# 初中代数一题多解

翟连林主编

北京出版社

中学数学智力开发丛书

中学数学智力开发丛书

# 初中代数一题多解


主编　翟连林

编者　夏益辉　刘金萍　徐松柏

刘志浩　王向东　丁并桐



北　京　出　版　社

中学数学智力开发丛书
初中代数一题多解
Chuzhong Daishu Yiti Duojie
翟连林　主编

※

北 京 出 版 社 出 版
(北京北三环中路 6 号)
新华书店北京发行所发行
北京顺义燕华印刷厂印刷

※

787×1092毫米　32开本　9.625印张　213,000字
1990年 5 月第 1 版　　1991年 6 月第 2 次印刷
印数21,400—46,100
ISBN　7-200-00852-4/G·230
定 价：3.60 元

# 编者说明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务．要完成这一任务，必须演算一定数量的习题，但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律．这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微．

长期的教学实践使我们体会到：恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度“追踪”，都能“以少胜多”地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧．为此，我们总结多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套“中学数学智力开发丛书”．这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》．

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及

基本解题规律.

在本书编写过程中，俞颂萱、林福堂、赵毅三位同志给予很多帮助，在此表示感谢.

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

1989年3月

# 目　录


第一章　一题多解的意义与作用……………………（1）

第二章　怎样提高解题能力……………………（5）

一、要有扎实的数学基础……………………（5）

二、掌握常用数学方法……………………（8）

三、多角度、多方位思考问题……………………（14）

四、总结解题规律，提高解题能力……………………（18）

第三章　典型例题……………………（19）

一、代数式……………………（19）

二、方程和方程组……………………（110）

三、应用题……………………（183）

四、指数与对数……………………（228）

五、不等式与函数……………………（260）

# 第一章　一题多解的意义与作用

学习数学离不开解题，而解题能力又是衡量数学水平、数学能力的重要标志。

为了训练、提高解题能力，常常需作各种类型的数学习题.熟能生巧，这当然有一定的效果.但是数学题变化无穷，盲目多作题，往往事与愿违，造成负担过重，抑制积极思维，解题能力提不高，甚至越作越糊涂。

“练习不在于多，而在于精”，滥做多题，不如精做一题，下面通过举例加以说明：

**例**　已知$y=x^2+px+q$的图象与$x$轴相切，切点为（－2，0），求$p$、$q$.

这是求二次函数$y=x^2+px+q$待定字母$p$、$q$的值.根据$y=x^2+px+q$的图象与$x$轴相切，可知切点就是抛物线的顶点，得解法１.

**【解法1】**　∵　$y=x^2+px+q$的顶点坐标为

$\left(-\frac{p}{2},\ \frac{4q-p^2}{4}\right)$.而$y=x^2+px+q$的图象与$x$轴相切，

切点为（－2，0），即顶点坐标为（－2，0）.

$$\therefore\quad \begin{cases} -\frac{p}{2}=-2, \\ q-\left(-\frac{p}{2}\right)^2=0. \end{cases}$$

解之，得　$p=4$，$q=4$.

求$p$、$q$的值，实际上就是求二次函数解析式．而与$y=x^2+px+q$等价的函数式还有$y=(x-m)^2+k$(其中$m$，$k$为顶点坐标）和$y=(x-x_1)(x-x_2)$（其中$x_1$，$x_2$为抛物线与$x$轴交点的横坐标），求出上述解析式中一个，即可求出$p$、$q$的值，由此得解法2和解法3．

**【解法2】**　由抛物线的顶点坐标为（$-2$，$0$），可设抛物线的解析式为$y=(x-m)^2+k$，其中$m=-2$，$k=0$，

$$\therefore\quad y=(x+2)^2+0=x^2+4x+4,$$

$$\therefore\quad p=4,\ q=4.$$

**【解法3】**　由抛物线与$x$轴相切，切点$(-2,\ 0)$就是抛物线与$x$轴交点坐标，可设抛物线的解析式为$y=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$，这里$x_1=x_2=-2$．

$$\therefore\quad y=[x-(-2)][x-(-2)]=(x+2)^2$$
$$=x^2+4x+4,$$

$$\therefore\quad p=4,\ q=4.$$

由于抛物线$y=x^2$的顶点在$x$轴上，而抛物线$y=x^2+px+q$顶点也在$x$轴上，由顶点$(-2,\ 0)$可知，它是$y=x^2$的图象向左平移2个单位得到的，由此得解法4．

