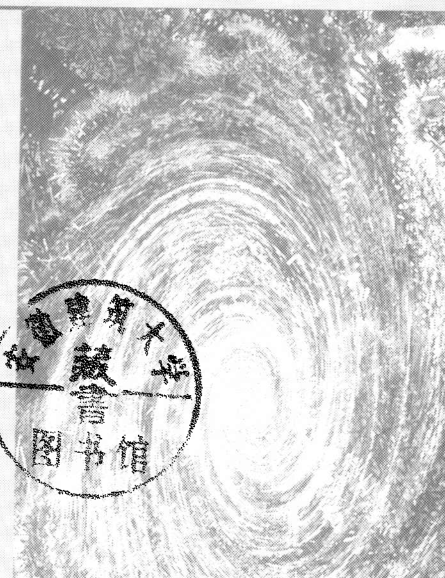
高等院校
精品课程
系列教材

运筹学

熊 伟 编著
武汉理工大学



Operations Research

机械工业出版社
China Machine Press

本书介绍了线性规划、对偶理论、整数规划、目标规划、运输与指派问题、网络模型、网络计划、动态规划、排队论、存储论、决策论与对策论等运筹学主要分支的基本理论、基本概念和计算方法。用较多的例题介绍运筹学在管理、经济等领域中的应用。每章都附有大量基本练习题，还详细介绍了WinQSB软件的操作步骤及应用方法，解决了运筹学某些复杂的计算问题，使运筹学方法能在实际中更好地得以应用和推广。

附录中专门附有上机实验指导书、应用案例、判断题、选择题等学习辅助资料。

本书作为高等院校本科、工商管理硕士（MBA）、公共管理硕士（MPA）运筹学教材，也可作为管理人员和企业决策人员的学习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学 / 熊伟编著. －北京：机械工业出版社，2005.1

（高等院校精品课程系列教材）

ISBN 7-111-15644-7

Ⅰ.运…　Ⅱ.熊…　Ⅲ.运筹学　Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第120310号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：洪海山　　版式设计：刘永青

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005年2月第1版第1次印刷

787mm × 1092mm 1/16 · 20.75印张

定 价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线：（010）68326294

投稿热线：（010）88379007

前言

运筹学是一门以决策支持为目标的学科。运筹学的英文名称是Operations Research（美）或Operational Research（英），缩写为OR，直译是作业研究、操作研究或运作研究。运筹学是OR的意译，取自成语“运筹帷幄之中，决胜千里之外”，具有运用筹划，出谋献策，以策略取胜等内涵。目前国外的管理科学（Management Science）与运筹学的内容基本相同。

运筹学研究的内容[⊖]

运筹学的内容丰富，应用范围非常之广，从军事、政治到管理、经济及工程技术等许多领域都能应用到运筹学的思想和方法。构成运筹学的理论大致分3个部分：

(1) 分析理论。主要研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。常用的数学分析方法有规划论（如线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、目标规划等）、网络模型、最优控制等。随着一些新型学科的发展，还衍生了一些诸如灰规划、模糊规划、随机规划等专门的分析方法。

(2) 决策理论。主要研究方案或策略的最优选择问题。常用的数学分析方法有博弈论、决策论、多目标决策、存储论。

(3) 随机服务理论即排队论。主要研究随机服务系统排队和拥挤现象问题，讨论随机服务系统的服务效率、绩效评价和服务设施的最佳设置等问题。

运筹学的分析方法

运筹学是一门定性分析（如建立数学模型）与定量方法（如求解数学模型）相结合的一门综合应用科学。它广泛应用现有的科学技术和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优或较优决策提供定量依据。

要掌握好运筹学方法并成功应用于实践，不仅要有丰富的自然科学和社会科学的知识，掌握一定的数理基础方法，还要用系统的观念去认识问题分析问题，使研究的对象得到最优或满意的效果。

