华东师范大学
函授教材

数学分析讲义

华东师范大学数学系
数学分析教研組編

（第二册）

华东师范大学函授部

数学分析講义

（第二册）

华东师范大学数学系数学分析教研組編

（內部讀物　凭証发行）

*

华东师范大学函授部出版

（上海中山北路3663号）

中华书局上海印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

*

开本787×1092公厘1/27　印張2 24/27　字数64,000

1959年5月第1版

1959年5月第一次印刷

印数1—7,900

定　价：（十二）0.36元

目　录

第五章　导　数

第六章　导数在研究函数上的应用

第五章　导　数

在极限和連續方面已作好了充分的准备工作之后，我們現在可以开始进入数学分析的中心陣地——微积分法，首先是微分法了。

微积分法的建立不只是推动了整个高等数学的发展，成为数学史上一件大事，同时它也是使数学能够广泛而有效地应用到自然科学及技术科学上的决定性的一步。

在微积分法中要研究两个特别重要的极限运算——微分运算和积分运算。实际上，作为一般分析学(包括微分方程，函数論等)基础的狹义的"数学分析"，除了引論部分的內容而外，所討論的无非就是有关这两个基本运算的理論，技术和应用。

通过这一章的学习，首先要求讀者将关于单变数函数的微分运算的理論和技术很好地掌握起来，因为它是以后一切的基础。

学习指示：

1．深切体会导数(微分运算的結果)概念的普遍性及由此带来的多方面应用可能性，要能从各种来自自然界及生产实踐的变量中，認出导数的具体表現，达到左右逢源的境界。

2．注意微分运算是一种特殊的极限运算，所有关于它的定理都是由相应的极限定理推出来的。

3．对微分运算(即求导运算)必須多作練习培养一定的熟練技巧，对我們来說，它还是一个基本操作。

4．注意微分和导数在概念上的区別、在理論上的等价以及它(微分)的引入所带来的方便，不要怕高阶导数，导数概念搞清楚了，高阶导数就不应当产生新的麻煩，当知累次运算是数学的家常便飯。

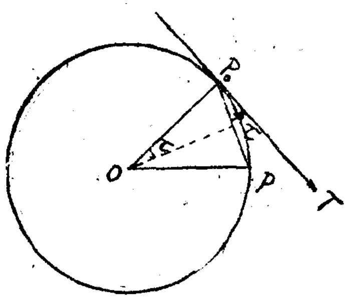
§1　切綫問題与速度問題　一个連續函数，如果对它直接作每点的极限，由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，我們除了原来的函数值外，再也得

不出什么新的結果来。但如果我們通过这函数作另一种較复杂的极限运算，则情形可能就两样了——我們很可能得出新的結果来。现在要講的导数就是这样的一种結果，它是建立在极限基础上的最重要的运算之一，微分法的产物。

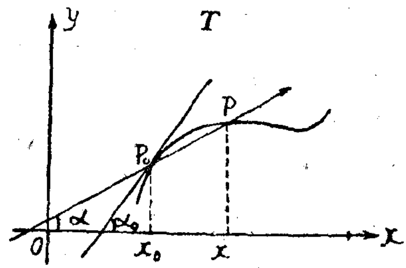
导数概念导源于几何中的切綫問題以及力学中的速度問題，現在就从它們說起。

I. 切綫問題

我們都知道什么叫做一个圆的切綫（如图 1），过圓 O 上一点 P_0，对該圆所作之切綫乃是指过 P_0 而垂直于半徑 P_0O 之直綫。設 P_0P 为一弦，则由几何知这弦和切綫 P_0T 所成之交角 τ（銳角）＝圓心角 P_0OP 之一半。由此知：当 P 愈接近于 P_0 时，则角 τ 之值（絕对）也愈小，换言之，即割綫 P_0P 愈接近于切綫 P_0T。



（图 1）



（图 2）

根据这一性質，我們可定义一般曲綫（不限于圓）在其上一点的切綫。設 P_0 为曲綫 C 上一点，过 P_0 及曲綫上另一点 P 引割綫 P_0P，则当固定 P_0 而讓 P 沿曲綫 C 变动时，割綫 P_0P 通常必跟着改变其位置（虽然它总过 P_0 点）。如果，当 P 愈是接近于 P_0 时，则割綫 P_0P 也愈是接近于一一定位置，具体些說，即过 P_0 有这样一条直綫 P_0T，当 P 愈是接近于 P_0 时，则 P_0P 和 P_0T 所成之交角也愈小（絕对），那么，我們就說：曲綫 C 在 P_0 有一切綫（即 P_0T）。（图 2）

