数学基础知识丛书

数列与极限

周伯壎

江苏人民出版社

内　容　提　要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书分数列、级数、连分数三个部分，第一部分详细严格地介绍了数列概念及其极限的基本理论，第二、三部分是这一基本理论的直接应用。

数列与极限
周伯壎
*
江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
南通县印刷厂印刷
1978年12月第1版
1978年12月第1次印刷
印数：1—250,000
书号：13100·018　定价：0.35元

目　　录

一、数　列

极限理论是高等数学的基础。在微积分学中，无穷细分与无穷累积的理论及其运算法则都是建立在极限的理论基础上的。不但如此，在近代数学的各分支中，如代数学，几何学，函数论，数论，概率论，统计学等等，极限的理论都是经常用到的，因而也是非常重要的。不掌握极限的理论，是无法学好高等数学的。

§1　圆周率π是怎样求得的

我国劳动人民在几千年以前就已经知道，任何圆的圆周之长与其直径之比总是一个常数，不随圆的大小不同而改变，这个比值叫做圆周率，现在我们常以一个希腊字母π来代表它，在取两位小数时，$\pi=3.14$，而在取四位小数时，$\pi=3.1416$，有时又取$\pi=\frac{22}{7}$.祖冲之在一千五百年前已经算出π约等于$\frac{355}{113}$，这是π的一个准确到第六位小数的近似值（见第三部分§20），比外国人早一千年左右。这些数都是π的近似值，而不是它的准确值，因为π是一个无理数，它是一个不能用分数（当然也不能用有限小数或者无限循环小数）来表达的实数。那么，π的近似值是怎样求出来的呢？

我们从实践中知道，圆的任一内接多边形的周长小于这个圆的圆周之长，而圆的任一外切多边形的周长大于这个圆

的圆周之长。取一个以1为半径的圆，这样的圆通常叫做单位圆。由圆周率的定义知，单位圆的圆周之长为2π，作单位圆的内接正6边形P_1，设其周长为a_1。又作一个外切正6边形Q_1，设其周长为b_1，现在来求a_1与b_1。

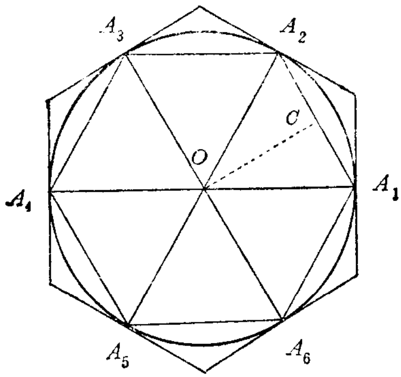

图 1

设P_1的6个顶点为A_1，A_2，A_3，A_4，A_5与A_6，自圆心O作OA_1，OA_2，OA_3，OA_4，OA_5，OA_6，这样就把P_1等分成6个全等的三角形：$\triangle OA_1A_2$，$\triangle OA_2A_3$，…，$\triangle OA_6A_1$（图1）。于是$a_1=6\cdot A_1A_2$。作OC垂直弦A_1A_2，

则$\angle COA_2=30°$，$A_1A_2=2CA_2$，所以

$a_1=6A_1A_2=12CA_2=12\cdot sin30°=6$.

同样可得　$b_1=12tg30°$

$=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$，准确到三位小数，得$b_1=6.928$.

我们初步找到了π的一个范围

$6<2\pi<6.929$。(1)

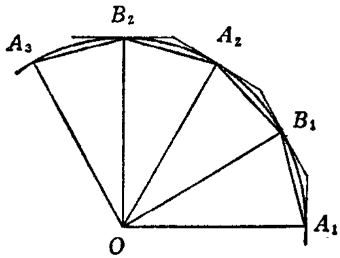

图 2

作$\angle A_1OA_2$，$\angle A_2OA_3$，…，$\angle A_6OA_1$这六个圆心角的分角线，并与圆周相交，得OB_1，OB_2，…，

OB_6(图2)，顺次连接A_1B_1，B_1A_2，A_2B_2，B_2A_3，…，B_6A_1，我们就得到单位圆的一个内接正12边形P_2，设其周长为a_2。过A_1，B_1，A_2，B_2，…，A_6，B_6作切线可得这个圆的一个外切正12边形Q_2，设其周长为b_2(图2)。

