熊晓东高中数学专题讲座20讲

熊晓东 编著

百 家 出 版 社

名师熊晓东执教于百年名校上海市南洋模范中学

名师熊晓东有长达近30年高中数学教学经历和经验

名师熊晓东曾创下高考平均成绩达134分的惊人高度

名师熊晓东曾三度访美赴哥伦比亚大学进修、讲学

名师熊晓东曾在全美数学教师委员会年会上作主题讲演

熊晓东

高中数学专题讲座

20讲

熊晓东 编著

百 家 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

熊晓东高中数学专题讲座20讲/熊晓东编著.—上海:百家出版社,2005.1
ISBN 7-80703-214-6

Ⅰ.熊... Ⅱ.熊... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第123148号

书　　名	**熊晓东高中数学专题讲座20讲**
编 著 者	熊晓东
责任编辑	陈闵梁
封面设计	梁业礼
出版发行	百家出版社(上海天钥桥路180弄2号)
经　　销	全国新华书店
照　　排	南京展望文化发展有限公司
印　　刷	上海新华印刷有限公司
开　　本	720×1020毫米　1/16
印　　张	13
字　　数	260 000
版　　次	2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷

ISBN 7-80703-214-6/G·92

定　　价　20.00元

出版说明

高三数学，在对学生的“三基”(基础知识、基本技能、基本方法)作系统的复习之后，对于数学思想方法的养成、数学意识的培养和应用数学能力的提高是一个很重要的部分。这不仅仅是高考升学的需要，而且对学生今后大学继续学习和终身学习、事业发展都有着重要的作用和意义。

在使用《熊晓东高中数学复习讲义100讲》、《熊晓东高中数学复习检测30套》的基础上，熊晓东先生每年对高三学生又专门开辟了《熊晓东高中数学复习专题讲座20讲》这一教学内容。专题讲座有重点知识点相互联系、最新型试题的介绍，如“函数、方程、不等式以及它们的图像”、“抽象函数与解题策略”、“接触‘不动点’”、“向量与立体几何”、“向量与平面解析几何”，等等。专题讲座还有重要数学思想方法的介绍，如“数形结合”、“分类与讨论”、“化归与类比”、“学会使用构造法”、“有关逆向思维与反证法”，等等。

《100讲》是按照教学内容顺序编写，根据需要已经对某些重要知识作详细讲述，例如“二次函数根的分布”、“二次函数最值分类讨论”、“数学归纳法”等。这些内容在《专题讲座》一书中就不再重复。所以《专题讲座》与《100讲》是相互补充的，只是各自的侧重点不一样。但是对于高中数学所有知识点和数学思想方法，两本书也不是面面俱到地作重点介绍，有些内容只是作了一般性介绍，轻重缓急的分类处理是根据目前教材、教学大纲、考纲、考题发展趋势等方面因素来划分的。

虽然中学的数学学习只是很基础很肤浅的数学知识，但是，学生对数学的特点的理解应该是十分深刻的。《专题讲座》告诉学生数学是抽象的，要学会舍弃现实对象的所有性质只留下其空间形式和量的关系的结果，要学会数字的计算而不必要知道这些数字与具体对象的联系，这样由现在的复数、函数，一直到未来的微分、积分、泛函、n维甚至无限维空间的抽象概念学习会觉得自然而然，水到渠成。《专题讲座》告诉学生数学是精确的。数学结论的逻辑严格性，数学推理的进行的精密性是无可争辩和确定无疑的。《专题讲座》还告诉学生数学的应用是极其广泛的，不仅在日常生活中，而且全部现代技术、几乎所有科

学都不能缺少数学。

《专题讲座》立意高、范围广、题型新。实践下来，十分受考生们的欢迎。例如2003年上海卷最后一道大题考的是抽象函数，虽然难度很大，题型又新，但是，对于听过专题讲座的学生来讲，做起来得心应手。

《熊晓东高中数学专题讲座20讲》是高三学生在最后冲刺阶段必备的一本参考书，也是青年教师和各类学校的高三数学教师一本理想的教学参考书。

充满阳光的天骄之路

北京大学教育经济与管理专业研究生　王昕雄
北京大学教育信息与技术专业研究生　邢　磊

我们是熊晓东先生九七届的学生。我们一直盼望先生的高中数学复习讲义能印成书出版。先生的书是我们国家最优质最宝贵的教育资源之一，应该让更多的学生所享有。今年欣闻先生同意出书，并邀请我们为先生新书的出版担任校对工作，真是欣喜若狂。