現在要問：給定曲綫及其上一点之后，怎样知道切綫存在并如何

确定其位置呢?設想在 XOY 坐标平面上,曲綫由方程 $y=f(x)$ ($f(x)$ 为 x 之連續函数)給出如(图 2), P_0, P 之坐标分別为 $[x_0, f(x_0)]$, $[x, f(x)]$; 又直綫 P_0P 及 P_0T 与 x 軸所成之有向銳角分別为 α 及 α_0, 那么, 注意到 x 愈接近于 x_0 則 P 也愈接近于 P_0 (反之亦然), 便知切綫存在这一事实意味着:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=\alpha_0 \quad (\alpha\text{看作}x\text{的函数})$$

或者过渡到角系数(斜率)

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha_0 \quad (\text{正切及反正切之連續性})$$

于此假定了 PT 不与 x 軸垂直, 再将式中之 $\operatorname{tg}\alpha$ 用 P_0, P 之坐标表出,最后便得:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha_0$$

因为知道了 $\operatorname{tg}\alpha_0$ 也就等于确定了 P_0T 的位置,这样,求曲綫在一点的切綫的問題就归結到求 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 型的极限問題上了。

順便提一下, $\operatorname{tg}\alpha_0$ 也称为曲綫 C 在 P_0 的斜率。显然,一个綫段在其上每点之斜率必然与該綫段之斜率一致,但当 C 非綫段时,則其斜率一般必因点而异。由此可見这种斜率概念可以看做是普通綫段斜率概念之推广。

II. 速度問題

設一动点沿一直綫作运动,那么,它在时刻 t 所到达的位置和起点的距离 S (也就是动点迄时刻 t 所經历的路程)当然是 t 的函数

$$S=f(t)。\qquad (1)$$

(1) 称为运动的方程,这是因为,一方面,方程由运动而确定,另一方面,运动也由方程而确定的緣故, 今設一运动由方程(1)所給定, 試在运动过程中任取两个时刻 t_0, t_1 ($t_0<t_1$), 則动点在 $[t_0,t_1]$ 这段时間(其长为 $\Delta t=t_1-t_0$)內所經历的路程显然为 $\Delta S=f(t_1)-f(t_0)$。

我們称比$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$为运动在$(t_0 t_1)$这段时間的平均速度。因为知道了平均速度，就知道了动点在該段时間內一共走了多少路程，故平均速度概括地标誌了运动在該段时間內的快慢。

1 匀速运动

如果$f(t)$是t的綫性函数(一次函数)，$S=ct+b$，那么，不論是对于那段时間$[t_0,t_1]$，平均速度总是一个同一的数，即

$$\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}=\text{常数 } C \tag{2}$$

(特别是在相等的时間內，动点必經相等的路程)，有这性質的运动称为匀速运动。而常数C称为这运动的速度，它表示在单位时間內动点所經的路程。通俗的說，一个匀速运动乃是指一个在整个过程中快慢一致的运动，它的快慢由速度这一数而得到精确的标誌。

另一方面，如果$S=f(t)$表示一个匀速运动，則容易看出：$f(t)$必为t的綫性函数。例如在(2)中固定t_0而讓t_1表示任何一时刻t，立得

$$f(t)=c(t-t_0)+f(t_0)。$$

这等式的右边显然可写成$ct+b$的形状$(b=-ct_0+f(t_0))$。

2 非匀速运动

如果$S=f(t)$不表示一个匀速运动，这时，平均速度$\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$之値就会隨着$t_0$，$t_1$之选擇而不同，那么，談这整个运动的速度就将失掉意义。

当然，一个非匀速运动可能是由几个匀速部分所組成，例如从t_0到t_1是匀速，从t_1到t_2也是匀速等等，这时每一匀速部分仍有它的速度，而掌握了各部分的速度，整个运动的快慢情形也就了如指掌了。但是一个非匀速运动也可能无論怎样都分解不成为有限个匀速的部分，落体运动$S=\frac{1}{2}gt^2$（g表示重力加速度980米厘/秒^2）便是一例，它在任何一小段时間內都不匀速，总是在前一半段慢而在后一半段快（因为，如象一算便知，在前一半段所經之路程較在后一半段为