因为$\angle A_1OB_1 = 30°$，$A_1B_1 = 2sin\frac{30°}{2}$所以

$$a_2 = 12\cdot A_1B_1 = 24sin15°.$$

同样地，$$b_2 = 12\cdot 2tg15° = 24tg15°.$$

由半角公式 $$sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-sin^2\theta}}{2}},$$

与 $$tg\frac{\theta}{2} = \frac{1-cos\theta}{sin\theta} = \frac{1-\sqrt{1-sin^2\theta}}{sin\theta}, \qquad (2)$$

可以算出 $$sin15° = sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$tg15° = tg\frac{30°}{2} = \frac{1-cos30°}{sin30°} = 2-\sqrt{3},$$

于是$a_2 = 6.212$，$b_2 = 6.431$(准确到三位小数)，我们得到2π的一个较小的范围 $$6.212 < 2\pi < 6.432 \qquad (3)$$

又同样地作圆的内接正24边形与外切正24边形，它们的周长分别表以a_3与b_3，则由半角公式(2)可以算出

$$a_3 = 24\cdot 2sin\frac{15°}{2} = 6.265,$$

$$b_3 = 24\cdot 2tg\frac{15°}{2} = 6.319.$$

因此 $$6.265 < 2\pi < 6.320. \qquad (4)$$

继续如此作单位圆的内接与外切正48边形，正96边形，正192边形，…，它们的周长依次为

a_4，b_4；a_5，b_5；a_6，b_6；…。 于是

$$a_4 = 48 \cdot 2\sin\frac{7.5^\circ}{2} = 6 \cdot 2^4 \sin\frac{60^\circ}{2^4},$$

$$b_4 = 48 \cdot 2\,tg\frac{7.5^\circ}{2} = 6 \cdot 2^4 tg\frac{60^\circ}{2^4};$$

$$a_5 = 96 \cdot 2\sin\frac{60^\circ}{2^5} = 6 \cdot 2^5 \sin\frac{60^\circ}{2^5},$$

$$b_5 = 96 \cdot 2\,tg\frac{60^\circ}{2^5} = 6 \cdot 2^5 tg\frac{60^\circ}{2^5}; \qquad (5)$$

$$a_6 = 192 \cdot 2\sin\frac{60^\circ}{2^6} = 6 \cdot 2^6 \sin\frac{60^\circ}{2^6},$$

$$b_6 = 192 \cdot 2\,tg\frac{60^\circ}{2^6} = 6 \cdot 2^6 tg\frac{60^\circ}{2^6}.$$

一般地，对于任何正整数n,我们都可以作出单位圆的内接正 $3 \cdot 2^n$ 边形与外切正 $3 \cdot 2^n$ 边形($3 \cdot 2^1 = 6$，$3 \cdot 2^2 = 12$，$3 \cdot 2^3 = 24$，$3 \cdot 2^4 = 48$，$3 \cdot 2^5 = 96$，$3 \cdot 2^6 = 192 \cdots$)，它们的周长分别为

$$a_n = 6 \cdot 2^n \sin\frac{60^\circ}{2^n},$$

与 $$b_n = 6 \cdot 2^n tg\frac{60^\circ}{2^n}. \qquad (6)$$

这里的$\sin\frac{60^\circ}{2^n}$与$tg\frac{60^\circ}{2^n}$都可以用半角公式(2)以及开平方法逐个地算出，只要有足够的计算工具，需要准确到几位小数，就能准确到几位小数，无需查三角函数表。例如，在已知$\sin\frac{60^\circ}{2^{k-1}}$的值以后，由(2)即得

$$\sin\frac{60^\circ}{2^k} = \sin\frac{1}{2}\,\frac{60^\circ}{2^{k-1}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{60^\circ}{2^{k-1}}}}{2}},$$

$$tg\frac{60^\circ}{2^k}=\frac{1-\sqrt{1-\sin\frac{60^\circ}{2^{k-1}}}}{\sin\frac{60^\circ}{2^{k-1}}}.$$