我们上海南洋模范中学九七届高三(4)班是相当辉煌的一届。全班四十三位同学有4位同学以优异成绩考入上海交通大学本—硕—博联读班；5位同学考入上海交通大学试点班；3位同学以优异成绩考入由国家教委举办的上海复旦大学理科基地班；2位同学考入上海同济大学试点班；3位同学考入华东师范大学的文理科基地班；4位同学作为优秀生保送进华东师范大学教育系本—硕—博联读班。共21位同学提前进入大学联读班、基地班、试点班，占全班人数的49%。在那么多的优秀生分别进入大学以后，其余22位同学在高考中取得了数学平均134分的惊人成绩，全部考入复旦、交大等一流大学。我们班还有一个由12位同学组队的数学竞赛小组，在国际、国家各级数学竞赛中获得23人次的一等、二等、三等奖的辉煌战绩……

先生在高一、高二基础知识教授时，尊重课本，尊重教学大纲，把书本上概念、例题讲明、讲透、讲活。书本上全部习题，以各种形式，做到每题必讲、必做，把我们的基础知识、基本技能打得扎扎实实。

先生在高三复习时，不再用教材，而且完全使用他自己编写的复习讲义。讲义的内容编排有章有节，统括全部高中内容，每个知识点都不遗漏，但有轻重之分。例题的选配上、主题上紧扣所要体现的数学知识，技能技巧上更是五彩缤纷。

先生讲题时，喜欢使用推出号“$\Rightarrow$”。即使是非常繁杂的习题，都被先生的推出号表达得清澈、透明，一目了然，逻辑性之强，技巧性之妙，经常令全班同学拍桌叫绝，掌声四起。

先生的教学非常注意数学的应用，密切联系当前我国和世界的政治、经济、科技等各个方面的变化。什么是小康社会？如何买房购车？什么是信息社会？如何上网计费？什么是企业生产？如何计算成本利润……学习了先生的高中数学，

几乎成了当家理财、企业管理、科学研究等各个行业的行家里手。

先生讲题不喜欢在解题技巧上故弄玄虚，而是强调水到渠成。学生学习数学不但不紧张、不恐惧，反而兴致勃勃，情趣浓浓，割舍不开。

先生的高中数学复习检测共三十套，不仅注意全套检测的系统性、功能性、新颖性，而且编写得一浪接一浪，高潮迭起，险象环生。所有的试题，或者是在向你提供某个重要的数学结论，或者是在向你叙说一个数学思想，或者是在引导你通过习题的延伸、转化和扩展，走进一个丰富多彩的数学世界。我们从未有过面对数学题束手无策、望而生畏的感觉，我们总是完成了上一套试题，自然而然地期待着下一套试题，总是带着兴趣，带着期望，欲罢不能地追求一个又一个成功。经常为了迎接先生的测试，我们穷尽着手头的全部有关数学习题，挑灯夜战，直至第二天凌晨。

先生的高中数学教学，是充满阳光的教学。虽然已经毕业离校六七年了，但是先生的高中数学教学至今历历在目，不能忘怀。每每在大学数学学习时，总是要回想起先生的课堂上严密的逻辑思维，生动活泼的解题方法，以及他独特的谈笑风生。先生的高中数学真让我们受用一生，先生为我们铺设了一条充满阳光的天骄之路。

《熊晓东教育实验室网站》介绍

熊晓东教育实验室网站是一个以中学阶段的学习、生活为背景，以中学的教育、教学为内容，一方面是以现代化教育技术开展实验室工作，一方面是以现代化教育技术系统介绍和推广熊晓东教育实验室工作和研究成果的公益性教育类网站。网站的宗旨是将对21世纪中国中学的教育教学以及相关的问题进行探索、研究，以期建设成为一个面向学生、家长和教育工作者三方面的专业性教育网站。网站的特色在于由资深名师主持，由北京大学等著名大学教育专业研究生参与工作，为中学教师更好地开展素质教育、为广大的中学生更好地完成学习任务，度过中学阶段生活，提供切实有效的服务。

熊晓东教育实验室网站于2000年9月1日正式启动，网站配备有中文和英文共两个版本。内容共分“走进熊晓东”、“实验室快讯”、“著作与论文”、“熊晓东教师教育论坛”、“熊晓东数学网校”以及“熊晓东英才教育0～6岁学前教育课题”共六个部分。