例如，企业在编制年度计划时，第一步，收集产品市场需求、竞争对手、国内外经济政策环境、利率变化、环境保护等外部信息，充分了解企业内部的技术力量、设计能力、生产能力和资源分布等资料；第二步，分析和整理得到的外部信息和内部资料，制定企业的预定目标，建立产品与资源消耗的关系表达式（即数学模型），充分利用企业资源，得到最大或较大的收益；第三步，运用数学分析方法求解数学模型，得到产品的生产量、资源消耗量和收益等理论值；第四步，分析并运用所求结果，在计划的实施过程中进行有效的监督、控制和调整，尽可能达到预期目标。由此可以看出，要编制出一个合理优秀的计划，需要多学科的知识并运用系统的方法。运筹学方法则贯穿上述四个步骤的全过程，即收集资料、建立模型、求解模型及应用。

⊖ 参阅文献[3]

本书的基本特色

许多学生对运筹学既喜爱又畏惧，喜爱运筹学的巧妙思路和方法，畏惧运筹学的繁杂的数学计算，尤其是规划论部分和大型模型。还有的学生特别是MBA学生感觉到要想将运筹学方法运用到实践中有一定的困难。本书试图在内容的编排、基本概念的学习、应用及软件操作4个方面作一些努力，帮助读者学好用好运筹学方法。

(1) 内容由浅入深，由易到难，注重启发式教学，部分习题编排了具有启发性的思考题。在通俗介绍运筹学的基本内容的同时，适量介绍一些基本理论。第1章到第8章可以供本科生约60学时的教学，第9章到第12章可作为40学时的选修内容。各校根据自己的实际情况也可以对内容进行任意组合。

(2) 加强基本概念和基本方法的训练。每章除了有大量的基本练习题外，附录D、E中收集了大量的判断题、选择题，供学生课外练习，在多媒体教学时也可以供教师作为课堂游戏，用人机对话的形式进行基本概念训练。

(3) 注重理论与实际相结合。例题尽可能将经济和管理的实际背景相联系，还收录了有一定难度的应用案例，可供学生课堂讨论。

(4) 每章详细介绍WinQSB软件的基本操作及其应用。充分利用先进的计算机工具，发挥WinQSB软件功能，解决比较大型数学模型的求解问题。附录B中附有上机实验指导。

关于运筹学软件

目前国内外各种版本的运筹学软件很多，文献[4]列出了数十种求解规划的软件。到目前为止，还没有一种软件包将运筹学的所有计算都包含其中，只能根据不同内容使用不同的软件。本书主要介绍WinQSB软件，该软件包含了运筹学的大部分计算，具体的应用在各章中都有详细介绍。有关Excel软件的操作与应用请参阅文献[12, 13]。

多媒体教学辅助资料

为配合教师进行多媒体教学，出版社为采用本书作为教材的老师提供配套的教师用光盘一张，具体事宜可以通过marketing@hzbook.com联系。

由于编者水平有限，加上时间紧迫，不妥之处在所难免，恳请读者给予指正，并欢迎相互交流讨论提出建议。编者电子邮箱为：xiongw@mail.whut.edu.cn。

熊 伟
武汉理工大学管理学院
2004年10月

目 录

第1章

线 性 规 划

1.1 数学模型

1.1.1 应用模型举例

线性规划（Linear Programming，LP）是运筹学的重要分支之一，计算方法也较成熟，借助计算机可以使得计算更方便，应用也更加广泛和深入。

线性规划通常研究资源的最优利用、设备最佳运行等问题。例如，当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标；企业在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多、利润最大）。

【例1.1】生产计划问题。某企业在计划期内计划生产甲、乙、丙三种产品。这些产品分别需要在设备A、B上加工，需要消耗材料C、D；按工艺资料规定，单件产品在不同设备上加工及所需要的资源如表1-1所示。已知在计划期内设备的加工能力各为200台时，可供材料分别为360、300公斤；每生产一件甲、乙、丙三种产品，企业可获得利润分别为40、30、50元。假定市场需求无限制，企业决策者应如何安排生产计划，使企业在计划期内总的利润最大。

