高等学校教材

离散数学导论

（第3版）

徐洁磐

高等教育出版社

高等学校教材

离散数学导论

(第3版)

徐洁磐

高等教育出版社

内容提要

本书是1982年问世的《离散数学导论》的第3版，本版基本上保持原第2版的风格与内容，并适当做了补充与删改，本版对原有的章节进行了重新编排，同时增加了大量习题. 在每一篇结束后都给出了复习指导，供学习参考. 本书可作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的教材或参考书，也可供从事计算机工作的科研人员、工程技术人员以及其他有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学导论/徐洁磐.—3版.—北京:高等教育出版社,2004.6

ISBN 7-04-014613-4

Ⅰ.离... Ⅱ.徐... Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第029664号

市场策划 陈 振 **策划编辑** 董建波 **责任编辑** 董建波 **封面设计** 王 雎
版式设计 王 莹 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京铭成印刷有限公司		
		版 次	1982年6月第1版
开 本	787×1092 1/16		2004年6月第3版
印 张	16.75	**印 次**	2004年6月第1次印刷
字 数	370 000	**定 价**	19.50元

第 3 版序言

《离散数学导论》一书自 1982 年出版至今已有 20 余年,中间也经再版,这次已是第 3 版了,在这 20 余年中本书受到广大教师与学生的欢迎,其发行范围已普及国内各学校并已流传至港、澳、台等地区. 为进一步适应各学校的需要,在这一版中对原版本的特色继续予以保留外,还做了一定程度的修改与删除,第 3 版的主要编写方针是:

1. 继续保持原版本简明易懂的原则;
2. 继续保持原版本读者群体范围;
3. 继续保持原版本的篇幅规模与内容;
4. 在章节编排上做适当的调整,将第 2 版中过长的章节做适当变更,使每一章节控制在合适范围内,以便于教学上的合理安排;
5. 为适应计算机科学与技术的发展,适当调整内容,如增加非经典逻辑等内容,删除一些繁琐证明及调整一些不合理的例子;
6. 为帮助学生复习,在每篇后特增加复习指导;
7. 在每章后增加习题,并在每篇后增加大量习题,以帮助学生复习;
8. 对原版中的一些错误做了订正;
9. 增加了中英文名词对照表及常用符号表.

按以上 9 点要求修订后,相信本书第 3 版更能适应读者要求.

在编写本书第 3 版过程中,得到南京大学计算机软件新技术国家重点实验室的支持,同时还得到南京大学计算机与技术系多位老师支持以及陈巧珍老师具体帮助,在此表示感谢!

徐洁磐

南京大学计算机软件新技术国家重点实验室

2003.10

再版前言

《离散数学导论》一书出版发行已有七年，在这七年中得到了广大读者的支持，同时他们还对本书提出了很多宝贵的意见．作者在多次讲授中也积累了不少经验，在此基础上对原书做了修订，其主要修改之处有：

1．对原有章节内容做了重大调整．根据《离散数学教学大纲》重点讲授该大纲所确定的四个基本内容，即集合论、代数系统、图论与数理逻辑，并且重点突出了数理逻辑与代数系统，删除了有限自动机与图灵机器两章；

2．对章节划分与次序做了调整，它们依次是：集合论初步、关系与映射、无限集、代数系统、图论与数理逻辑等；

3．重点修改与增加了数理逻辑内容，使之适应目前的需要；

4．增加了代数系统中的内容；

5．关系与映射一章中增加了“相容关系”一节；

6．每章都增补了习题；

7．对原书中的一些错误做了订正．

在修订过程中继续保持了本书的原有特色．

经过上述修订后，相信此书能更适应读者要求，同时也希望能继续得到读者的支持．

作　者

1989.08 南京

原 版 序

《离散数学导论》一书是作者近年来在南京大学计算机科学系讲授此课程的讲义的基础上整理而成的. 它可以作为理工科院校计算机有关专业学生的教材,也可作为从事计算机工作的有关人员的参考书.

本书内容比较广泛,它不仅包括目前一般离散数学的基本内容,如:集合论、图论、关系与映射、代数系统及数理逻辑等,它还包括目前应用得比较广泛的一些内容,如有限自动机理论、图灵机器等.

作者力图将离散数学中的各部分内容有机地联系起来,同时也尽量地将各部分内容的特色表达清楚.

由于离散数学是一门数学,因此作者力求叙述严格,证明与推导逻辑性强,思路清楚,使学生通过此课程学习后能得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练. 但是,考虑到此课程是为计算机有关专业学生开设的,因此在编写过程中作者力求做到能密切结合计算机的实际,能将理论与实际紧密地结合起来,使读者能知道如何利用离散数学的理论去解决计算机中的实际问题.