1. “走进熊晓东”从九个方面简要地介绍了熊晓东的学术背景，课题研究等大致情况。

2. “实验室快讯”及时地报道熊晓东教育实验室工作情况，包括参加国际、国内的学术会议，课程教学，以及实验室研究课题进展的情况。

3. “著作与论文”是网站重点栏目之一。

“熊晓东教育著作”主要介绍熊晓东先生出版的教育书籍，如：《太阳从这里升起》，《熊晓东高中数学》丛书等，网站将定期精选书中的重点段落予以连载，为读者阅读起到选择、导向作用；

“熊晓东教育论文”主要刊载反映熊晓东先生教育观点和教育思想的学术性论文，包括熊先生参加的国际、国内教育研讨会中的演讲和发言等；

“熊晓东教育个案”主要介绍熊晓东先生几十年从教过程中积累的真实个案，通过对人物特征的具体描述和教育思想、教育过程的生动再现，为学生、家长和教师提供翔实、可靠的参考；

“熊晓东谈数学课堂教学”主要是熊晓东对如何上好一节数学课论述了他的

理论与实践，并配有他的课堂教学教案等内容。

4. “熊晓东教师教育论坛”是熊晓东的一个研究课题：栏目以一个教师成长的历程生动活泼地向教师们阐述了教师成长与发展关键所在。

5. “熊晓东数学网络学校”是面向全社会高三毕业生由熊晓东主讲的网络教育。每年从秋季 9 月 1 日开学，直到第二年高考前夕为止。每周 2 小时授课，使用教材是《熊晓东高中数学复习讲义 100 讲》、《熊晓东高中数学复习检测 30 套》、《熊晓东高中数学专题讲座 20 讲》等。

6. “熊晓东英才教育学前教育”是熊晓东教育实验室未来的一个研究课题。目前正在做文献综述、理论构建等多方面准备工作。

7. “熊晓东信箱”是与熊晓东先生交流的主要途径，通过 E-mail 可以递交任何中学教育问题(包括：心理咨询、教育咨询、解决疑难困惑等)，实验室将在收到信后的一个工作日之内给出反馈，并尽快回复，如果有些问题不属于“熊晓东教育实验室”工作范围，熊先生也将尽可能提出解决的参考方案和建议。

为 21 世纪中华民族的伟大复兴贡献自己的力量是每一个教育工作者的责任和义务，熊晓东教育实验室网站的一切工作将为学生、家长、教师提供无偿的高质量服务。

目　录

第一讲
函数、方程、不等式以及它们的图像

函数是中学数学的一个重要概念.函数的思想,就是用运动变化的观点,分析和研究具体问题中的数量关系,建立函数关系,运用函数的知识,使问题得到解决.

和函数有必然联系的是方程.方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标,函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$,通过方程进行研究.

不等式是函数与方程关系的一个更为广泛的补充.函数 $y=f(x)$ 图像在 x 轴上方是 $f(x)>0$,在 x 轴下方则是 $f(x)<0$.不等式的作用还可以使动态的 $y=f(x)$ 的图像上、下、左、右地移动.

函数思想在解题中的应用主要体现在两个方面:一是借助有关初等函数的性质,解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题;二是在问题的研究中,通过建立函数关系式或构造中间函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质,达到化难为易,化繁为简的目的.

方程、不等式思想在解题中的应用主要表现在:从问题的数量关系入手,运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程、不等式,或方程与不等式的混合组),然后通过解方程(组)或不等式(组)来使问题获解.有时,还实现函数与方程的互相转化、接轨,达到解决问题的目的.

图像将使上述的思想具体化、形象化.它从几何的角度描述问题的本质、变化的规律,使数学问题更具有生命力.

许多数学问题,不能简单地归结于函数、方程或是不等式,而是它们的综合.通过解决这些数学问题,不仅是对我们数学知识掌握的考查,是对我们逻辑思维能力、形象思维能力、综合解题能力、探索创新能力的考查,更重要的是让我们体会到数学知识之间是如何相互联系、相互渗透的,又是联系渗透得那么惊人的深刻,那么意想不到的精彩.

典型例题

例题 1 已知实数 $a>b>c$，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=1$，求 $a+b$ 与 a^2+b^2 的范围.

