高 級 中 學

立體幾何課本

書號：2076

高級中學立體幾何課本 全一册

編著：	劉　薰　宇
出版者：	人民教育出版社
印刷者：	（見正文最後頁）
發行者：	新華書店

15,601—25,600
定價 2,800 元

1951年5月原版
1951年9月第一次修訂原版
1952年4月上海6版

編輯大意

1. 編者曾經得到機會參加中央人民政府教育部召開的普通中學課程標準討論會的數學組. 雖然小組的討論並沒有作出什麼決定, 但在討論過程中得到不少可寶貴的意見. 因此, 本書的編寫就依照教育部的課程精簡綱要而參酌一些在討論會中所得到的啓示.

2. 本書除參照蘇聯十年制中學用的 A. П. КИСЕЛЕВ 的 ГЕОМЕТРИЯ 外, 主要的參考書是國立北京師範大學附屬中學,韓清波、魏元雄、李恩波譯編的高中立體幾何教科書.

3. 就教學時數說本書的材料不算多. 希望教師們在教學的時候能夠做到下面所舉出的兩點:

(i) 所有的習題都分配在課堂上做.

(ii) 盡量指導學生自己用紙板或粘土……做模型. 使他們由製作模型的過程中得到深切的了解, 並且通過模型和書中的圖的比照養成由平面的圖想像立體的形的習慣.

4. 本書還是帶有實驗性的,希望用這本書的教師們和讀者們加以批評,以便逐漸修改.

目　錄

第一章

直線和平面

一　空間的直線和平面

1. 立體幾何學　研究幾何形體的性質的科學,我們叫它做幾何學.所研究的圖形限於在同一個平面內的,這種幾何學叫做平面幾何學.若所研究的圖形不限於在同一個平面以內的,這種幾何學便叫做立體幾何學,又叫做空間幾何學.空間的幾何圖形,一般地說是有長短、寬窄和厚薄的.

2. 平面　在一個面上任意取兩個點,經過這兩個點引一條直線,若這條直線上的任何一點都在這個面上,這樣的面就叫做平面.對於平面我們要設想它是可以向四面無限伸展出去的.

我們由生活當中可以體認出下面的幾條公理:

(a) 空間所有的點不能全在一個平面內.

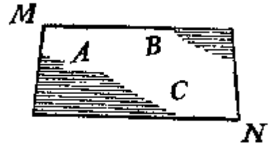
(b) 兩個平面若有一個公共點,則必定還有別的公共點.

(c) 過不在一直線上的三點,必可作一個平面,也只可以作一個平面.

3. 平面的決定和表示　若有某些點或線,而有一個平面

包含着它們,別的平面卻不能完全包含它們,我們就說這些點或線決定這個平面. 或是反過來說, 這個平面被這些點或線所決定;因此某條件決定一個平面,就是合於這個條件的平面必定有一個,也只有一個.

我們畫一個平面包含着某些點或線的時候,又可以說'經過'這些點或線作一個平面.

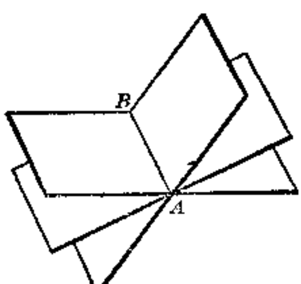


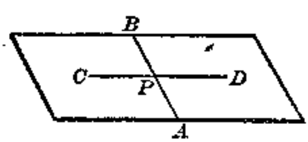
在本書中是用一個平行四邊形代表一個平面, 而用它的對角的兩個頂點如右圖的 MN 表示,或用它上面的三個點如 ABC 表示.

4. 定理 經過相交的兩條直線可作一個平面,也只可以作一個平面.

如下面左邊的一個圖所表示的, 包含直線 AB 的平面可以繞着直線 AB 轉動,而位置不確定. 換句話說,便是包含一條直線的平面的個數是無窮的. 也就是說, 經過一條直線可以作平面,但所可作的個數是無窮的.