表1-1 产品资源消耗

资源 \ 消耗 \ 产品	甲	乙	丙	现有资源
设备A	3	1	2	200
设备B	2	2	4	200
材料C	4	5	1	360
材料D	2	3	5	300
利润（元/件）	40	30	50	

解 这样一个规划问题可用数学语言来描述，即可以用数学模型表示。假设在计划期内生产这三种产品的产量为待定未知数x_1, x_2, x_3, 称为决策变量。产品生产得越多，获利就越多，但产量要受到设备和生产能力的限制，这种能力的限制就是约束条件。计划期内设备A的有效台时为200，在安排三种产品的计划时，不得超过设备A的有效台时，这个条件可用不等式$3x_1+x_2+2x_3 \leqslant 200$来表示，类似地，对设备B也有相应的不等式$2x_1+2x_2+4x_3 \leqslant 200$；材料消耗总量不得超过供应量，应有$4x_1+5x_2+x_3 \leqslant 360$，$2x_1+3x_2+5x_3 \leqslant 300$。生产的产量不能小于零，即$x_1$，$x_2$，$x_3 \geqslant 0$，这个条件称为决策变量的非负要求。用$Z$表示利润，则有$Z=40x_1+30x_2+50x_3$，这个式子就是目标函数。企业的目标是要使利润达到最大，即目标函数达到最大值，用数学表达式描述就是$\max Z=40x_1+30x_2+50x_3$。因此这个问题的数学模型可归纳为

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \leqslant 360 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

在上面的例题中x_j称为决策变量，不等式组称为约束条件，函数Z称为目标函数，随着讨论问题的要求不同，Z可以是求最大值（如例1.1）也可以是求最小值（如例1.2），因为Z是x_j的线性函数，Z的最大值亦是极大值，最小值亦是极小值，所以有时也将max Z与min Z说成求Z的极大值与极小值。

线性规划的数学模型由决策变量、目标函数及约束条件三个要素构成，其特征是：

(1) 解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，求最大值或最小值；

(2) 解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

如果要求部分或全部变量是整数，则模型称为整数规划模型；如果目标函数或约束条件是非线性的，则模型称为非线性规划模型。

由例1.1知，一个生产计划问题可用线性规划模型来描述。若求出x_1、x_2、x_3的值即最优解，使目标函数达到最大值，就得到一种最优生产计划方案。

【例1.2】 某商场决定：营业员每周连续工作5天后连续休息2天，轮流休息。根据统计，商场每天需要的营业员如表1-2所示。

表1-2 所需营业员数统计表

星期	需要人数	星期	需要人数
一	300	五	480
二	300	六	600
三	350	日	550
四	400		

商场人力资源部应如何安排每天的上班人数，使商场总的营业员最少。

解 设x_j(j=1, 2, …, 7)为休息2天后星期一到星期日开始上班的营业员数量，则这个问题的线性规划模型为

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant 350 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant 400 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 480 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 600 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 550 \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

像这类问题在实际中经常碰到，例如实验室工作人员和医院的医护人员值班问题；生产过程中在制品库存问题，都可建立类似的线性规划模型。

【例1.3】 合理用料问题。某汽车需要用甲、乙、丙三种规格的轴各一根，这些轴的规格分别是1.5m、1m、0.7m，这些轴需要用同一种圆钢来做，圆钢长度为4 m。现在要制造1000辆汽车，最少要用多少圆钢来生产这些轴？

解 这是一个条材下料问题。为了计算简便，这里假定切割的切口宽度为零，在实际应用中，应将切口宽度计算进去。求所用圆钢数量分两步计算，先求出在一根4 m长的圆钢上切割三种规格的毛坯共有多少种切割方案，再在这些方案中选择最优或次优方案，即建立线性规划数学模型。