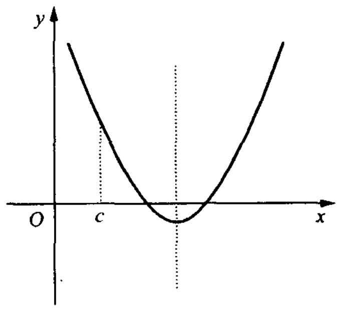
解：$\left.\begin{aligned}&a+b+c=1\Rightarrow a+b=1-c,\\&a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow(a+b)^2-2ab+c^2-1=0\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow(1-c)^2-2ab+c^2-1=0\Rightarrow ab=c^2-c$，且 $a+b=1-c$

构造一个一元二次方程 $x^2-(1-c)x+c^2-c=0$，a，b 是该方程的两个不相等的根，且两根都大于 c.

令 $f(x)=x^2-(1-c)x+c^2-c$，(二次函数根的分布) 则图像与 x 轴有两个交点且都在$(c,+\infty)$内的充分必要条件：

$$\begin{cases}\Delta=(c-1)^2-4(c^2-c)>0\\ \dfrac{1-c}{2}>c\\ f(c)=3c^2-2c>0\end{cases}$$



$\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<c<0$

$\Rightarrow 1<1-c<\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{8}{9}<1-c^2<1$

$\Rightarrow a+b\in\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$，$a^2+b^2\in\left(\dfrac{8}{9},1\right)$.

例题 2 已知 $x^2+xy+y^2=1$，求函数 $u=x^2+y^2$ 的最大值和最小值.

解：建立方程组

$\begin{cases}x^2+xy+y^2=1\\u=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow(u-1)x^2+uxy+(u-1)y^2=0$(两式相乘并相减).

由题意 x,y 不能同时为零，不妨设 $y\neq0$

$\Rightarrow(u-1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+u\cdot\dfrac{x}{y}+(u-1)=0$，即为关于$\dfrac{x}{y}\in\mathbf{R}$ 的一元二次方程，有实根 $\Rightarrow\Delta=u^2-4(u-1)(u-1)\geqslant0\Rightarrow\dfrac{2}{3}\leqslant u\leqslant2$，

$\therefore u_{\max}=2$，$u_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

例题 3 设 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,其图像关于 $x=1$ 对称,对任意的 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,且 $f(1)=a>0$. (1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$及 $f\left(\frac{1}{4}\right)$; (2) 证明 $f(x)$是周期函数; (3) 已知 $a_n=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n)$.

解: (1) 对任意的 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

$\Rightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=a\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{a}$,

类似地,$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2=\sqrt{a}\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{a}$.

(2) 已知 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称$\left(\forall x\in\mathbf{R},\text{都有}\frac{2-x+x}{2}=1\right)$

$\Rightarrow\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(2-x)=f(x)$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{又 } f(x)\text{ 是 }\mathbf{R}\text{ 上的偶函数}\Rightarrow f(x)=f(-x)\\ \Rightarrow f[2-(-x)]=f(-x)\Rightarrow f(2+x)=f(-x)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f(2+x)=f(x)$,即 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

(3) 由(2) 知 $2n$ 也是 $f(x)$ 的周期 $\Rightarrow f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)$,

$f(1)=f\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2n}$ (把 1 分为 $2n$ 个$\frac{1}{2n}$ 的和)

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow\ln(a_n)=\ln f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=\ln f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot\ln a$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln a=0$.

例题 4 已知集合 M 是满足下列性质的$f(x)$的全体: 存在非零常数 T,对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+T)=Tf(x)$成立. (1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合M? 说明理由; (2) 设函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)的图像与 $y=x$ 的图像有公共点,证明: $f(x)=a^x\in M$; (3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$,求实数 k 的取值范围.

解: (1) 对于非零常数 T, $f(x)=x\Rightarrow f(x+T)=x+T$, $Tf(x)=Tx$,由于对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x+T=Tx$ 不能恒成立,所以 $f(x)=x$ 不属于集合M.

(2) 由题意可知方程组$\begin{cases}y=a^x\\y=x\end{cases}$有解 $\Rightarrow a^x=x$.

显然 $x=0$ 不是方程 $a^x=x$ 的解，所以存在非零常数 T，使得 $a^T=T$.

对于 $f(x)=a^x$，有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$

$\Rightarrow f(x)=a^x\in M$

(3) 当 $k=0$ 时，$f(x)=0$，显然 $f(x)=0\in M$.