但如下面右邊的一個圖所表示的,直線 CD 和直線 AB 相





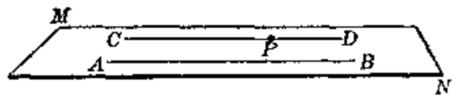
交於 P 點. 則繞着直線 AB 轉動的平面,轉到和 C 點相遇的時候,它就含有直線 CD 上的兩個點 C 和 P. (爲什麼?) 所以這個平面也就含有直線 CD 上的任意一個點 D. (爲什麼?) 這就證明過相交的兩條直線 AB 和 CD 可作一個平面.

若上面所說的這個平面,離開了 C 點,自然除 P 點外,它就不能再包含直線 CP 上的另外的點. (爲什麼?) 這就證明過相交的兩條直線 AB 和 CD 只可以作一個平面.

系 1. 一條直線和它的外面的一點決定一個平面.

如直線 AB 和 C 點.

系 2. 互相平行的兩條直線決定一個平面.



因爲依照平面幾何中平行線的定義, $AB \parallel CD$ 則 AB 和 CD 是在同一個平面上. 一個平面若包含 AB 和 CD 當中的一條,又包含另外一條上的一個 P 點,這個平面就被決定了.

習題 1. 我國的木工常用曲尺的一邊靠緊木板或枋子的面移動來觀察它們是否平滑,這是什麼理由?

習題 2. 三個點的位置怎樣,則經過它們可作的平面不止一個?

習題 3. 空間有四個點,它們中的任何三點都不在一條直線上,那末可決定幾個平面?

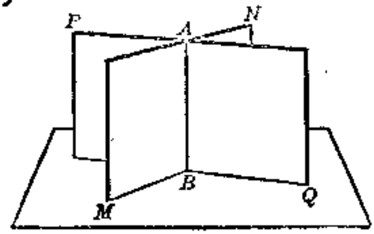
習題 4. 和兩條平行線相交的直線是不是在它們所決定的平面內?

習題 5. 三角形的重心,垂心,外心,內心以及傍心都一定在同一個平面內麽?

5. 定理　兩個平面的交線是一條直線.

［假設］　平面 MN 和 PQ 是相交的兩個平面.

［終結］　它們的交線是一條直線.



［證明］　設 A 和 B 都是平面 MN 和 PQ 兩個平面上的公共點. 作直線 AB. 則直線 AB 全在平面 MN 上也全在平面 PQ 上. (2 節)

但直線 AB 以外的任何一點都不能同時在兩個平面上, 因為經過直線 AB 和它以外的一點只可以作一個平面. (4 節系1)

這就是說: 直線 AB 包含兩個平面 MN 和 PQ 的一切公共點, 也就是兩個平面的交線是一條直線.

(討論)　這個定理和平面幾何中的什麼定理相當?

6. 定義　從平面外一點所作的直線和這個平面的交點叫做這條直線在這個平面上的足.

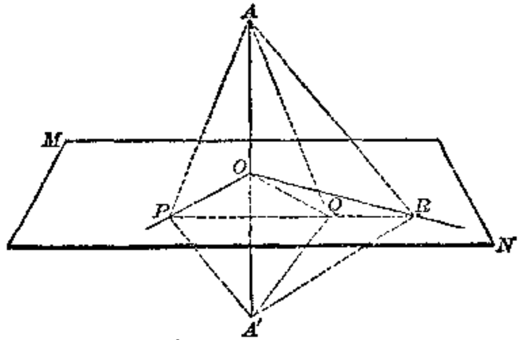
一條直線若垂直於一個平面上過它的足的一切直線, 就叫做這個平面的垂線. 或是說, 這條直線垂直於這個平面.

反過來我們也說, 這個平面垂直於這條直線.

7. 定理　若一條直線垂直於兩條直線中每一條, 則它就垂直於這兩條直線所決定的平面.

[假設] 直線 AO 在 O 點垂直於直線 OP 和 OR.

[終結] AO 垂直於 OP 和 OR 所決定的平面 MN.



作一直线 PR 交 OP, OR 于 P, R, 同时又

[證明] 在平面 MN 內過 O 作任意直線 OQ 和直線 PR 相交於 Q.