所以，在已知a_1与b_1后可算出a_2，b_2；在知道a_2的值以后可得到a_3与b_3；依此类推，即可求出任何a_n与b_n。这样，我们就得到一系列的数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\cdots, \tag{7}$$

与 $$b_1,\ b_2,\ b_3\cdots,\ b_n,\ \cdots. \tag{8}$$

这里的(7)与(8)中，都有无穷多个数（“无穷多个数”是指“要多少个数就能写出多少个数”的意思），而且每一个数都是标上号码的，(7)中第一个数是a_1，第二个数是a_2，第三个数是a_3；等等。(8)也是这样。

当n变大时，a_n随之而变大，虽然它始终要小于2π（圆的内接多边形的周长小于圆周之长），但却可以无限制地接近2π；而在另一方面，b_n却越变越小，虽然始终大于2π（外切多边形的周长大于圆周之长），但也可以无限制地接近2π。为了更具体地说明这一点，我们来计算b_n-a_n，看看这些差数有什么规律。

设$n\geq 2$。由a_n与b_n的定义与三角恒等式，有

$$\begin{aligned}b_n-a_n&=6\cdot 2^n\left(tg\frac{60^\circ}{2^n}-\sin\frac{60^\circ}{2^n}\right)\\&=6\cdot 2^n\cdot\sin\frac{60^\circ}{2^n}\cdot\frac{1-\cos\frac{60^\circ}{2^n}}{\cos\frac{60^\circ}{2^n}}\\&=6\cdot 2^n\sin\frac{60^\circ}{2^n}\cdot\frac{2\sin^2\frac{60^\circ}{2^{n+1}}}{\cos\frac{60^\circ}{2^n}}\end{aligned} \tag{9}$$

因为$n\geq 2$，故$\frac{60^\circ}{2^n}\leq 15^\circ$，$\cos\frac{60^\circ}{2^n}\geq\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$，

又因为圆上的弦小于其所对的弧，

$$\therefore\quad \sin\frac{60^\circ}{2^n}<\frac{2\pi}{360^\circ}\cdot\frac{60}{2^n}=\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$$

$$\sin\frac{60}{2^{n+1}}<\frac{2\pi}{360}\cdot\frac{60}{2^{n+1}}=\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}$$

（单位圆周长$=2\pi$，所以圆心角为$\frac{60^\circ}{2^n}$时，其所对的弧长为$\frac{2\pi}{360}\cdot\frac{60}{2^n}$），代入（9）式，即得

$$b_n-a_n=6\cdot 2^n\sin\frac{60^\circ}{2^n}\cdot\frac{2\sin^2\frac{60^\circ}{2^{n+1}}}{\cos\frac{60^\circ}{2^n}}$$

$$<6\cdot 2^n\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\cdot\frac{2\frac{\pi^2}{3^2\cdot 2^{2n+2}}}{\cos 15^\circ}$$

$$=2\pi\cdot\frac{4\pi^2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot 3^2\cdot 4}\cdot\frac{1}{4^n}$$

$$=\frac{\pi^3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot 18}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}.$$

在（4）式中已经知道了$\pi<3.16$，所以

$$\frac{\pi^3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot 18}<\frac{3.16^3}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot 18}<1,$$

因此，对于任何$n=2$，3，4，…，都恒有

$$0<b_n-a_n<\frac{1}{4^{n-1}}.$$

再由 $\qquad a_n<2\pi<b_n$，

即知
$$0<2\pi-a_n<b_n-a_n<\frac{1}{4^{n-1}},$$
$$0<b_n-2\pi<b_n-a_n<\frac{1}{4^{n-1}}. \tag{10}$$

不等式(10)说明了两件事：

（1）当n变化时，$\frac{1}{4^{n-1}}$随之而变，它们的关系可列成下表（$n>3$时，$\frac{1}{4^{n-1}}$的值为四位有效数字的近似值）。

n	1	2	3	10	100	1000
$\frac{1}{4^{n-1}}$	1	0.2500	6.250×10^{-2}	3.815×10^{-6}	2.489×10^{-60}	3.484×10^{-602}