作者在编写过程中尽量做到内容深入浅出、文字浅显易懂,因此,本书非常适合于读者自学. 一般讲,只要具有初等数学知识的人即可看懂此书. 但是,希望读者能具有一定的逻辑思维能力,这样,可以较为容易地掌握本书的实质.

在编写过程中曾得到惠永涛、汪承藻两位老师的协助,在此表示感谢.

作 者

1982.04. 南京

目　　录

第一篇 绪 言

1. 计算机科学与离散数学

由于计算机技术的日益发展,计算机应用的日益拓广,计算机软件的日益丰富,计算机理论研究的日趋完善,从而产生了计算机科学.在计算机科学的研究中需要借助于一些工具与方法,而离散数学正是研究计算机科学的有力工具.

离散数学作为有力的数学工具,对计算机的发展、计算机科学的研究起着重大的作用.远在计算机产生之前,图灵(Turing)在研究可计算性问题时就建立了著名的图灵机.图灵机的基本结构思想为1946年计算机的问世在理论上奠定了基础.在计算机发展的初期,利用布尔代数理论研究开关电路,从而建立了一套完整的数字逻辑理论,对计算机的逻辑设计起了很大的作用.在近期,利用自动机理论研究形式语言;利用谓词演算研究程序正确性问题;利用代数结构研究编码理论;利用能行性理论研究计算机中的可计算性问题等,这些也是离散数学在计算机科学研究中的应用.目前,离散数学在人工智能、数据库理论、软件工程、程序理论中等计算机研究领域中的作用越来越大.计算机科学普遍地采用离散数学的一些基本概念、基本思想、基本方法,使得计算机科学越趋完善与成熟.

所有这些,使得离散数学成为了解和学习计算机科学、掌握和研究计算机科学的必需的理论基础.在现代计算机科学中,如果不了解离散数学的基本内容,则在计算机科学研究中就会寸步难行.

2. 离散数学之特征

离散数学是数学的一个分支,它以离散量作为其主要研究对象,如自然数、真假值、字母表等.这使它与数学分析(研究对象是连续量)在研究对象上形成了鲜明的差别.由于这两种数学在研究对象上的本质区别,使数学分为连续数学与离散数学两大类.

在离散数学中非常重视"能行性"问题的研究.要解决一个问题,首先要证明此问题解的存在性.但是,仅解决存在性还不够,还需要找出得到此问题解的步骤来,而且其步骤必须是有限的、有规则的.这就是所谓"能行性"问题的研究.

离散数学的上述特性使得它成为研究计算机科学的基本数学工具.由于计算机是一个离散

的结构，故计算机科学的研究对象大都是离散形式.在计算机科学的研究对象中任何一个问题不仅需要解的存在性，而且更需要解的能行性.因此，离散数学成了研究计算机科学的最合适的工具.

3．离散数学的内容

由于离散数学是以离散量作为其研究对象，故一切以离散现象作为其研究对象或作为其研究对象之一的数学均可属于离散数学，如集合论、代数结构、数理逻辑、图论等.它还包括诸如组合数学、数论、离散概率等方面，但是其主要内容为前述的4个部分，因此在本教材中主要介绍集合论、代数结构、图论及数理逻辑这4部分内容.

离散数学各分支间虽然其研究对象一致，但其研究方法各异，研究的侧重点也有所不同，故各具特色，它们互相补充、互相促进、互相渗透，逐渐形成了一门具有一定共性的学科.

第二篇　集　合　论

本篇由集合论初步、关系、函数、有限集与无限集等 4 部分与集合论相关的内容组成，它们以集合概念为基础并进一步扩充与延伸组成一个内容关联的整体.

第一章　集合论初步

集合的概念是一般数学及离散数学中的基本概念，亦是计算机科学中经常应用的基本概念. 集合论还能直接应用到计算机科学的各个部分中去.

§1.1　集合的基本概念

1.1.1　集合及其元素

首先，对集合及其元素的概念做一个说明.

一些不同的确定的对象的全体称为集合，而这些对象称为集合的元素. 由此可见，集合是由元素组成的，元素可以理解为存在于世上的客观物体. 当然，这些物体可以是具体的，也可以是抽象的，如人、书、桌子、花、太阳、地球、原子、自然数、实数、字母、点、三角形等.

对于集合可以举一些例子.

例 1.1　地球上全体人构成一个集合，而每个人则是此集合的元素.