第一步：设一根圆钢切割成甲、乙、丙三种轴的根数分别为y_1，y_2，y_3，则切割方式可用不等式$1.5y_1+y_2+0.7y_3 \leqslant 4$表示，求这个不等式关于$y_1$，$y_2$，$y_3$的非负整数解并且余料不超过0.7m。例如$y_1=1$，$y_2=1$则$y_3$为2，余料为0.1。像这样的非负整数解共有10组，也就是有10种下料方式，如表1-3所示。

表1-3 下料方案

规格(根) \ 方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
y_1	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
y_2	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
y_3	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料（m）	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

第二步：建立线性规划数学模型。设x_j(j=1, 2, …, 10)为第j种下料方案所用圆钢的根数。则用料最少的数学模型为

$$\min Z = \sum_{j=1}^{10} x_j$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 1000 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 \geqslant 1000 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 5x_{10} \geqslant 1000 \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,10 \end{cases}$$

上面求下料方案时应注意，余料不能超过最短毛坯的长度；最好将毛坯长度按降的次序排列，即先切割长度最长的毛坯，再切割次长的，最后切割最短的，不能遗漏了方案。在实际中，如果毛坯规格较多，毛坯的长度又很短的方案可能很多，甚至有几千个方案，用人工编排方案几乎是不可能的。解决这一问题可以编制一个计算机程序由计算机编排方案，给余料确定一个临界值μ，当某方案的余料大于μ时马上舍去这种方案，从而减少占用计算机内存，也简化了后面的数学模型，例如在表1-3中，去掉余料大于0.4的方案，则剩下7种方案，这时可能得到的是次优方案。也可以将毛坯种类分成若干组来编排方案。

【例1.4】配料问题。某钢铁公司生产一种合金，要求的成分规格是：锡不少于28%，锌不多于15%，铅恰好10%，镍要界于35%~55%之间，不允许有其他成分。钢铁公司拟从五种不同级别的矿石中进行冶炼，每种矿物的成分含量和价格如表1-4所示。矿石杂质在冶炼过程中废弃，求每吨合金成本最低的矿物数量。假设矿石在冶炼过程中金属含量没有发生变化。

表1-4 矿石的金属含量

矿石 \ 合金	锡(%)	锌(%)	铅(%)	镍(%)	杂质(%)	费用（元/吨）
1	25	10	10	25	30	340
2	40	0	0	30	30	260
3	0	15	5	20	60	180
4	20	20	0	40	20	230
5	8	5	15	17	55	190

解 设x_j（j=1, 2, …, 5）是第j种矿石数量，目标函数是总成本最低，得到下列线性规划模型

$$\min Z = 340x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 230x_4 + 190x_5$$

$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_4 + 0.08x_5 \geqslant 0.28 \\ 0.1x_1 + 0.15x_3 + 0.2x_4 + 0.05x_5 \leqslant 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.05x_3 + 0.15x_5 = 0.1 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \leqslant 0.55 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.17x_5 \geqslant 0.35 \\ 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.8x_4 + 0.45x_5 = 1 \\ x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

注意，矿石在实际冶炼时金属含量会发生变化，建模时应将这种变化考虑进去，有可能是非线性关系。配料问题也称配方问题、营养问题或混合问题，在许多行业的生产中都能遇到。

【例1.5】投资问题。某投资公司在第一年有200万元资金，每年都有如下的投资方案可供考虑采纳："假设第一年投入一笔资金，第二年又继续投入此资金的50%，那么到第三年就可回收第一年投入资金的一倍金额。"投资公司决定最优的投资策略使第六年所掌握的资金最多。

解 设

x_1：第一年的投资	x_2：第一年的预留资金
x_3：第二年新的投资	x_4：第二年的预留资金
x_5：第三年新的投资	x_6：第三年的预留资金
x_7：第四年新的投资	x_8：第四年的预留资金
	x_9：第五年的预留资金

