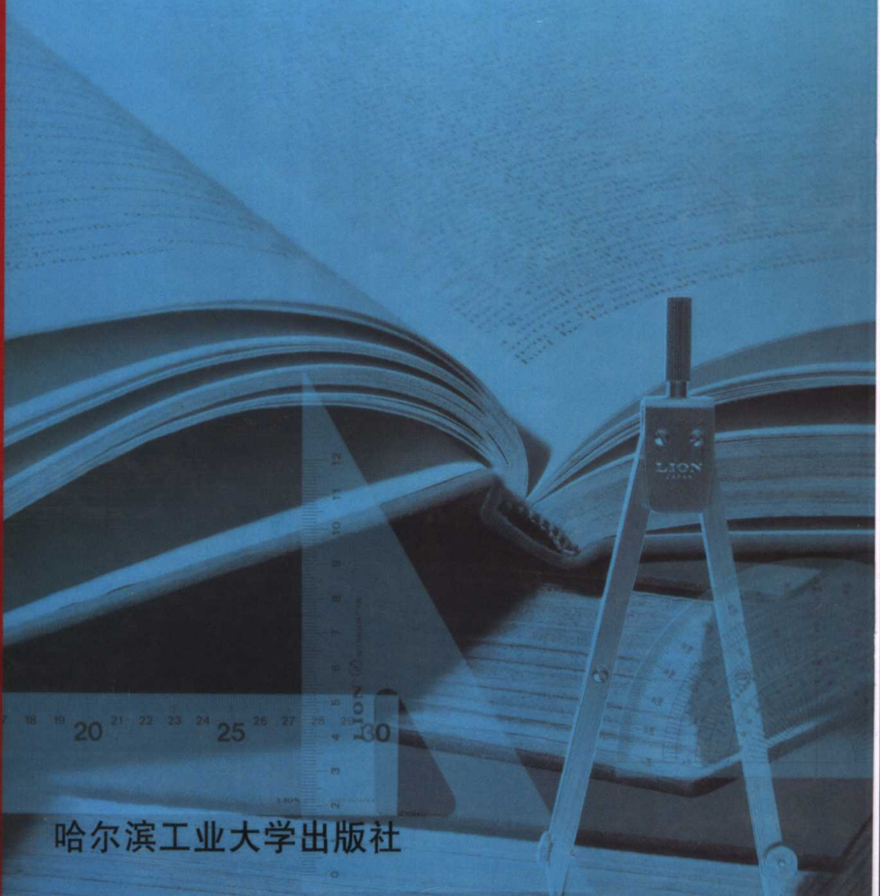
高等师范院校数学系列教材

线性规划

刘文德　孙秀梅　皮晓明　编著



哈尔滨工业大学出版社

高等师范院校数学系列教材

线 性 规 划

刘文德　孙秀梅　皮晓明　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内容简介

内容包括:线性规划问题的数学模型;线性规划问题的解及其几何性质;单纯形法;对偶原理;整数线性规划;灵敏度分析;运输问题的特殊解法。每章后附有习题,供读者学习与训练之用。

本书可作为高等师范学校的应用数学系、数学系、信息科学系等的本科学生教材,亦可作为各类高等学校成人教育的相关专业的本科学生的教材,也可作为运筹学系、管理科学系、经济金融系、系统科学系及计算机科学系等相关专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性规划/刘文德,孙秀梅,皮晓明编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2004.7
高等师范院校数学系列教材
ISBN 7-5603-2052-X

Ⅰ.线… Ⅱ.①刘…②孙…③皮… Ⅲ.线性规划-师范大学-教材 Ⅳ.0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064785 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 850×1168　1/32　印张 7　字数 176 千字
版　　次 2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-2052-X/O·170
印　　数 1~4 000
定　　价 14.80 元

序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务，为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业(师范类)，由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年的教学实践基础上，集中对应用数学、计算机教学及数学教育课程进行研讨，编写了"高等师范院校数学系列教材"，以适应高等师范教育发展的需要。

这套系列教材已出版的主要包括：形成体系的应用数学教材，如《数学建模（上、下册）》、《数学实验（上、下册）》、《离散数学》；具有师范特色的教材，如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》、《线性规划》；融入教师教学体会和教学成果的专著性教材，如《教学过程动力学》。这套教材，力求在保持师范特色的同时，突出应用数学和计算机教学，以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材，这是我们的主要目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不易达到，不过，通过大家的努力，引起共鸣，经过同仁的一起努力，目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文
2004 年 3 月