当 $k\neq 0$ 时，已知 $f(x)=\sin kx\in M$

$\Rightarrow$ 存在非零常数 T，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立，

即 $\sin k(x+T)=\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

由于 x 的任意性，则只有当 $T=\pm 1$ 的时候可能恒成立，

① 当 $T=1$ 时，$\sin k(x+1)=\sin(kx+k)=\sin kx$ 恒成立

$\Rightarrow k=2m\pi,\ m\in\mathbf{Z}$;

② 当 $T=-1$ 时，$\sin k(x-1)=\sin(kx-k)=-\sin kx$ 恒成立

$\Rightarrow\sin(kx-k+\pi)=\sin kx\Rightarrow\pi-k=2m\pi$

$\Rightarrow k=-(2m-1)\pi,\ m\in\mathbf{Z}$.

由 ①② 可知，实数 k 的取值范围是 $\{k\mid k=m\pi,\ m\in\mathbf{Z}\}$.

例题 5 函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ 且满足 $x,y\in(-1,1)$ 时，有 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$. (1) 证明：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是奇函数；(2) 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$，试求：$f(x_n)$；(3) 求证：$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$.

证明：(1) 令 $x=y=0\Rightarrow f(0)+f(0)=f\left(\frac{0+0}{1+0}\right)=f(0)\Rightarrow f(0)=0$,

令 $y=-x\Rightarrow f(x)+f(-x)=f\left(\frac{x-x}{1-x\cdot x}\right)=f(0)=0\Rightarrow f(x)=-f(-x)$,

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是奇函数；

(2) $f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,

$$f(x_{n+1})=f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right)=f\left(\frac{x_n+x_n}{1+x_n\cdot x_n}\right)=f(x_n)+f(x_n)=2f(x_n)$$

$$\Rightarrow\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=2$$

$\Rightarrow\{f(x_n)\}$ 是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列

$\Rightarrow f(x_n)=(-1)\cdot 2^{n-1}$;

(3)

$$\left.\begin{aligned}&\text{由(2)}\Rightarrow -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=-\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=-2+\frac{1}{2^{n-1}}>-2\\&\qquad\qquad -\frac{2n+5}{n+2}=-2-\frac{1}{n+2}<-2\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$，证毕.

例题 6　已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

解：P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$；

Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1，

$y=x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c & x\geqslant 2c\\ 2c & x<2c\end{cases}$，又当 $x\geqslant 2c\Rightarrow 2x-2c\geqslant 2c$

$\Rightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值是 $2c$.

令 $2c>1\Rightarrow c>\frac{1}{2}$，即 $Q\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$，

若 P 正确且 Q 不正确 $\Rightarrow P\cap\overline{Q}=\left\{c\mid 0<c\leqslant\frac{1}{2}\right\}$；

若 P 不正确且 Q 正确 $\Rightarrow \overline{P}\cap Q=\{c\mid c\geqslant 1\}$，

$\therefore$ c 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

例题 7　已知函数 $f(x)=\log_m\frac{x-3}{x+3}$.（1）若 $f(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$，判断 $f(x)$ 在定义域上的增减性，并用定义证明；（2）当 $0<m<1$ 时，使 $f(x)$ 的值域为 $[\log_m m(\beta-1),\ \log_m m(\alpha-1)]$ 的定义区间 $[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$ 是否存在？请说明理由.

解：（1）$\frac{x-3}{x+3}>0\Rightarrow x<-3$ 或 $x>3$，又 $f(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$，则 $\alpha>3$，

$\forall\alpha<x_1<x_2<\beta$，$\frac{x_1-3}{x_1+3}-\frac{x_2-3}{x_2+3}=\frac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}<0$，

$\therefore$ 当 $0<m<1$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，函数在 $[\alpha,\beta]$ 上是减函数；

当 $m>1$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，函数在 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数.

(2) 由(1)可知，当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 为减函数，

则由其值域为 $[\log_m m(\beta-1),\ \log_m m(\alpha-1)]$

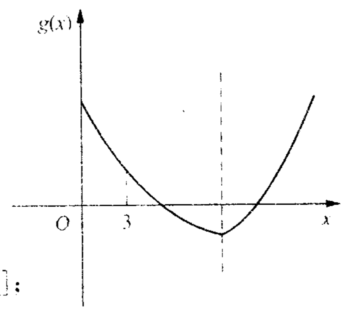
$$\Rightarrow\begin{cases} f(\beta)=\log_m\dfrac{\beta-3}{\beta+3}=\log_m m(\beta-1) \\ f(\alpha)=\log_m\dfrac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_m m(\alpha-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\beta-3}{\beta+3}=m(\beta-1) \\ \dfrac{\alpha-3}{\alpha+3}=m(\alpha-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m\beta^2+2(m-1)\beta-3(m-1)=0 \\ m\alpha^2+2(m-1)\alpha-3(m-1)=0\end{cases}$$