短)，在这种情形之下，既然在每一段无論多短的时間之內都談不上一致的快慢，那么，我們能不能更进一步的化整为另而干脆談此一时刻或彼一时刻运动的快慢呢？这样，我們就面临一个新的任务，怎样一般地来定义一个运动在其过程中任一时刻的速度？很自然地我們将要求：假如这任务能完成的話，那么，任一含有匀速部分的运动，在其匀速部分的每一时刻，首先应該有一个这样的速度，而且这速度应与該匀速部分的速度同值。

設想运动在包含 t_0 的一段时間(无論多短)內是匀速的，则平均速度 $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$，当 t 充分接近于 t_0 时，显然将等于这匀速部分的速度 C，从而将有：

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=C。$$

另一方面，即使在包含 t_0 的任一段时間內，运动都不匀速，极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 仍可能存在。例如当运动在时刻 t_0 附近的快慢变化不很剧烈时，便可能产生这种情况。这时在 t_0 前后所取的一段时間 (t, t_0) 或 (t_0, t) 愈是来得短，那么，运动在这段时間內的平均速度出入也就愈小——愈是接近于某一定值，因此，在过 t_0 的这一瞬間，几乎可以把这运动当做是有一定速度的匀速运动看待。上述落体运动 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 便是很好的这种例子，

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g\lim_{t\to t_0}(t+t_0)=gt_0$$

由于以上分析的启发，我們不妨在 $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 存在的情形下，就将这极限作为运动 $S=f(t)$ 在时刻 t_0 的速度之定义，这便是所謂"瞬时速度"。有了它，我們对于运动在某一时刻的快慢便有了一个合理的精确标誌。

§2 可导性及导数的定义 我們看到无論是切綫問題也好，速度問題也好，除了变数意义或表示有所不同而外，最后都归結到一种 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 型的极限。这种极限在其他自然科学的領域以及

广大的生产实际也到处可以碰到。我們目前的任务就是要純粹从数学观点出发，对一般函数来討論这种极限。这样做不只是所得結果可应用到自然科学各领域以及生产实际收一劳永逸之功，而且同时也推动了数学本身的发展。我們首先引入下面的定义：

定义 設 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，如果

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

存在，且有限，那么，就称函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，而称这极限的値为 $f(x)$ 在 x_0 的导数，并用 $f'(x_0)$ 或 $[f(x)]'_{x=x_0}$ 来表示它*。

例如：对于 $f(x)=x^2$，有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

于此 x_0 为任一实数。按照定义，就可說函数 x^2 在 x_0 可导，其导数为 $2x_0$，写作 $f(x)=x^2$，$f'(x_0)=2x_0$ 或干脆 $[x^2]'_{x=x_0}=2x_0$，特别是 $[x^2]'_{x=5}=10$，$[x^2]'_{x=-7}=-14$，等等。

在上面定义中出現的商，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 称为微差商（它的值决定于 x_0 及 x，只要 x_0，x 属于 $f(x)$ 的定义域而 $x \neq x_0$，特别是当 x_0 选定之后，是 x 的函数）。它还可写作

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},\ \text{或}\ \frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \text{等不同形式；}$$

于此 Δx 表示自变量从 x_0 变到 x 的增量，即 $x-x_0=\Delta x$；而 $\Delta f(x)$ 或 Δy 則表示函数 $y=f(x)$ 的相应增量，即

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x)=\Delta y,$$

因此作为微差商的极限的导数，其定义式除(1)外，还可写成

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\ \text{或}\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{等不同形式。}$$

---

* 当然，自变数不限于是用 x 来表示的，例如对于 u 的函数 $g(u)$ 来說，如果 $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}$ 存在且有限則同样称 $g(u)$ 在 u_0 可导，而記其导数为 $g'(u_0)$ 或 $[g(u)]'_{u=u_0}$。

于此微差商当然是作为 Δx 的函数来看待的。

导数的定义既如上述，那么，通俗的説，它究竟意味着什么呢？很明显，微差商，$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ 乃是表示在 x 从 x_0 变动到 x_1 这一过程中，平均分配在 x 的每一单位增量上的 $f(x)$ 的增量，它可理解为在这間 (x_0,x_1) 上 $f(x)$ 的平均变动率，从而极限(1)就可理解为在 $x=x_0$ 这一点的 $f(x)$ 的局部变动率(参照前节速度問題)。