**【解法4】**　由顶点$(-2,\ 0)$可知，$y=x^2+px+q$的图象是$y=x^2$图象向左平移2个单位得到的．

$$\therefore\quad y=(x+2)^2+0=(x+2)^2=x^2+4x+4,$$

$$\therefore\quad p=4,\ q=4.$$

由于$y=x^2+px+q$的图象与$x$轴交点横坐标就是二次三项式$x^2+px+q$的根，与$x$轴相切时，二次三项$x^2+px+q$有相等实根，故它的判别式$\varDelta=p^2-4q=0$，由根与系数关系，可得解法5和解法6．

【解法5】 由$y=x^2+px+q$与$x$轴相切，二次三项式$x^2+px+q$有相等实根，故它的判别式为零，即

$$\Delta=p^2-4q=0 \qquad ①$$

而切点（$-2$，$0$）在$y=x^2+px+q$的图象上，其坐标必须满足$y=x^2+px+q$，即

$$0=4-2p+q \qquad ②$$

解①、②，得 $p=4$，$q=4$.

【解法6】 由于$y=x^2+px+q$图象切点$x$的坐标$x=-2$就是二次三项式的根，因此$x_1=x_2=2$

由根与系数关系，得

$$-p=x_1+x_2=(-2)+(-2)=-4,$$

$$q=x_1\cdot x_2=(-2)(-2)=4,$$

$$\therefore\quad p=4,\ q=4.$$

这六种解法涉及较多数学知识，从二次函数的顶点坐标、函数解析式、图象之间联系到二次三项式的根的判别式和根与系数关系以及待定系数法，联系课本几个章节的内容，并且将这些知识纵横有机联系起来，从而对抛物线与$x$轴相切问题有较深刻认识.因此一题多解有利于系统复习和巩固数学知识，促进对数学知识融汇贯通，培养综合、灵活应用数学知识的能力.

这六种解法是通过对条件和结论全面分析，由抛物线切点就是顶点，想到顶点坐标公式、顶点式解析式；由抛物线切点就是与$x$轴交点，想到分解式解析式；由与$x$轴交点横坐标就是二次三项式的根，想到二次三项式的根的判别式和根与系数关系，从而获解.为了寻求一题多解，需要从不同的角度，不同方面去探索解法，需要打破常规解法，善于变通、转换，善于迅速调整、观察思考的角度，从新的角度、观点

去看待思考对象．因此一题多解有利于培养思维灵活性，灵活运用知识的创造能力．

比较这六种解法，解法1应用顶点坐标公式解较繁，解法2和解法3分别应用顶点式和分解式解较好，而解法6应用根与系数关系解更为简捷．因此，一题多解有利于提高"练"的质量，不仅要求会解，而且还要寻求多种解法，找出最优解法，学会一类问题解法，起到"以一当十，以少胜多"，有利于较快积累解题经验，提高解题能力．

# 第二章　怎样提高解题能力

怎样才能正确、迅速得到代数题的一题多种解法呢？对初中代数典型例题的一题多解的讨论可以回答这个问题.

## 一、要有扎实的数学基础

初中代数中的概念、公式、法则和定理等数学基础知识是解题的武器和工具．一题的多种解法需要综合、灵活地应用数学知识才能得到，因此一题多解来源于扎实的数学基础。

数学概念要掌握它的所有本质属性和概念所反映的所有的对象.

公式、定理要掌握成立条件，记准结论，主要作用和应用范围，做到应用公式、定理时心中有数，有的放矢.

基本运算如有理数运算，整式、分式、根式、指数式和对数式四则运算和因式分解，必须完全过关，不能满足于“会算”就行，还要做到合理、准确、熟练、简练.

要重视数学知识的纵向、横向联系，要灵活、辩证地理解数学知识，把公式、定理学活，用活.

例如，初中代数中绝对值概念是很重要的概念．如果仅仅掌握绝对值的定义：$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$是不够的，还要

掌握：

绝对值的几何意义.

$|a|$ 表示数$a$在数轴上所对应的点到原点的距离.