则 α，β 为方程 $mx^2+2(m-1)x-3(m-1)=0$ 的两个根，

$\beta>\alpha>3\Rightarrow$ 方程有两个大于 3 的不等实根，

令 $g(x)=mx^2+2(m-1)x-3(m-1)$



$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{2(m-1)}{2m}>3 \\ g(3)>0 \\ \Delta>0\end{cases}\Rightarrow 0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$\therefore$ 当 $0<m<\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，存在这样的区间 $[\alpha,\beta]$；

当 $1>m\geqslant\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，不存在这样的区间 $[\alpha,\beta]$.

例题 8 设函数 $f(x)=a+\sqrt{-x^2-4x}$ 和 $g(x)=\dfrac{4}{3}x+1$，已知 $x\in[-4,0]$ 时，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围.

解：$f(x)\leqslant g(x)\Rightarrow a+\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\dfrac{4}{3}x+1$

$\Rightarrow\sqrt{-x^2-4x}\leqslant\dfrac{4}{3}x+1-a$，对于 $x\in[-4,0]$ 恒成立.

令 $y_1=\sqrt{-x^2-4x}$，$y_2=\dfrac{4}{3}x+1-a$，$x\in[-4,0]$.

$y_1=\sqrt{-x^2-4x}\Rightarrow(x+2)^2+y_1^2=4\ (y_1\geqslant0)$ 表示以 $(-2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆的上半部分；

$y_2=\dfrac{4}{3}x+1-a$，$x\in[-4,0]$ 表示斜率为 $\dfrac{4}{3}$，截距为 $1-a$ 的平行直线系（a 为参变量）；

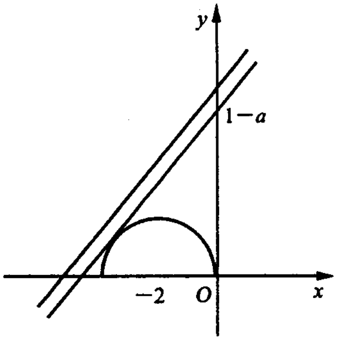
$x\in[-4,0]$ 时，恒有 $y_1\leqslant y_2$ 的几何意义为半圆恒在直线下方（如图）；

直线与半圆相切时，有

$$d=\frac{\left|\frac{4}{3}\times(-2)+1-a\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=r=2$$

$\Rightarrow 1-a=6$(截距)，

由图可知，当截距 $1-a\geqslant 6$，即 $a\leqslant -5$ 时，恒有 $y_1\leqslant y_2$，即恒有 $f(x)\leqslant g(x)$.



例题 9　已知抛物线 C：$y^2=2x$ 和两点 $A(-2, 0)$，$B(0, 4)$，过点 A 作斜率为 k 的直线交曲线 C 于第一象限内的 M、N 两点，设点 P 是弦 MN 的中点，若直线 BP 与 x 轴交于点 Q，且点 Q 在 A 的左侧，求直线 MN 的斜率 k 的取值范围.

解：设直线 MN 的方程为 $y=k(x+2)$ $(k>0)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ y^2=2x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2+2(2k^2-1)x+4k^2=0$　①

$$\Delta>0\Rightarrow 0<k<\frac{1}{2}.$$

设 $P(x_1, y_1)$，$M(x_M, y_M)$，$N(x_N, y_N)$，$Q(x_2, 0)$，

由①式 $\Rightarrow x_1=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{1}{k^2}-2\Rightarrow y_1=k(x_1+2)=\dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow$ 直线方程为 $\dfrac{y-4}{x-0}=\dfrac{\frac{1}{k}-4}{\left(\frac{1}{k^2}-2\right)-0}$，令 $y=0$

$\Rightarrow x_2=\dfrac{8k^2-4}{k(1-4k)}$，已知点 Q 在点 $A(-2, 0)$ 左侧

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{8k^2-4}{k(1-4k)}<-2\\ 0<k<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow 0<k<\dfrac{1}{4}$，即直线 MN 的斜率 k 的取值范围是 $k\in\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.

例题 10　已知 $y=(t^2+t+1)x^2-2(a+t)^2x+t^2+3at+b$，对于任意的 $t\in\mathbf{R}$，抛物线总过定点 $P(1, 0)$，求抛物线与 x 轴的交点的横坐标的取值范围.

解：已知抛物线总过定点 $P(1, 0)$