这样，在 x 表示时間，$f(x)$ 表示路程的情形下，导数就表現为瞬时速度——这也就是导数的**力学解釋**；同样，在 x 表示曲綫上一点的横坐标，$f(x)$ 表示縱坐标的情形下，导数就表現为斜率——这也就是导数的**几何解釋**。由此我們不仅可以更直观的理解导数概念，也可以体会出它的普遍性了。

附带再談一下，什么叫做函数在一点的左(右)导数(統称片側导数)？那就是指微差商的有限左(右)极限

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad\left(\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

或
$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\qquad\left(\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

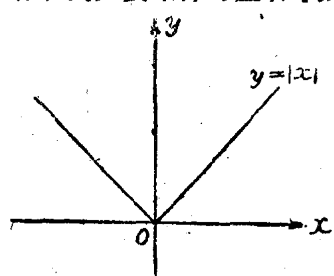
我們記为 $f'_-(x_0)\,[f'_+(x_0)]$，当然，这时 x_0 本身以及在其左(右)边而充分接近于 x_0 的点必須属于 $f(x)$ 的定义域，在閉区間的端点当然只能考虑片側导数，如果它存在，便也称 $f(x)$ 在这端点为可导。根据极限与片側极限的关系，馬上可得 $f'(x_0)$ 存在的充要条件为左右导数存在而相等：$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$。

試以 $f(x)=|x|$ 为例，

在 $x=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}=1$

而 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}=-1$

故函数 $|x|$ 在 $x=0$ 左右导数都存在，而导数却不存在(卽不可导)。(图 3)



(图 3)

最后，如果函数 $f(x)$ 在它所定义的区間內(或上)的每一点都可导，我們就称 $f(x)$ 在区間內(或上)为可导。这时 $f(x)$ 在区間內(或上)的每点 x 都有导数，旣如此，則其导数之値必随 x 之値而确定，这样，$f(x)$ 的导数就构成了这区間內(或上)一个新的 x 的函数，我們称它为 $f(x)$ 的导函数，并用 $f'(x)$ 或 $[f(x)]'$ 来表示它。

例如結合前面 $f(x)=x^2$ 的例子，就可說：x^2 的导函数为 $2x$，或 $[x^2]'=2x$。換言之，只須将那里特殊化了的 x_0 換成一般的 x 就行了。

按照导数的定义式，将 x_0 換成 x，立刻得到导函数的定义式*

$$f'(x)\equiv\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\equiv\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad (2)$$

于此，出現在极限式子里的 x 在极限运算中是作为固定点(也就是暫时当作常数的所謂参数)看待的，尽管它可以是可导区間內的任何一点。下面我們便将利用(2)来求若干具体函数的导函数。

I．$f(x)=c$，c 为常数

$$\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\frac{c-c}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}0=0 \qquad \text{即 } [c]'=0$$

由此知任何常数的导函数恒等于0。

II．$f(x)=ax+b$，a,b 为常数

$$\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\frac{(a\xi+b)-(+axb)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}a=a$$

即

$$[ax+b]'=a。$$

III．$f(x)=x^n$，n 为正整数。

由第二章§9 II．中的例子(只須将那里的 x 写成 ξ，a 写成 x)得

* 要将 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 中的 x_0 換成 x，自然同时須将式中的 x 換成旁的字母，注意凡出現于极限式中的变数而要对它取极限的可任随用一个字母去标記它都无不可，只要不和出現在同一式中标記常数或参数的其他字母相重复。

$$\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=nx^{n-1}$$

即

$$[x^n]'=nx^{n-1};$$

IV. $f(x)=\sin x$

这时 $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

故 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$=1\cdot\cos x,$$

即

$$[\sin x]'=\cos x。$$

用同样方法可得 $[\cos x]'=-\sin x$

〔注意〕 如果我們不是采用弧度而是采用角度的話，那么我們将得到: $[\sin x]'=\frac{\pi}{180}\cos x$, $[\cos x]'=\frac{-\pi}{180}\sin x$,

(因为这时 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}$ 而 $\neq 1$)，比較之下，便知采用弧度結果之簡洁——这也就是在高等数学中乐于采用弧度的理由。

V. $f(x)=\log_b x \quad (x>0)$。

这时 $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log_b(x+\Delta x)-\log_b x}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

故 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$，由于对数函数的

連續性$=\frac{1}{x}\log_b\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_b e$, 即 $[\log_b x]'=\frac{\log_b e}{x}$。

如果我們采用 e 作为对数底 b, 則由于 $\log_e e=1$, 我們便得着特别簡洁的結果: $[\ln x]'=\frac{1}{x}$, 这也就是高等数学乐于采用自然对数的理由。

