又 $c<a$，$\therefore \frac{c}{a}<1$，$\therefore\ \left|\frac{c}{a}x_1\right|<a$.

$\therefore\ |MF_1|+|MF_2|=a+\frac{c}{a}x_1+a-\frac{c}{a}x_1=2a$，得证.

解析几何中的公式较多，方法也较灵活，除了要掌握好

解析几何中的所有公式外，还要熟练地运用代数、三角中的各种公式解决解析几何问题，这样才能不断地提高解题能力。

二、掌握解题方法和技巧

在解解析几何题时，应掌握一般的解题方法，还要学会运用解题技巧。下面介绍常用的几种解题方法和技巧。

1．选择适当的坐标系

选择适当的坐标系是作出简捷解法的重要途径．否则，将导致繁琐计算，使问题变得复杂。选取坐标系的一般原则是：

（1）选取图形中的一个点作为原点，该点坐标即为（0，0）．

（2）选取图形中的一条直线作为x轴或y轴，该线上的点的纵坐标或横坐标就是0。

（3）若图形中有两条互相垂直的线段，则应将这两条线段所在的直线选为坐标轴。

（4）若图形是轴对称，则应选择对称轴为坐标轴；若图形是中心对称，则应选择对称中心为原点。

选择坐标系时，应根据具体图形的特点，目的是使有关点的坐标尽量简单，从而可使运算得到简化。

例2 在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，求证：$|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|DC|^2)$。

显然，点B与点C关于点D对称，故可选择D为原点，BC所在的直线为x轴，建立如图2-1所示的坐标系，则B、C两点的纵坐标为0，横坐标互为相反数，这样计算起来十分方便。

2. 用定义解题

解题时要认真审题，分析题意，充分运用已知条件，特别要注意曲线的定义和性质。例如对于圆的方程，要注意运用圆心到切线的距离等于半径；对于圆锥曲线，要掌握其统一定义，$e=0$是圆，$e=1$是抛物线，$e\in(0,1)$是椭圆，$e>1$是双曲线。还要记牢圆锥曲线的焦半径公式：

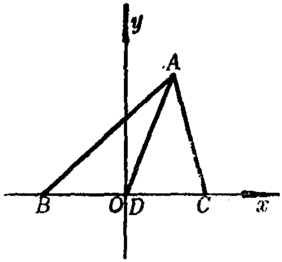

图 2-1

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$|F_iP|=a\pm ex_i$ $(i=1,2)$；

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$|F_iP|=ex_i\pm a$ $(i=1,2)$；

抛物线 $y^2=2px$，$|PF|=x+\frac{p}{2}$。

例3 设$A(x_1,a)$、$B(x_2,b)$、$C(x_3,c)$为抛物线$y^2=2px$上的三点（$p>0$），F为抛物线的焦点。如果a^2，b^2，c^2成等差数列，那么$|AF|$，$|BF|$，$|CF|$也成等差数列。

【解】 ∵ A、B、C是抛物线$y^2=2px$上的三点，抛物线的准线方程是$x=-\frac{p}{2}$，

$$\therefore\ |AF|=x_1+\frac{p}{2},\ |BF|=x_2+\frac{p}{2},$$

$$|CF|=x_3+\frac{p}{2} \qquad ①$$