引長 AO 到 A' 並且使 $A'O = AO$. 連結 AP, AQ, AR, $A'P$, $A'Q$ 和 $A'R$.

則 OP 和 OR 都是 AA' 的垂直平分線.

$\therefore$ $AP = A'P$ 和 $AR = A'R$. (為什麼?)

$\therefore$ $\triangle APR \cong \triangle A'PR$. (為什麼?)

$\therefore$ $\angle RPA = \angle RPA'$.

即 $\angle QPA = \angle QPA'$.

$\therefore$ $\triangle PQA \cong \triangle PQA'$. (為什麼?)

$\therefore$ $AQ = A'Q$ 而 $OQ \perp AA'$.

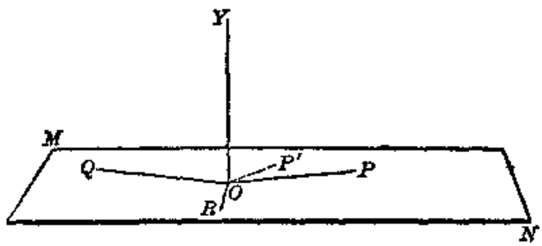
也就是 AO 垂直於平面 MN 上過 O 點的一切直線, 而 AO

就是平面 MN 的垂線.

8. 定理 過直線上一點和它垂直的一切直線在過這一點垂直於這條直線的平面內.

[假設] 平面 MN 過 O 點垂直於直線 OY, 以及 OP 爲 OY 的任意一條垂線.

[終結] OP 在平面 MN 內.



[證明] 設含直線 OY 和 OP 的平面交平面 MN 於 OP', 則 $OY \perp OP'$. (6 節)

但在平面 POY 內, 過 O 點只能有一條直線 OP 垂直於 OY.

所以 OP 和 OP' 必須相合. OP' 既在平面 MN 內, OP 也就在平面 MN 內.

這就證明了, 過 O 點和 OY 垂直的一切直線如 OQ, OR 都在平面 MN 內.

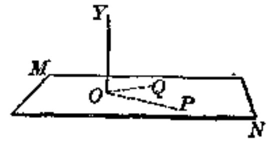
系 1. 經過一條直線上的一個定點可以作一個平面和它垂直, 也只可以作一個平面和它垂直.

系 2. 經過一條直線外的一個定點可以作一個平面和它

垂直，也只可以作一個平面和它垂直.

設P爲直線OY外的一個定點.

作$PO\perp OY$另作$OQ\perp OY$. 則PO和OQ兩條相交的直線決定一個平面MN，並且這個平面MN在O點垂直於直線OY.

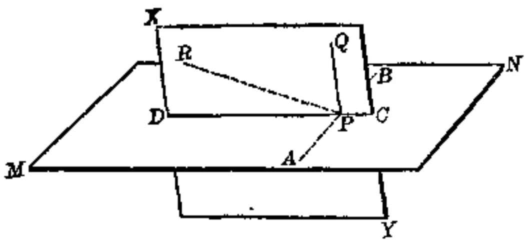


9. 定義　和一個平面相交但不相垂直的直線，叫做斜線.

10. 定理　經過一個平面內的一定點可作一條垂線，也只可以作一條.

[假設]　P爲平面MN內的一個定點.

[終結]　經過P點可作一條直線垂直於MN，也只可以作一條.



[證明]　在平面MN內過P點任作一直線AB，並且經過P點作一個平面XY垂直於AB，和平面MN相交於CD.

在平面XY內過P點作$PQ\perp CD$.

由作圖，AB垂直於平面XY，也就垂直於PQ. 也就是PQ垂直於AB和CD，因而PQ就垂直於平面MN.

設 PR 是過 P 點的任一直線，因為 PQ 和 PR 是相交的兩條直線，所以它們決定一個平面.

假設這個平面就是圖中的 XY 和平面 MN 相交於 CD.

因 PQ 垂直於平面 MN 也就垂直於 CD（為什麼?）.