例 1.2　计算机内存的全部存储单元构成一个集合，而每个存储单元为此集合之元素.

例 1.3　全体自然数构成一个集合，而每个自然数是这个集合的元素.

一般用带标号或不带标号的大写字母表示集合，如 A、M、X_1、B_i 等，一般用带标号或不带标号的小写字母表示集合的元素，如 a_1、b_2、x、y 等. 为了表示一个集合由哪些元素组成，一般将集合的元素全部列出（元素间以逗点隔开）并左右用花括号括起，以表示由这些元素组成的集合. 例

如,集合 A 由元素 a、b、c、d 组成,则可写成

$$A=\{a,b,c,d\}$$

对于集合必须注意几点:

(1) 集合中的元素是确定的,也就是说,对集合 A,任一元素 a 或属于此集合,或不属于此集合,两者必居其一.若一元素 a 属于集合 A,则用 $a\in A$ 表示,若不属于 A,则用 $a\notin A$ 表示;

(2) 集合中的每个元素均不相同,亦即集合 $\{a,b,b,c,d\}$ 与集合 $\{a,b,c,d\}$ 是一样的.

除此之外,对集合不做任何其他限制,使它具有最广泛的含义.

对集合的元素也不做任何限制,甚至某一集合可以作为另一集合的元素,如 $A=\{1,2,\{a,b\}\}$,其中集合 $\{a,b\}$ 是集合 A 的元素.

对于应由哪些元素构成一集合,从理论上讲也不做任何限制,当然,在实际应用时,它往往具有明确的范围.即是说,一集合的元素往往具有一共同的性质.

对于集合元素的个数也不做任何限制,它可以是有限个,也可以是无限个.一集合若由有限个元素组成,则称有限集;一集合若由无限个元素组成,则称无限集.如自然数集即为无限集,地球上人的集合则是有限集,特别地,对元素个数为零的集合称做空集,记以 $\varnothing$,如"缺席今天会议的人"构成集合 A,则今天全体出席会议表示 $A=\varnothing$.

与空集相对应的是全集,一个集合,如果它能包括人们所考虑的目标之内的所有元素,则此集合叫做全集,记以 E.如讨论存储器时,则存储器的全体存储单元构成一个全集 E.如讨论人的问题时,则全体人类构成一个全集 E.

前面已经提到集合的表示法,即集合 A 由元素 a、b、c、d 组成,可写为 $A=\{a,b,c,d\}$,这种表示法称为"枚举法",也就是将集合所有元素一一列出.但有时也可只列出一部分元素,而其余部分可从前后关系中很显然地推出,如:

$$A=\{1,2,3,4,\cdots\}$$

表示全体自然数集合,又如:

$$A=\{1,2,3,\cdots,100\}$$

表示从 1 到 100 的 100 个自然数所构成的集合.

前面所讨论的集合表示法称显式表示法,集合还可用另一种方法表示即隐式表示法,这个方法是用一集合元素所具有的共同性质来刻画这个集合.如正偶数组成的集合 A 可写成

$$A=\{x\mid x\text{ 是正偶数}\}$$

对一般情况可用下面方式表示:

$$A=\{x\mid P(x)\}$$

其中 P 表示某性质,这个集合 A 表示由满足性质 P 的元素 x 所组成.

1.1.2 集合间的关系

集合间一般可有两种关系:相等关系与包含关系.

定义 1.1 如果集合 A 与集合 B 的元素相同,则称这两个集合是相等的,记以 $A=B$;否则,称这两个集合不相等,记以 $A\neq B$.

定义 1.2　集合 A、B，如果当 $a\in A$ 必有 $a\in B$，则称 B 包含 A，或称 A 是 B 的子集，记以 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$. 如果 $B\supseteq A$ 且存在 b，使得 $b\in B$ 但 $b\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记以 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 若集合 A、B 间不满足 $A\subseteq B$，则称 B 不包含 A，记以 $A\not\subseteq B$.

例 1.4　设 $N=\{0,1,2,\cdots\}$，$A=\{1,2,3,\cdots,100\}$，则有 $A\subseteq N$，并且有 $A\subset N$.

例 1.5　设 $A=\{1,2,3,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，则有 $A=B$.

例 1.6　设 $A=\{i\mid i$ 为正整数$\}$，$B=\{j\mid j$ 为正偶数$\}$，则有 $B\subseteq A$，且 $B\subset A$.

对于集合的相等与包含关系，可用一种图即文氏图(Venn Diagram)表示.