前　言

线性规划作为运筹学的一个基本分支，越来越受到人们的重视。特别是随着计算机的发展和普及，线性规划如虎添翼，计算能力得到飞速提高，使得它的应用领域更加广泛。线性规划作为一门学科，目前已经成为高等学校的应用数学系、运筹学系、管理科学系、经济金融系、系统科学系及计算机科学系中普遍开设的一门基础课。

本书初稿作为讲义在哈尔滨师范大学数学系、信息科学系的本科生、成人教育本科生中试用过。值此正式出版之际，对全书内容又做了适当的调整，吸收了同类书籍理论精华，撰写成本书。

《线性规划》作为高等师范院校数学专业课教材，我们注意到：近年中学数学教材改革，线性规划这一数学方法已经走入了高中数学课堂，它作为直线方程的简单应用，给学生提供了一种重要的解题方法——数学建模法。提高了学生学习数学的兴趣、应用数学的意识和解决实际问题的能力。这些信息我们在相关的章节做了适当的介绍。因此，学习和理解线性规划理论对于师范类高等学校学生有着更为重要的意义。

全书内容包括：线性规划问题的数学模型；线性规划问题的解及其几何性质；单纯形法；对偶原理；整数线性规划；灵敏度分析；运输问题的特殊解法。每章后附有习

题,供读者学习与训练之用。

本书可作为高等师范学校的应用数学系、数学系、信息科学系等的本科学生教材,亦可作为各类高等学校成人教育的相关专业的本科学生教材。

在本书的编写过程中,我们得到有关院校老师的帮助和支持,特别是黑龙江省高等师范院校数学教育研究会理事长、哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院院长王玉文教授给予了大力支持和帮助,并对有关章节撰写提出了宝贵意见,在此作者表示衷心的感谢。

作 者

2004 年 3 月

目　　录

第一章　线性规划问题的数学模型

- 线性规划问题的典型例子与数学模型
- 线性规划问题的标准形式

线性规划是运筹学的一个基本的，也是最成熟的分支。为了解决二次世界大战中的后勤供应问题，早在20世纪30年代末期康托洛维奇和希奇柯克等在生产的组织和运输问题等方面就开始研究应用这一数学方法。10多年后Dantzig等人提出的单纯形方法给线性规划这一数学方法的成熟与发展奠定了坚实的理论基础。随着时间的推移，能用线性规划解决问题的类型在大量的增加。现在几乎所有的工业领域、商业领域、军事领域及科学技术的研究领域都在不同程度地运用这一数学方法。正是由于它的应用，全球每年各个领域节省了上亿万美元的资金，而各生产部门也创造了大量的经济效益。

我国建国初期就开始应用线性规划这一数学方法。如有关人员曾创造了一个物资调运的图上作业法，中国科学院数学所的研究人员在理论上对这一方法给予了证明，后来在全国又得到了推广，收到了显著的经济效果。有了电子计算机，线性规划如虎添翼，计算能力得到飞速提高，使得它的应用领域更加广泛。20世纪50年代，只能解含有10个约束方程的线性规划问题，60年代初就可以解含有1 000～10 000个约束条件的线性规划问题了。现在利用专门的线性规划软件程序时，只要输入有关的数据，计算机

几乎立即就能把需要的计算结果显示给我们。

线性规划作为一门学科，目前已经成为各高等学校的应用数学系、运筹学系、管理科学系、经济金融系、系统科学系及计算机科学系中普遍开设的一门基础课。特别是近年，随着中学数学教材的改革，线性规划这一数学方法已经走入了高中数学课堂，因此，学习和理解线性规划理论对于师范类高等学校学生有着更为重要的意义。

线性规划实质上是研究在一组线性约束条件下，把一个线性函数极小化或极大化的问题。对解决这类条件极值问题，一般的极值理论是无能为力的，Dantzig 等人提出的单纯形方法是解决此类问题的有效算法。