绝对值的性质：

（1）$|a| \geqslant 0$；（2）$|a|^2 = a^2$；（3）$|a| = \sqrt{a^2}$；（4）$|x| > a \Longleftrightarrow x > a$或$x < -a$；（5）$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$（$a > 0$）.

这里 $|a| \geqslant 0$ 是绝对值的本质属性，而根据绝对值定义化简绝对值是解决绝对值问题的基本功. 只有揭示绝对值概念的内在联系，使知识系统化，这样处理含有绝对值的问题（如含绝对值符号的方程、不等式等问颞），一题多解才有可能.

再如，初中代数中常用的乘法公式，不仅要牢记公式内容特征，还必须从下面两方面灵活辩证认识乘法公式.

明确公式中字母表示灵活性，不仅表示数、字母，而且还可以表示式.

如 $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2} = (\sqrt[3]{a})^2 - (\sqrt[3]{b})^2$
$= (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$，

$$a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 + (b^{\frac{1}{2}})^3 = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b).$$

明确公式形式表示灵活性，不仅掌握从左到右的形式，还要掌握从右到左的形式，以及变形后的形式，这样才能使公式学活、用活.

如$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 的从右到左形式：

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ 的变形形式：

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,

$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$,

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，等等.

**例1** 不查表计算：

$$\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\lg 5$$

不查表计算就是应用对数运算性质和代数变形直接求出具体的数值，注意$\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$，设法将原式化为含有$\lg 2+\lg 5$的式子，问题就可以解决. 观察$\lg^3 2+\lg^3 5$是$\lg 2$和$\lg 5$的立方和，可以考虑应用乘法公式$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$和$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$.

**【解法1】** 直接应用$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\lg 2+\lg 5)(\lg^2 2-\lg 2\lg 5+\lg^2 5)+3\lg 2\lg 5\\&=\lg^2 2-\lg 2\lg 5+\lg^2 5+3\lg 2\lg 5\\&=\lg^2 2+2\lg 2\lg 5+\lg^2 5\\&=(\lg 2+\lg 5)^2=1.\end{aligned}$$

**【解法2】** 应用变形公式$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\lg 2+\lg 5)^3-3\lg^2 2\lg 5-3\lg 2\lg^2 5+3\lg 2\lg 5\\&=1-3\lg 2\lg 5(\lg 2+\lg 5-1)=1-3\lg 2\lg 5(1-1)\\&=1.\end{aligned}$$

**【解法3】** 应用变形公式$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\lg 2+\lg 5)^3-3\lg 2\lg 5(\lg 2+\lg 5)+3\lg 2\lg 5\\&=1-3\lg 2\lg 5+3\lg 2\lg 5=1.\end{aligned}$$

还可以应用拆补法、添加相消项或添“1”因式得到.

**【解法4】** 原式$=\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg^2 2\lg 5+3\lg 2\lg^2 5-3\lg^2 2\lg 5-3\lg 2\lg^2 5+3\lg 2\lg 5$

$$
\begin{aligned}
&=(\lg 2+\lg 5)^3-3\lg 2\lg 5(\lg 2+\lg 5)\\
&\quad+3\lg 2\lg 5\\
&=1-3\lg 2\lg 5+3\lg 2\lg 5=1.
\end{aligned}
$$

**【解法5】** 原式$=\lg^3 2+\lg^3 5+(3\lg 2\lg 5)\times 1$

$$
\begin{aligned}
&=\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\lg 5(\lg 2+\lg 5)\\
&=(\lg 2+\lg 5)^3=1.
\end{aligned}
$$

上面的五种解法都是通过灵活应用公式和常用数学方法获得.

## 二、掌握常用数学方法

初中代数题的一题多解还来源于对数学方法的融会贯通. 下面将常用数学方法作一归纳.

1.拆补法

拆补法包括拆项和补项. 拆项是将式中某些项分别拆成二项的代数和；补项是特殊的拆项，即把零项拆成两个互为相反项的和，根据所给式子的特点和解题要求，通过拆项和添项把式子变换成所需要的形式，使之能应用公式或简化运算，它在因式分解、化简求值、等式证明、求解方程和证明不等式等常用.