第五年不再进行新的投资，因为这笔投资要到第七年才能回收。约束条件保证每年满足如下的关系：追加投资金额+新投资金额+预留资金=可利用的资金总额。

第一年：$x_1+x_2=200$(万元)

第二年：$\left(\frac{x_1}{2}+x_3\right)+x_4=x_2$

第三年：$\left(\frac{x_3}{2}+x_5\right)+x_6=x_4+2x_1$

第四年：$\left(\frac{x_5}{2}+x_7\right)+x_8=x_6+2x_3$

第五年：$\frac{x_7}{2}+x_9=x_8+2x_5$

到第六年实有资金总额为x_9+2x_7，整理后得到下列线性规划模型

$$\max Z=2x_7+x_9$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=200 \\ x_1-2x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-x_3+2x_4-2x_5-2x_6=0 \\ 4x_3-x_5+2x_6-2x_7-2x_8=0 \\ 4x_5-x_7+2x_8-2x_9=0 \\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,9 \end{cases}$$

【例1.6】均衡配套生产问题。某产品由2件甲零件和3件乙零件组装而成。两种零件必须在设备A、B上加工，每件甲零件在A、B上的加工时间分别为5分钟和9分钟，每件乙零件在A、B上的加工时间分别为4分钟和10分钟。现有2台设备A和3台设备B，每天可供加工时间为8小时。为了保持两种设备均衡负荷生产，要求一种设备每天的加工总时间不超过另一种设备总时间1小时。怎样安排设备的加工时间使每天产品的产量最大。

解 设x_1、x_2为每天加工甲、乙两种零件的件数，则产品的产量是

$$y=\min\left(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{3}x_2\right)$$

设备A、B每天加工工时的约束为

$$5x_1+4x_2\leqslant 2\times 8\times 60$$
$$9x_1+10x_2\leqslant 3\times 8\times 60$$

要求一种设备每台每天的加工时间不超过另一种设备1小时的约束为

$$|(5x_1+4x_2)-(9x_1+10x_2)|\leqslant 60$$

约束线性化。将绝对值约束写成两个不等式

$$(5x_1+4x_2)-(9x_1+10x_2)\leqslant 60$$
$$-(5x_1+4x_2)+(9x_1+10x_2)\leqslant 60$$

目标函数线性化。产品的产量y等价于

$$y\leqslant\frac{1}{2}x_1,\ y\leqslant\frac{1}{3}x_2$$

整理得到线性规划模型

$$\max Z = y$$

$$\begin{cases} y \leqslant \dfrac{1}{2}x_1 \\ y \leqslant \dfrac{1}{3}x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leqslant 960 \\ 9x_1 + 10x_2 \leqslant 1440 \\ -4x_1 - 6x_2 \leqslant 60 \\ 4x_1 + 6x_2 \leqslant 60 \\ y, x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划的一般模型

一般地，假设线性规划数学模型中，有m个约束，有n个决策变量x_j (j=1, 2, …, n)，目标函数的变量系数用c_j表示，c_j称为**价值系数**。约束条件的变量系数用a_{ij}表示，a_{ij}称为**工艺系数**。约束条件右端的常数用b_i表示，b_i称为**资源限量**。则线性规划数学模型的一般表达式可写成

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或}=,\ \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或}=,\ \geqslant) b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或}=,\ \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0,\quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

为了书写方便，上式也可写成

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或}=,\ \geqslant) b_i,\quad i=1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0,\quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

在实际中一般$x_j \geqslant 0$，但有时$x_j \leqslant 0$或x_j无符号限制。

1.2 图解法

图解法是直接在平面直角坐标系中作图来解线性规划问题的一种方法。这种方法简单直观，适合于求解两个变量的线性规划问题。

图解法的步骤:

(1) 求可行解集合。分别求出满足每个约束包括变量非负要求的区域，其交集就是可行解集合，或称为可行域。

(2) 绘制目标函数图形。先过原点作一条矢量指向点（c_1, c_2)，矢量的方向就是目标函数增加的方向，称为梯度方向，再作一条与矢量垂直的直线，这条直线就是目标函数图形。

(3) 求最优解。依据目标函数求最大或最小值来移动目标函数直线，直线与可行域边界相交的点对应的坐标就是最优解。

一般地，将目标函数直线放在可行域中，求最大值时直线沿着矢量方向移动，求最小值时直线沿着矢量的反方向移动。

【例1.7】 用图解法求解下例线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 （1）求可行解集合。令两个约束条件为等式，得到两条直线，在第一象限画出满足两个不等式的区域，其交集就是可行解集合或称可行域，如图1-1所示。

（2）绘制目标函数图形。将目标函数的系数组成一个坐标点（3，4），过原点O作一条矢量指向点（3，4），矢量的长度不限，矢量的斜率保持4比3，再作一条与矢量垂直的直线，这条直线就是目标函数图形，目标函数图形的位置任意，如果通过原点则目标函数值$Z=0$，如图1-2所示。

（3）求最优解。图1-2的矢量方向是目标函数增加的方向或称梯度方向，在求最大值时将目标函数图形沿梯度方向平行移动（求最小值时将目标函数图形沿梯度方向的反方向平行移动），直到可行域的边界，停止移动，其交点对应的坐标就是最优解，如图1-3所示。最优解$X=(15,10)$，目标函数的最大值$Z=85$。

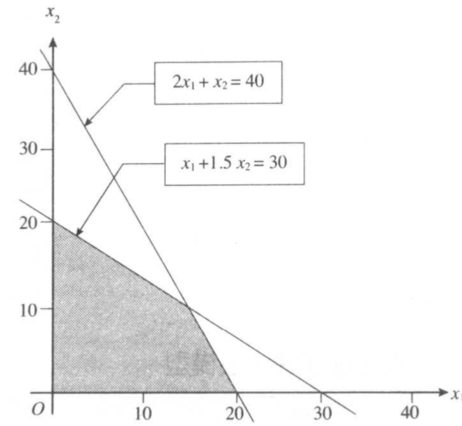


图1-1 可行域

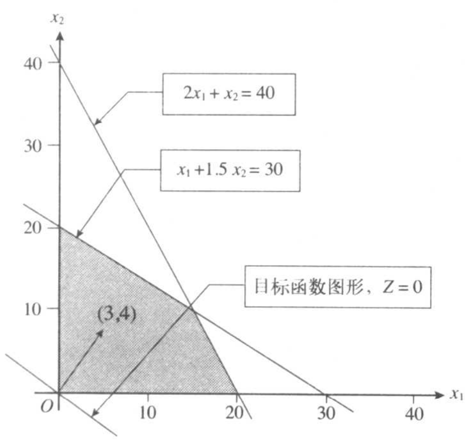


图1-2 目标函数增加的方向

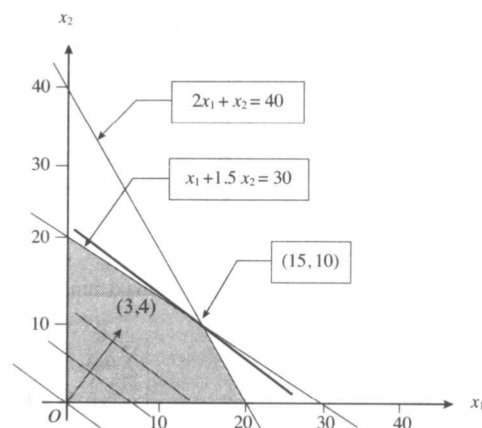


图1-3 平行移动目标函数图形到可行域的边界

【例1.8】 求解线性规划

$$\min Z=x_1+2x_2$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\geqslant 6\\ x_1+x_2\geqslant 4\\ x_1+3x_2\geqslant 6\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 线性规划可行域无界，如图1-4所示。图1-5显示了目标函数的梯度方向。将目标函数的直线向可行域平行移动到B点时目标函数值最小，如图1-6所示，最优解$X=(3,1)$，最优值$Z=5$。