文氏图在表示集合相互间的关系时较为直观、形象，故目前被广泛应用. 在文氏图中用一个平面中的区域表示一个全集，而对包含于全集内的集合用平面区域内的圈表示之. 这样，全集内的集合间关系就可用平面区域内圆之间的关系表示. 对于相等、包含等关系可以很形象地用文氏图表示，如图 1.1 所示.

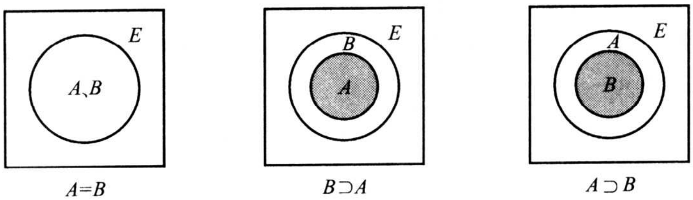

图 1.1　相等与包含关系之文氏图

对于相等与包含关系有下面的一些定理.

定理 1.1　对任一集合 A，必有 $\varnothing\subseteq A$.

[证]　假设 $\varnothing\not\subseteq A$，则必至少存在一个 x，有 $x\in\varnothing$ 而 $x\notin A$，但是 $\varnothing$ 中无元素，故 $x\notin\varnothing$，由此与假设矛盾，从而得证.

定理 1.2　对任一集合 A，必有 $E\supseteq A$.

此定理证明较为简单，故从略.

由上面两个定理，可以得到

定理 1.3　对任一集合 A，必有 $\varnothing\subseteq A\subseteq E$.

定理 1.4　有集合 A 与 B，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$.

[证]　充分性：设 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$，且假设 $A\neq B$，则根据定义必至少存在一个元素属于一集合，令此元素为 x，且令 $x\in A$，$x\notin B$，但根据 $A\subseteq B$ 的定义，$x\in A$ 则必有 $x\in B$，由此产生矛盾，从而得证. 用类似方法对于 $x\in B$ 且 $x\notin A$ 亦可得到矛盾，所以定理充分性得证.

必要性：设 $A=B$，且假设 $A\supseteq B$、$A\subseteq B$ 中至少有一个不保持，设 $A\subseteq B$ 不保持，此表示必至少存在一个 $x\in A$ 但 $x\notin B$，但这与 $A=B$ 矛盾. 类似地对 $A\supseteq B$ 不保持也得到与 $A=B$ 矛盾，所以定理必要性得证.

这个定理建立了集合相等与包含间的关系.

1.1.3 集合代数

在这节中将用代数的方法讨论集合，即建立一些集合的运算以及这些运算间的基本关系式．首先建立一些集合的运算．

定义 1.3 由集合 A、B 中所有元素合并组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记以 $A\cup B$，而 $\cup$ 称为并运算．

例 1.7 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$

定义 1.4 由集合 A、B 所有的公共元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记以 $A\cap B$，而 $\cap$ 称为交运算．

例 1.8 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,3,8,10\}$，则

$$A\cap B=\{1,3\}$$

定义 1.5 集合 A、B 若满足 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是分离的．

定义 1.6 由集合 A、B 中所有属于集合 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 对集合 B 的差集，记以 $A-B$，而 $-$ 称差运算．