从表中看到，当n变大时，$\frac{1}{4^{n-1}}$却变小，$n=10$时，$\frac{1}{4^{n-1}}=3.815\times10^{-6}$；$n=100$时，$\frac{1}{4^{n-1}}=2.489\times10^{-60}$；当$n=1000$时，$\frac{1}{4^{n-1}}=3.484\times10^{-602}$；…；而当$n$无止尽地变大时，$\frac{1}{4^{n-1}}$却无止尽地趋向于0．“无止尽地变大”是指“要多么大就可以变成多么大”，而“无止尽地趋向于0”是指“要多么靠近0就能够多么靠近0，但永远不等于0”的意思。因此，从(10)知，随着n的无限制地变大，a_n与b_n就可以无限制地互相靠拢。由于2π始终是夹在a_n与b_n之间，尽管不论n多大，a_n与b_n都不能等于2π，但却可以无限制地靠近2π。这时，我们说，当n无限制地增大时，a_n与b_n都无限制地趋向于2π。所以，我们可以把a_n与b_n（不论n等于多少）都看成2π的近似值。

（2） 在用近似方法来求一个量的近似值时，必须要有

把握地知道所求得的近似值最多能有多大的误差，这样才能保证近似值的可靠性。公式(10)就起了这样的作用。如果以a_n来表示2π的近似值的话(n为任意正整数)，其误差应该是$|a_n-2\pi|$. 由公式(10)知道，它一定小于$\frac{1}{4^{n-1}}$. 例如，从上列的表中可以看出，若以a_3（它是单位圆内接正24边形的周长)来近似表达单位圆的周长时，其误差将小于6.25×10^{-2}；若以a_{10}(圆内接正3072边形的边长)来表示2π的近似值时，其误差将小于3.815×10^{-6}；若以a_{100}(内接正$3\cdot2^{100}$边形的周长）来表示2π的近似值时，其误差将小于2.489×10^{-60}。

同样，在以b_n来表示2π的近似值时，其误差也是这样。这里所计算的误差限$\frac{1}{4^{n-1}}$是比较宽的，实际误差要小于这个值。

在求近似值时，一般都是先要提出对近似值的要求。例如，要求准确到三位小数，或者要求误差不超过$\frac{1}{10000}$，等等。针对这样的要求，我们就要确定，作到第几步以后，就保证能够满足需要。公式(10)也能帮助我们来解决这个问题。例如，若要求误差不超过$\frac{1}{10000}$，那么，我们只要求到一个n，使$\frac{1}{4^{n-1}}<\frac{1}{10000}$就行了，这时的$a_n$与$b_n$就必都能满足要求，因为必有$|a_n-2\pi|<\frac{1}{10000}$，与$|b_n-2\pi|<\frac{1}{10000}$。解出不等式$\frac{1}{4^{n-1}}\leq\frac{1}{10000}$，得$n\geq\frac{lg10000}{lg4}+1\approx7.7$。由于$n$只能是自然数，所以当$n\geq8$时，以所得的$a_n$与$b_n$来作$2\pi$的近似值时，误差一定小于$\frac{1}{10000}$。

这样我们可以推广到一般。如果要求不超过某一个正数ε，不管这个ε多么小，只要取n，使 $\frac{1}{4^{n-1}}<\varepsilon$

即
$$n>\frac{lg\frac{1}{\varepsilon}}{lg4}+1. \qquad (11)$$

就能保证，在以a_n或b_n来近似表达2π时，其误差$|a_n-2\pi|$与$|b_n-2\pi|$都肯定小于ε。我们把这种由(11)式所表达的关系列成下表：

误差限 ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
所需的 n	3	5	6	8	10

由于ε是可以任意指定的，所以，用上述的方法求2π(因而也是求π)的近似值时，可以达到任意要求的准确度，只要有足够的计算工具就行了。

应该说明，运用微积分学的工具，可以有较简便的求π的近似值的方法。那些方法虽然也是"逐次逼近"的，但逼近得较快，计算也较简单。

§2 数列的概念

在数学中所研究的数量，除了不变的常量以外，还有变量，它们在所研究的问题中，随着情况、条件的改变而会变化。例如，在一质点的匀速运动中，其速度为v，则该质点第1秒钟内所走过的路程为v，2秒钟内所走过的路程为$2v$，3秒钟内所走过的路程为$3v$，…，n秒钟内所走过的路程就应是nv。因此，该质点所走过的路程s就是一个变量，它随着时间t的改变而变化。如果让$s_1=v$，$s_2=2v$，$s_3=3v$，…，一般