所以 PR 是 CD 的斜線（為什麼?）. 因而也是平面 MN 的斜線. 3

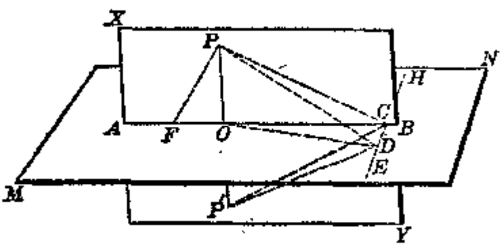
這就證明 PQ 是唯一的過 P 點垂直於平面 MN 的直線.

（討論） 這個定理和平面幾何中的什麼定理相當?

11. 定理 經過一個平面外的一定點可作一條垂線，也只可以作一條.

［假設］ P 為平面 MN 外的一個定點.

［終結］ 經過 P 點可作一條直線垂直於 MN，也只可以作一條.



［證明］ 在平面 MN 內任作一直線 EH，並且經過 P 點作平面 XY 垂直於 EH 和平面 MN 相交於 AB，和 EH 相交於 C.

作 $PO\perp AB$, 並且在平面 MN 內任作一直線 OD 交 EH 於 D.

引長 PO 到 P' 使 $P'O=PO$, 連結 $PC, PD, P'C$ 和 $P'D$.

在 $\triangle PCD$ 和 $\triangle P'CD$ 中:

因為 $DC\perp XY$, 所以

$$\angle PCD=\angle P'CD=\angle R. \quad (\text{為什麼?})$$

但 DC 是公共邊和 $PC=P'C$. (為什麼?)

$\because \quad \triangle PCD\cong\triangle P'CD,$

$\therefore \quad PD=P'D,$

而 $\quad OD\perp PP',$

$\therefore$ PO 垂直於 OD 和 AB,

$\therefore \quad PO\perp MN.$

讀者試照前節將這個證明補完全.

系　垂線是從一個點到一個平面的最短線段.

這個垂線的長就叫做從這一個點到這個平面的距離.

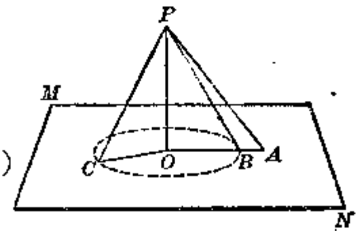
12. 定理　從平面外一點所作這個平面的垂線和斜線: 斜線足距垂線足相等的斜線相等; 斜線足距垂線足長的斜線較長.

[假設]　PO 是平面 MN 的垂線, PA, PB 和 PC 都是斜線; 並且

(1) $OB=OC$, 　(2) $OA>OC$.

[終結]　(1) $PB=PC$, 　(2) $PA>PC$.

[證明] (1) 在 $\triangle OBP$ 和 $\triangle OCP$ 中:



$$OP=OP,$$

$$OB=OC,$$

和 $\angle BOP=\angle COP$

$=\angle R$. (爲什麼?)

$\therefore\quad \triangle OBP\cong\triangle OCP.$

$\therefore\quad PB=PC.$

(2) 設 A, B 和 O 在一直線上,則 PO, PB 和 PA 在同一個平面上. (爲什麼?)

而 $OA>OC,$

$\therefore\quad OA>OB.$

$\therefore\quad PA>PB,$

而 $PA>PC.$

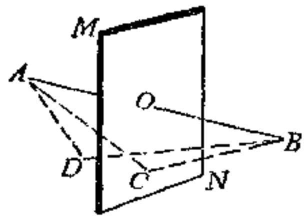
(討論 1) 這個定理和平面幾何中的什麼定理相當?

(討論 2) 在上面的證明(2)中若 A, B 和 O 不在一直線上,應當怎樣證明?

系 1. 逆定理 從平面外一點所作這個平面的垂線和斜線: 若斜線相等則斜線足和垂線足的距離相等; 斜線長的, 斜線足和垂線足的距離較長.

讀者試自行證明.

系 2.* 到兩個定點距離相等的點的軌跡是垂直平分這兩個定點的連結線的平面.



因爲在這個平面 MN 上的任意一點 (C) 都在 AB 的垂直平分線上.（爲什麼?）

而在這個平面 MN 外的任意一點 (D) 都不在 AB 的垂直平分線上.（DA 和 DB 這兩個距離的關係怎樣?）

系 3. 到三角形的三個頂點距離相等的點的軌跡是過三角形的外心而垂直於三角形所決定的平面的一條直線.