在本章我们通过几个典型的实例引出线性规划问题，并给出其数学模型及它的标准形式。

第一节 线性规划问题的典型例子与数学模型

一、安排生产问题

一个企业或某个生产部门利用现有的各种不同类型的生产设备生产若干种产品，而各种产品的利润各不相同，各种不同类型的生产设备的生产能力、效率也不同。经营者面临的问题是：如何安排各个设备的生产时间，使得整个企业或部门的总利润最大。

【例 1.1】 生产安排问题

某工厂利用 A_1、A_2、A_3 三台设备，生产 B_1、B_2、B_3 三种不同的产品。各种产品每生产一件在各台设备上所需要的加工时间(单位：min)、各台设备每天的生产能力(每天的工作时间)以及每件产品的单位利润如表 1.1。问怎样安排生产，才能使每天获得的利

润最大?

表 1.1

设　备	每件产品的加工时间/min			设备的生产能力/($min \cdot d^{-1}$)
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	1	1	420
A_2	3	0	2	450
A_3	2	1	2	430
利润/(元·件$^{-1}$)	2	1	1.5	

【解】　假设每天生产 B_1、B_2、B_3 三种产品分别为 x_1、x_2、x_3 件，由于每台设备都不能超过它的生产能力，所以，应满足条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 420 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 450 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 430 \end{cases}$$

而每天的利润应为

$$S = 2x_1 + x_2 + 1.5x_3$$

它是决策变量 x_1、x_2、x_3 的线性函数，称函数 S 为目标函数。

再考虑到每种产品的件数都不可能是负值，即 $x_j \geqslant 0(j = 1,2,3)$。

综上所述，这个生产安排问题可归结为求 $x_j(j = 1,2,3)$，使之满足

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 420 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 450 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 430 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases}$$

并使目标函数

$$S = 2x_1 + x_2 + 1.5x_3$$

的值最大。

可以用 max S 表示 S 的最大值,则上面问题可记为

$$\max S = 2x_1 + x_2 + 1.5x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 420 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 \leqslant 450 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 430 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases}$$

二、运输问题

需要把某种物资从若干个生产地运往若干不同销售地。这种物资从各个生产地被调运到各个销售地的运输方案很多。要解决的问题是:应该如何组织运输,才能使总的运费或运输量最少。

【例 1.2】 运输问题

设有两个砖厂 A_1、A_2,其产量分别为 23 万块和 27 万块,它们生产的砖供应 B_1、B_2、B_3 三个工地,其需要量分别为 17 万块、18 万块和 15 万块,而自各生产地到各工地的运价如表 1.2。问应如何调运,才能使总运费最省?

表 1.2

工地 / 运价 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

【解】 设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量(单位:万块)($i = 1,2;j = 1,2,3$),例如 x_{11} 表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1 砖的数量等等。如表 1.3。

表 1.3

工地 砖厂	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	50

由题意知，A_1、A_2 运往三工地的总数分别为 23、27，即得

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=23$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=27$$

由于三工地 B_1、B_2、B_3 的需求量分别为 17、18、15，即得

$$x_{11}+x_{21}=17$$

$$x_{12}+x_{22}=18$$

$$x_{13}+x_{23}=15$$

而总运费应为

$$S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+$$
$$60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

再考虑到由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量不可能是负值，即 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3)$。

综上所述，这个调运方案可归结为求 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$，使之满足

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=23\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27\\ x_{11}+x_{21}=17\\ x_{12}+x_{22}=18\\ x_{13}+x_{23}=15\\ x_{ij}\geqslant 0\quad(i=1,2;j=1,2,3)\end{cases}$$

并使目标函数

$$S = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$$

的值最小(即总运费最少)。

与例 1.1 类似,我们可以把上面问题记为

$$\min S = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27 \\ x_{11} + x_{21} = 17 \\ x_{12} + x_{22} = 18 \\ x_{13} + x_{23} = 15 \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2; j = 1,2,3) \end{cases}$$

三、下料问题

在生产中经常遇到这样问题,把某种现成的板材或条材截成需要的各种规格,选取何种截法才能使用料最省(或者废料最少)是经营者关心的问题之一。

【例 1.3】 下料问题

某工厂有一批长度为 300 cm 的钢管(数量充分多),要把它们截成长度为 45 cm、80 cm、95 cm 的管料,并要求其根数比例为 5 : 3 : 2, 来配套生产某种零件。问采用怎样的方案进行锯割,才能使得到的三种管料既能配套,又能使残料最少?