§3 可导性与連續性 在前节可导性及导数的定义中我們并沒有假定函数的連續性,但其实只有当連續时才說得上可导。

定理 **一个函数如果在某点可导, 則它在这一点一定連續——换言之,連續性是可导性的必要条件。**

〔証〕 設 $f(x)$ 在 x_0 可导, 对于 $x\neq x_0$,

等式 $$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$ 总成立,

当 $x\to x_0$ 时, 上式右边$\to 0$ 这是因为右边第一因式趋于有限极限的緣故, 从而左边亦$\to 0$, 这就意味着 $f(x)$ 在 x_0 的連續性。

由此可知一个函数在它的不連續点一定不可导, 例如 $D(x)$ 处处均不連續, 从而知其处处均不可导。

另一方面, 一个函数如果在某点連續, 它在这点是否一定可导呢? 不是的! 前节講过, $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导, 但該函数在 $x=0$ 显然是連續的。一般而論, 凡其图形作折綫的連續函数(如图4), 在所有对应于折綫頂点的那些 x, 都是不可导的, 因为在这些点, 正如 $|x|$ 在 $x=0$ 一样, 左右导数虽存在, 但并不相等。这例子說明連續性仅仅是可导性的必要条件, 并不是充分条件, 进一步分析, 函数在一点連續而不可导的情形, 除了左右导数存在而不相等的以外, 还有左右导数中一个或两个根本就不存在的。

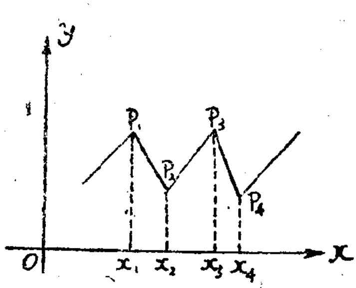


图4

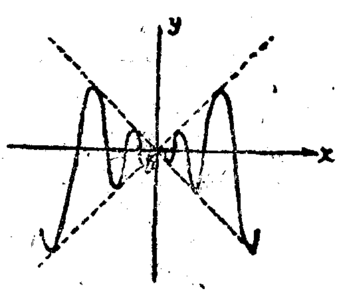
观下面各例便知。

例 1. $$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$ *

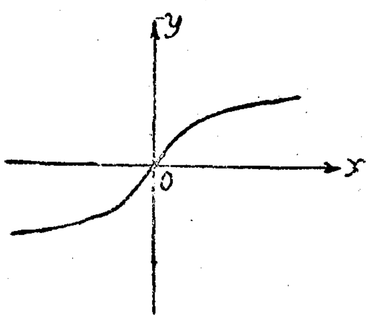
这函数在 $x=0$ 是連續的，这是因为一方面，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 为无穷小量与有界量之积，从而有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，另一方面又有 $f(0)=0$ 的緣故，但当 $\Delta x\neq 0$ 时，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

而在第二章§8里我們已經看到当 $\Delta x\to 0$ 时它的片側极限不存在，由此知 $f(x)$ 的左右导数均不存在。(图 5)



(图 5)



(图 6)

例 2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$。

这函数在 $x=0$ 显然是連續的，但

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2},$$

* $f(0)=0$ 不能从 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 式中，令 $x=0$ 而获得。理由是 $0\cdot\sin\frac{1}{0}$ 无意义——0 不能做除数。因此必须另行給出。

从而 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty。$$

此非有限极限，按照我們的定义，仍应当作它在 $x=0$ 是不可导的。(图 6)

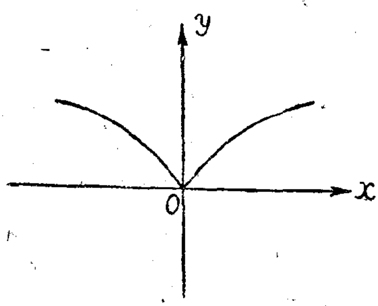
例 3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$。

这函数在 $x=0$ 显然也是連續的，但

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}},$$

从而 $$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty.$$

可見这函数在 $x=0$ 不可导。(图 7)



(图 7)