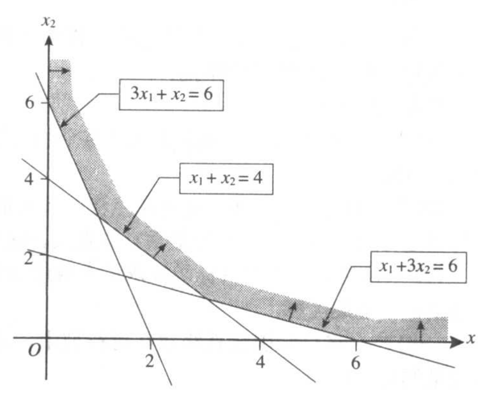


图1-4 例1.8线性规划可行域

【例1.9】 将例1.8的目标函数改为min $Z=5x_1+5x_2$，约束条件不变，求最优解。

解 可行域如图1-4不变，目标函数增加的方向为(5, 5)即斜率等于1，目标函数直线的斜率等于－1，与直线$x_1+x_2=4$平行如图1-7所示。平行移动目标函数直线与可行域相交于线段AB，则线段AB上任意点都是最优解如图1-8所示，即最优解不惟一，有无穷多个，称为多重解。最优解的通解可表示为

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

当$\alpha=0.5$时：$X=(x_1, x_2)=0.5(1, 3)+0.5(3, 1)=(2, 2)$，最优值$Z=20$。

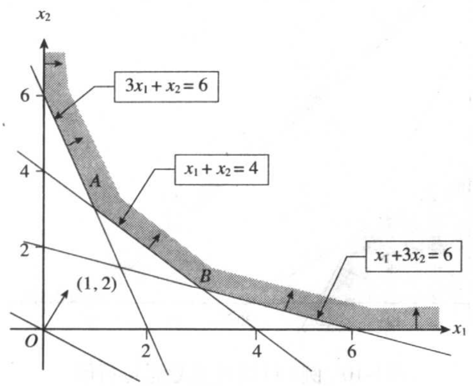


图1-5 例1.8目标函数的梯度方向

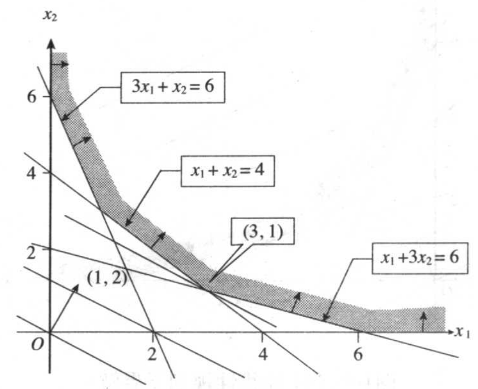


图1-6 例1.8线性规划的最优解

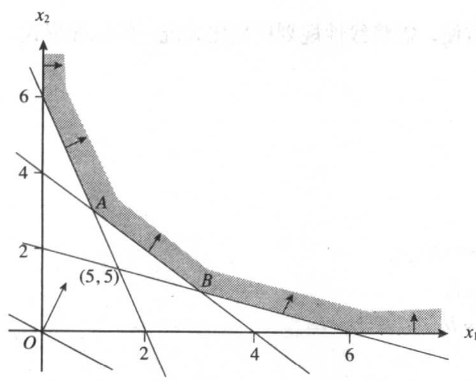


图1-7 例1.9目标函数的梯度方向

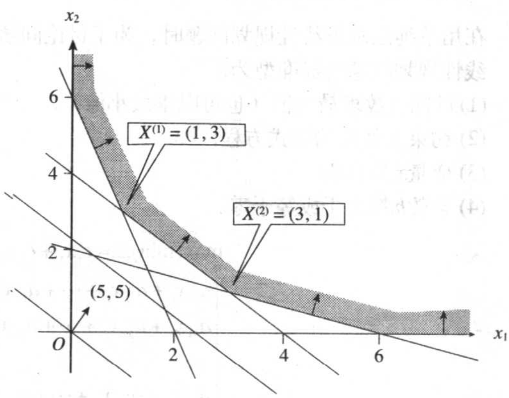


图1-8 例1.9线性规划的最优解

【例1.10】 将例1.8的目标函数改为max $Z=x_1+2x_2$，约束条件不变，求最优解。

解 可行域如图1-4不变，目标函数增加的方向与例1.8相同，如图1-5所示。B点是最小值点，要达到最大值，目标函数直线在可行域中沿梯度方向继续平移直到无穷远，x_1, x_2及Z都趋于无穷大（无上界），这种情形称为无界解，无界解也就是无最优解。如图1-9所示。

【例1.11】 求解下列线性规划

$$\max Z=10x_1+x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 40 & (1)\\ x_1+1.5x_2\leqslant 30 & (2)\\ x_1+x_2\geqslant 50 & (3)\\ x_1, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 约束条件(1)、(2)与约束(3)没有交点，不存在满足所有条件的解，说明线性规划无可行解，无可行解也就没有最优解。如图1-10所示。