例2 解方程：

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}.$$

观察方程中每一个分式，分母与分子中一次项相同，常数项互为相反数，相加后都得到$2x$. 把方程两边各项都加上1，各分式分别通分相加，它们的分子都相同.

即 $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{2x}{x+4}=\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{2x}{x+3}$,

$$2x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)=0,$$

于是 $x=0$，或 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=0$，

$\therefore\quad x=-\frac{5}{2}$.

经检验 $x=0$，或 $x=-\frac{5}{2}$ 都是原方程的根.

2.消去法

有若干个元素，通过一些关系式互相联系起来，通过恒等变形或方程同解变形，消去某些元素，从而使问题获得解决. 常用的消去法有代入、加减或比较消去法. 消去法常用在解方程组、求值或等式证明中.

**例3** 已知：$y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$，$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$，

求证：$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

观察所证等式中不含$y$，因此可从已知等式中消去.

将$y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$代入$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$，

化简，得 $z=10^{\frac{\lg x-1}{\lg x}}$

则 $\lg z=\frac{\lg x-1}{\lg x}$，

$\therefore\quad \lg x=\frac{1}{1-\lg z}$，$\therefore\quad x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

3.配方法

配方法的根据是$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，因此，配方的过程就是凑出$a^2\pm 2ab+b^2$的过程. 有两种表现形式：配中项$2ab$或配一个平方项$b^2$（或$a^2$）. 配中项时要注意$a^2$、$b^2$是什么，从而找出$a$、$b$，进而决定$2ab$；配平方项时，则从$a^2$

（或$b^2$），$2ab$的具体形式中，分析出$a$、$b$是什么才能解决。配出的完全平方式或与另外的平方式构成平方差的形式，以便进行分解因式；或是利用实数平方的非负性，以达到求值或确定不等关系，或应用$\sqrt{a^2}=|a|$去掉根号等。

配方法在因式分解、求极值、等式证明和解方程等常用。

4.换元法

引入一个或几个新的变元代换原式或方程中某些量，使得原式或方程变成引进新变元（或新变元和原变元混合）的式子或方程，从而使某些数量关系明朗化和书写简化，使解题简捷。通过换元能化高次式为低次式，化分式为整式，化无理式为有理式。

换元法在因式分解、求值、等式证明和解方程中都有广泛应用。

**例4** 分解因式：

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2.$$

原式中$[(x+1)(x+6)][(x+2)(x+3)]=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)$，观察两因式中$x^2+6$相同，取$7x$、$5x$的平均数$6x$，设$y=x^2+6x+6$，

则　原式$=(y+x)(y-x)+x^2=y^2-x^2+x^2=y^2$

$$=(x^2+6x+6)^2.$$

**例5** 解方程组：

$$\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=4 & ① \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=9 & ② \end{cases}$$

观察两方程左边都是关于$x$、$y$的一次齐次式，可设$x=$

$ky\,(k\neq 0)$

由①得 $ky(1+k)=4$，

由②得 $y\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=9$，

两式相除，消去$y$，解得 $k^2=\dfrac{4}{9}$，即 $k=\pm\dfrac{2}{3}$，

代入，解之，得 $\begin{cases}x=\dfrac{12}{5}\\[2mm] y=\dfrac{18}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=12,\\ y=-18.\end{cases}$

5.待定系数法

有一些数学问题的结论具有某种确定形式，其中有一些系数可以通过给定的已知条件来确定，以致最终得到结论。这种处理方法叫做待定系数法。待定系数法，又分为比较系数法和数字代入法。

待定系数法常用在分解因式、把某一类分式化为部分分式、求多项式的商式、余式、求函数解析式等。

6.构造法

这里就构造一元二次方程的常用方法作一介绍。

（1）通过变形构造一元二次方程。

**例6** 已知关于$x$、$y$的方程$5x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0$，求它的实数解.

把方程变为关于$x$的方程

$$5x^2-(6y+4)x+(2y^2+2y+1)=0 \qquad ①$$

由于所求$x$必须为实数，

$\therefore\quad \Delta=[-(6y+4)]^2-20(2y^2+2y+1)\geqslant 0$，

即 $-4(y-1)^2\geqslant 0$。

所求$y$必须实数，$\therefore\quad (y-1)^2\,0\leqslant 0$，