注意最后两例中的函数，其图形在原点虽然也有切綫，可是它們都垂直于 x 軸，因而和一般正常的情形有所不同。

綜上所述，我們可以很明显的看出，可导性是包括連續性而比連續性要求高得多的一种函数性質。

§4 求导法則 由于导数是作为一种极限而定义的，故求导法——从一个函数求它的导数或导函数的运算，实質上不外乎是一种极限运算。

对于一些簡单的函数(例如 x^n, $\sin x$)这极限比較容易求出，因此直接从导数定义出发就不难求出它們的导数，从而也肯定了它們的可导性。可是对于构造比較复杂的函数，它們是否可导以及导数为何，如果也要一一从定义出发来研究，勢将不胜其煩。因此，在求导时，我們除非不得已才訴之于定义而外，总是尽量設法利用已知結果来推出新的結果。換言之，也就是将較复杂函数的求导法归結到較簡单函数的求导法，这样，上面諸定理就成为求导法的重要工具。

定理 1. 設 n 个函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 都在 x_0 可导,则函数 $F(x) \equiv C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} C_if_i(x)$, 于此 C_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 个常数,也在 x_0 可导, 且

$$F'(x_0)=C_1f'_1(x_0)+C_2f'_2(x_0)+\cdots+C_nf'_n(x_0)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu f'_\nu(x_0)$$

[証] 对于 $x \neq x_0$ 有 $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\sum\limits_{\nu=1}^{n} C_\nu \cdot \dfrac{f_\nu(x)-f_\nu(x_0)}{x-x_0}$。应用极限定理并注意各 $f_\nu(x)$ 在 x_0 可导之假設,便知当 $x \to x_0$ 时, 上式右边极限存在, 且等于 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} C_\nu f'_\nu(x_0)$, 从而左边极限也存在而等于这同一值。

系: 設 $f(x)$ 在 x_0 可导,則 $Cf(x)$ 在 x_0 也可导而 $[Cf(x)]'_{x=x_0}=Cf'(x_0)$, 又設 $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 可导, 則 $f(x)+g(x)$ 及 $f(x)-g(x)$ 在 x_0 也可导而 $[f(x)\pm g(x)]'_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$。

例 1. 在定理 1 中置 $f_\nu(x)=x^\nu$ 并注意 $[x^\nu]'\nu x^{\nu-1}$, 立知多項式 $\sum\limits_{\nu=0}^{n} C_\nu x^\nu$ 到处可导. 且 $\left[\sum\limits_{\nu=0}^{n} C_\nu x^\nu\right]'=\sum\limits_{\nu=0}^{n} \nu C_\nu x^{\nu-1}$。故多項式之导函数仍为多項式,但次数减一。

定理 2. 設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 x_0 可导, 則

1° $F(x) \equiv f(x)\cdot g(x)$ 也在 x_0 可导,且

$$F'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

2° 在 $g(x_0) \neq 0$ 之附加假設下, $\Phi(x) \equiv \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也在 x_0 可导, 且

$$\Phi'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

[証] 关于 1°, $x \neq x_0$ 时有

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

应用极限定理，并注意$f(x)$，$g(x)$在x_0可导之假設及$g(x)$在x_0之連續性（前节定理），便知当$x\to x_0$时，上式右端极限存在，且等于$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$，从而左端极限也存在而等于这个值。

关于2°，$x\neq x_0$时有

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right]$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$

注意当x充分逼近于x_0时自有$g(x)\neq 0$，然后和上面一样应用极限定理即得証。

系1. 設$n(\geqslant 2)$个函数$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$都在x_0可导，則其积$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，…，$f_n(x)$，也在x_0可导，且

$$F'(x_0)=f'_1(x_0)f_2(x_0)\cdots f_n(x_0)+f_1(x_0)f'_2(x_0)f_3(x_0)\cdots f_n(x_0)$$
$$+\cdots+f_1(x_0)f_2(x_0)\cdots f_{n-1}(x_0)f'_n(x_0)。$$

（証：用数学归納法）。

系2. 設$g(x)$在x_0可导，且$g(x_0)\neq 0$，則$\Phi(x)=\dfrac{1}{g(x)}$也在x_0可导，且$\Phi'(x_0)=-\dfrac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$。

例2. 在系1中置$f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)=f(x)$，便知当$f'(x_0)$存在时，有$\{[f(x)]^n\}'_{x=x_0}=n[f(x_0)]^{n-1}f'(x_0)$。

再利用系2，便知此結果即使在n为負整数时也成立，只要$f'(x_0)\neq 0$，特别置$f(x)=x$，便知公式$[x^n]'=nx^{n-1}$即使在n为負整数时也成立，只要$x\neq 0$。

例3. 当$x\neq\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$（$n$为任何整数）时，$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，因此时分母$\neq 0$，由定理有