過三角形的內心而垂直於三角形所決定的平面的一條直線是什麼點的軌跡?（到和这三边线等距离的轨迹为其交角线之垂线）

系 4. 到圓上各點距離相等的點的軌跡是過圓心而垂直於這個圓所決定的平面的一條直線.

（討論）　在平面幾何中和（系 2）相當的定理是什麼? 這兩個的證法有什麼關係?

13. 定理　從一條垂直線在平面上的垂足作這個平面上任意一條直線的垂線，所得的垂足和原垂線上任意一點的連結線垂直於這條直線.

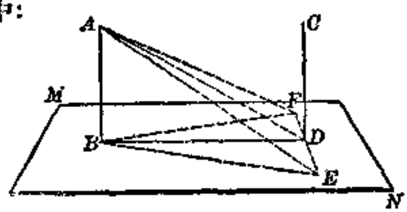
［假設］　AB 垂直於平面 MN, EF 爲 MN 上的任意一條直線, A 爲 AB 上的任意一點, 並且 $BD \perp EF$.

［終結］　$AD \perp EF$.

［證明］　在 EF 上取 $DE=DF$, 連結 AE, AD, AF, BE 和 BF.

則 $BE=BF.$ (爲什麼?)

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ABF$ 中:



$BE=BF,\ AB=AB$

和 $\angle ABE=\angle ABF=\angle R,$

$\therefore \quad \triangle ABE\cong\triangle ABF,$

$\therefore \quad AE=AF.$

所以 A 點在 EF 的垂直平分線上.

但 D 爲 EF 的中點.

$$\therefore \quad AD\perp EF.$$

14. 垂直於同一個平面的兩條直線互相平行.

[假設] 直線 AB 和 CD 垂直於同一個平面 MN. (前節的圖)

[終結] $AB\parallel CD.$

[證明] 連結 AD 和 BD. 在平面 MN 內過 D 點作 $EF\perp BD$. 則由前節的定理,

$$AD\perp EF.$$

但 BD 和 CD 也垂直於 EF.

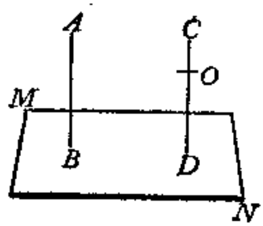
$\therefore$ AD, BD 和 CD 在同一個平面內 (8 節).

而 AB 和 CD 都垂直於 BD.

$$\therefore \quad AB\parallel CD.$$

系 1. 互相平行的兩條直線中, 若有一條垂直於一個平面,則另外一條也垂直於這個平面.

設 $AB \parallel CD$ 並且 $AB \perp MN$, O 為 CD 上的任意一點. 過 O 作直線垂直於平面 MN. 這直線和 AB 以及 CD 的關係怎樣?



系 2. 若兩條直線平行於同一直線則它們也互相平行.

注意這個定理同着平面幾何中相同的定理的區別.

習 題 一

1. 在同一個平面中的兩條直線不平行就相交，在空間中的怎樣？試用兩枝筆做來看.

2. 為什麼把一張紙摺轉，摺痕是直線？

3. 空間中集交於一點的四條直線可以決定多少個平面？

4. 從一個平面外的一個定點作這個平面的兩條斜線和一條垂線；若這兩條斜線相等，則它們和垂線所成的角也相等．若它們不相等呢？

5. 前題，垂線足和斜線足的連結線同着斜線所成的角怎樣？

6. 從一個平面外的一點，作這個平面的垂線和平面內任意一條直線的垂線；兩個垂足的連結線和這條直線成怎樣的角？

7. 空間不同平面的三直線集交一點，過這一點怎樣作一條直線和它們成等角？

8. 從平面外一點作定長的斜線，求它們的斜線足的軌跡.

15. 定義 若一條直線和一個平面無論怎樣延長都不相交，則說它們是互相平行的.

16. 定理 若兩條直線互相平行，則只含其中的一條直線的平面和另外一條直線平行.