例 1.9 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B=\{d,e,f,g,h\}$，则

$$A-B=\{a,b,c\}$$

由差集可直接定义补集．

定义 1.7 集合 A 的补集 $\sim A$ 可定义为

$$\sim A=E-A$$

而 $\sim$ 称为补运算，它是集合论中的一元运算．

例 1.10 设 $E=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，则

$$\sim A=E-A=\{1,3,5,7,\cdots\}$$

还可以由差集定义对称差．

定义 1.8 集合 A、B 的对称差（或称布尔和）$A+B$ 可定义为

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

而 $+$ 称为对称差运算．

例 1.11 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A+B=\{1,2,5,6\}$$

由例中可以看出 $A+B$ 即为 A、B 的所有非公共元素所组成的集合．

到此为止，定义了四种二元运算，即并运算、交运算、差运算和对称差运算，以及一个一元运算：补运算．这五种运算可用文氏图表示，如图 1.2 所示．

在这五种运算中，下面着重讨论并、交、补三种运算的基本公式．

由定义可知，并、交运算满足交换律，即

$$A\cup B=B\cup A \tag{1-1}$$

$$A\cap B=B\cap A \tag{1-2}$$

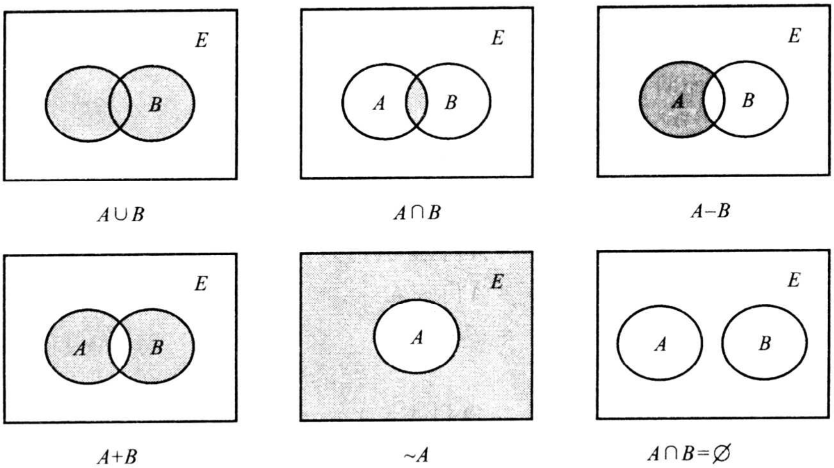

图 1.2 几种集合运算的文氏图

由定义可知,并、交运算满足结合律,即

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1-3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{1-4}$$

由定义还可知,并、交运算满足分配律,即

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1-5}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1-6}$$

由定义还可以得到有关空集、全集及补集的几个公式,它包括

同一律:

$$A \cup \varnothing = A \tag{1-7}$$

$$A \cap E = A \tag{1-8}$$

互补律:

$$A \cup \sim A = E \tag{1-9}$$

$$A \cap \sim A = \varnothing \tag{1-10}$$

零一律:

$$A \cup E = E \tag{1-11}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing \tag{1-12}$$

对式(1-11),可以证明:

$$\begin{aligned} A \cup E &= (A \cup E) \cap E && \text{由式(1-8)} \\ &= E \cap (A \cup E) && \text{由式(1-2)} \\ &= (A \cup \sim A) \cap (A \cup E) && \text{由式(1-9)} \\ &= A \cup (\sim A \cap E) && \text{由式(1-5)} \end{aligned}$$

$$= A \cup \sim A \qquad \text{由式}(1-8)$$
$$= E \qquad \text{由式}(1-9)$$

对式(1-12),可以证明:

$$\begin{aligned} A\cap\varnothing &= (A\cap\varnothing)\cup\varnothing && \text{由式}(1-7)\\ &= \varnothing\cup(A\cap\varnothing) && \text{由式}(1-1)\\ &= (A\cap\sim A)\cup(A\cap\varnothing) && \text{由式}(1-10)\\ &= A\cap(\sim A\cup\varnothing) && \text{由式}(1-6)\\ &= A\cap\sim A && \text{由式}(1-7)\\ &= \varnothing && \text{由式}(1-10) \end{aligned}$$

还可以证明等幂律:

$$A\cup A = A \qquad (1-13)$$
$$A\cap A = A \qquad (1-14)$$

对于式(1-13),有

$$\begin{aligned} A &= A\cup\varnothing && \text{由式}(1-7)\\ &= A\cup(A\cap\sim A) && \text{由式}(1-10)\\ &= (A\cup A)\cap(A\cup\sim A) && \text{由式}(1-5)\\ &= (A\cup A)\cap E && \text{由式}(1-9)\\ &= A\cup A && \text{由式}(1-8) \end{aligned}$$

对于式(1-14),有

$$\begin{aligned} A &= A\cap E && \text{由式}(1-8)\\ &= A\cap(A\cup\sim A) && \text{由式}(1-9)\\ &= (A\cap A)\cup(A\cap\sim A) && \text{由式}(1-6)\\ &= (A\cap A)\cup\varnothing && \text{由式}(1-10)\\ &= A\cap A && \text{由式}(1-7) \end{aligned}$$

此外,还有两个吸收律:

$$A\cup(A\cap B) = A \qquad (1-15)$$
$$A\cap(A\cup B) = A \qquad (1-16)$$

对于式(1-15),有

$$\begin{aligned} A\cup(A\cap B) &= (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{由式}(1-8)\\ &= A\cap(E\cup B) && \text{由式}(1-6)\\ &= A\cap E && \text{由式}(1-11)\\ &= A && \text{由式}(1-8) \end{aligned}$$

类似地,对于式(1-16),有

$$\begin{aligned} A\cap(A\cup B) &= (A\cup\varnothing)\cap(A\cup B) && \text{由式}(1-7)\\ &= A\cup(\varnothing\cap B) && \text{由式}(1-5) \end{aligned}$$