地，对于任何正整数n，让$s_n = nv$（n秒钟内所走过的路程）那么，这些s_1，s_2，…，s_n，…，就可以依次排成一列：

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots.$$

又例如，单位圆的内接正多边形的周长a_n是一个变量，它随着边数的改变而变化。在§1中，我们为了求2π的近似值而求到了内接正6边形的周长为$a_1 = 12 sin\frac{60^\circ}{2}$；作半径将此正6边形的六个中心角一分为二，连接圆周上的点就得到一个正12边形，其周长$a_2 = 24 sin\frac{60^\circ}{2^2}$；再一分为二，又得到内接正24边形的周长为$a_3 = 6\cdot 2^3 sin\frac{60^\circ}{2^3}$；…，依此类推，则内接正$3\cdot 2^n$边形的周长$a_n$就是$6\cdot 2^n sin\frac{60^\circ}{2^n}$。对应于边数的改变，（我们只考虑边数为6，12，24，48…，$3\cdot 2^n$，…等等）内接多边形的周长就依次为　　a_1，a_2，a_3，…，a_n，…。

如果一个变量x（我们不管这个x的具体意义是什么，它可以是匀速运动中的路程，也可以是单位圆内接正多边形的周长，也可以是其它的变量）按阶段变化，在第1阶段，它变成c_1；在第2阶段，它变成c_2；在第3阶段，它变成c_3；…，在第n阶段，它变成c_n。那么，我们把这些c_1，c_2，…，c_n，…，依次排成一排，如下式

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\cdots,c_n,\ \cdots \tag{1}$$

这就叫做一个**数列**。　数列应看成一个变量x在按阶段变化时，其变化的过程，c_1为x在第一阶段所取的值，c_2为x在第二阶段所取的值，…，c_n为x在第n阶段所取的值。　因此，数列(1)的排列是有次序的，换一个次序，例如数列

$$c_2,\ c_1,\ c_3,\cdots,c_n,\ \cdots \tag{2}$$

应该看成与数列(1)不同的另一数列，因为数列(2)表示另一变量y，它在第一阶段所取的值为c_2，第2阶段所取的值为c_1，与数列(1)的变量x不相同。 所以数列又叫数的序列。

数列(1)中的c_1(排在第1位)叫做数列的首项，c_2(排在第2位)叫做第2项，c_3叫做第3项，…，c_n叫做第n项. 由于n可为任何正整数，所以c_n又叫做通项,因而数列(1)常以记号$\{c_n\}$来表示。注意，这里的项与初中代数中多项式的项是不同的。例如，数列

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ \cdots,1+\frac{1}{n},\ \cdots$$

中，1是第1项，$1+\frac{1}{2}$是第2项，$1+\frac{1}{3}$是第3项,…，$1+\frac{1}{n}$是第n项,在初中代数里把$1+\frac{1}{n}$看成多项式的两项，而在这个数列中,$1+\frac{1}{n}$它只表现为变量x在第n阶段所取的值，因此它只是数列中的一项,即第n项。

如果数列(1)一共只有N项,N是某一个正整数,即,相应的变量x在变化时只分成N个阶段，这时数列(1)就叫做一个**有限数列**。但是，有时变量x在变化时却可分成无穷多个阶段，也就是，它永远在变化，没有终止之时。例如，§1中所考虑的内接正多边形的周长a_n，它先是代表内接正6边形的周长，其后变成正12边形的周长，再后变成正24边形的周长，正48边形,正96边形，…，永不终止。于是,表达变量x在各个阶段所取的值c_1，c_2，c_3，…，也就不会有最后一个，也就是，数列(1)中有无穷多项。 这时，我们称数列(1)为一个**无穷数列**。

数列$\{c_n\}$的通项c_n应是正整数n的函数，因为当

$n=1$时，c_n就是c_1，$n=2$时，c_n就是c_2，$n=3$时，c_n为c_3，即，c_n随着n的值而定。在这个函数的表达式知道以后，那么，在以n为任一具体的正整数值代入后，即可算出这一项的数值。例如，数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots \qquad (3)$$