【解】 首先,我们用表 1.4 列出各种可能的截法。

表 1.4

截法		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
长度	45 cm	6	4	4	3	2	2	1	1	0	0
	80 cm	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
	95 cm	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
残料 /cm		30	40	25	5	35	20	15	0	30	15

设 $x_j(j=1,2,\cdots,10)$ 表示按照第 j 种截法锯割的钢管的根数,那么截出的长 45 cm 管料的根数为

$$6x_1+4x_2+4x_3+3x_4+2x_5+2x_6+x_7+x_8$$

截出的长 80 cm 管料的根数为

$$x_2+2x_4+x_5+3x_7+2x_8+x_9$$

截出的长 95 cm 管料的根数为

$$x_3+x_5+2x_6+x_8+2x_9+3x_{10}$$

此时,残料的长度为

$$30x_1+40x_2+25x_3+5x_4+35x_5+20x_6+15x_7+30x_9+15x_{10}$$

于是,我们要解决的问题归结为求 $x_j(j=1,2,\cdots,10)$,使之满足条件

$$\begin{cases}6x_1+4x_2+4x_3+3x_4+2x_5+2x_6+x_7+x_8=5a\\ x_2+2x_4+x_5+3x_7+2x_8+x_9=3a\\ x_3+x_5+2x_6+x_8+2x_9+3x_{10}=2a\\ x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,10)\end{cases}$$

并使目标函数

$$S=30x_1+40x_2+25x_3+5x_4+35x_5+20x_6+15x_7+30x_9+15x_{10}$$

取最小值。(这里不妨设 $a=1$,如果 x_j 不是整数,只要取这些分数分母的最小公倍数即可)

我们可以把上面问题记为

$$\min S=30x_1+40x_2+25x_3+5x_4+35x_5+20x_6+15x_7+30x_9+15x_{10}$$

$$\begin{cases}6x_1+4x_2+4x_3+3x_4+2x_5+2x_6+x_7+x_8=5a\\ x_2+2x_4+x_5+3x_7+2x_8+x_9=3a\\ x_3+x_5+2x_6+x_8+2x_9+3x_{10}=2a\\ x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,10)\end{cases}$$

四、投资问题

一投资方欲向几个企业投入一定数量的资金，而各个企业的获利情况、资金的周转周期各不相同。如何分配对各企业的投资数量，使得若干年后获得的利润最高。

【例 1.4】 一投资公司将 1 000 万元的资金对 A、B 两个企业投资，对企业 A 每投资 1 万元，一年后公司可获利润 0.7 万元；对企业 B 每投资 1 万元，两年后公司可获利润 2 万元。对企业 A 每次投资周期必须是一年，对企业 B 每次投资周期必须是两年，到期结算后，以本利的和再作为资金继续对 A、B 两个企业投资。问公司要在第三年底收到最大效益，应该如何分配对 A、B 两个企业的投资数量？

【解】 设投资公司对 A、B 两企业在第一年初的投资额分别为 x_{11}、x_{21} 万元；对 A、B 两企业在第二年初的投资额分别为 x_{12}、x_{22} 万元；在第三年初的投资额分别为 x_{13}、x_{23} 万元。

在第一年初，投资公司投出总金额为 1 000 万元，所以有

$$x_{11} + x_{21} = 1\,000$$

在第一年底，由于对 A 企业的投资周期是一年，对 B 企业的投资周期是二年，所以投资公司只能回收到对 A 企业的第一年的本和利，因为第一年初对 A 企业的投资是 x_{11} 万元，所以年底回收到利润 $0.7x_{11}$ 万元，合计 $x_{11} + 0.7x_{11} = 1.7x_{11}$ 万元，此资金作为第二年初对 A、B 两企业投资资金。

在第二年初，投资公司对 A、B 两企业投资金额为 $1.7x_{11}$ 万元，所以有

$$x_{12} + x_{22} = 1.7x_{11}$$

在第二年底，投资公司回收的金额是两部分的和，一部分是投资公司第二年初对 A 企业投资的本利和为 $x_{12} + 0.7x_{12} = 1.7x_{12}$ 万元，另外一部分是投资公司对 B 企业第一年的投资的本利 x_{21} +