的通项的表达式为$\frac{1}{n}$，因此，数列(3)的第5项就是$\frac{1}{5}$；第10项是$\frac{1}{10}$；第100项是$\frac{1}{100}$；第10000项是$\frac{1}{10000}$。 又例如数列

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}n,\ \cdots \qquad (4)$$

的通项是$(-1)^{n-1}n$，所以其第1000项应是

$(-1)^{1000-1}\cdot 1000=-1000$；第405项应是405. §1中所求的$b_n=6\cdot 2^n tg\frac{60}{2^n}$，则$b_5=6\cdot 2^5 tg\frac{60^\circ}{2^5}$；$b_{12}=6\cdot 2^{12}tg\frac{60^\circ}{2^{12}}$。由此可见，一个数列的通项的表达式是非常重要的，只有知道这个表达式以后，才能具体表达并研究这个数列。

§3　无穷数列的极限

我们在§2中看到，当一个变量x分阶段永远在变，那么，它在各个阶段所取的数值就依次可排成一个无穷数列

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\cdots,\ c_n,\cdots.$$

一个变量的变化过程虽然是错综复杂的，但也往往有其一定的规律。

例1　求数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots\text{的极限。}$$

解　这个数列的通项是$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$．从直观即可看出，通项的绝对值$\frac{1}{n}$随着n的增大而无止尽地变小．$n=1$时；$\frac{1}{n}=1$；$n=10$时，$\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$；…，$n=10000$时，$\frac{1}{n}=\frac{1}{10000}$；…；当$n$无限增大时，$\frac{1}{n}$无限制地趋近于0，但永远不会等于0．这时我们说，在n趋向于无穷大时，此数列的极限是0，或者$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的极限等于0，记成$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$．

这里的lim是拉丁文$limit$一字的缩写，它的意思是极限．记号$n\to\infty$，读成n趋于无穷大，它的意思是n无限制地增大．

例 2　求数列

$$1，\frac{3}{2}，\frac{1}{3}，\frac{3}{4}，\frac{1}{5}，\frac{3}{6}，\cdots，\frac{2+(-1)^n}{n}，\cdots的极限．$$

解　这个数列的通项是$\frac{2+(-1)^n}{n}$，它是一个分数，当n为奇数时，分子为1，当n为偶数时分子为3，而分母为n，当n趋于无穷大时，不论是$\frac{3}{n}$或是$\frac{1}{n}$都趋向于0，所以此数列的极限也是0．记成$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0$．

一个数列的极限为0，并不意味着后一项一定比前一项更靠近0，而是指总的趋向为0．以$\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\}$为例，其第99项为$\frac{1}{99}$，反而比第100项$\frac{3}{100}$更小，更靠近0．但是，这个数列的各项总的趋向仍然是以0为极限．

以0为极限的数列叫做**无穷小量**．无穷小量并不是一个

量，无穷小也不是一个数，而是一个变量的变化趋向。如果一个变量x无限制地趋近于0，那么，这个变量就是一个无穷小量。

现在再看另一种类型的数列。

例3　求数列

3，$\frac{3}{2}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{7}{4}$，…，$2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，…的极限。

解　这个数列的通项$2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$是两个数之和，一个是2，它是一个不变的常数，另一个是$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，而$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$是一个无穷小量。因此，在$n\to\infty$时，由于$\frac{(-1)^{n-1}}{n}$趋近于0，而$2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$无限制地趋近于2。这时，我们说，数列(2)的极限是2，记成

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=2.$$

一般地，设

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\cdots,\ c_n,\cdots, \tag{1}$$

为任一数列，如果其通项$c_n=c+\alpha_n$，c是一个不随n的改变而改变的常数，$\{\alpha_n\}$是一个无穷小量，那么，当n无限制增大时，由于α_n无限制地趋于0，而c_n可无限制地趋于c。这时，我们说，(1)的极限为c，记成

$$\lim_{n\to\infty}c_n=c.$$

例4　求数列

$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，…，$\frac{2^n-1}{2^n}$，…的极限。