由以上例题可知，线性规划的解有四种形式：(1)有惟一最优解(例1.7、例1.8)；(2)有多重解(例1.9)；(3)有无界解(例1.10)；(4)无可行解(例1.11)。前两种情形为有最优解，后两种情形为无最优解。

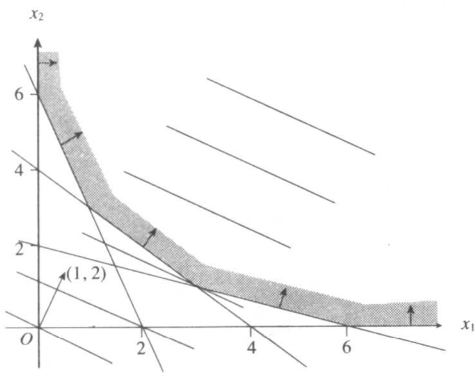


图1-9 例1.10线性规划无界解

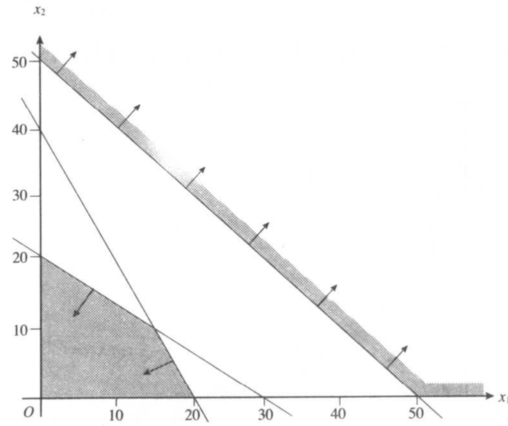


图1-10 例1.11线性规划无可行解

1.3 线性规划的标准型

在用单纯法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型化为统一的标准形式。

线性规划问题的标准型为:

(1) 目标函数求最大值（也可以求最小值）;

(2) 约束条件均为等式方程;

(3) 变量x_j为非负;

(4) 常数b_i都大于或等于零。

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,n;\ b_i \geqslant 0,\ \ i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

或写成下列形式

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0,\ \ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

或用矩阵形式

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix};\ C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

通常X记为$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，有时也写成行向量的形式$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。称$A$为约束方程的系数矩阵，$m$是约束方程的个数，$n$是决策变量的个数，一般情况$m\leqslant n$，且$A$的秩等于$m$，记为$r(A)=m$。

实际问题提出的线性规划模型不一定是标准形式，下面通过实例介绍化标准型的方法。

【例1.12】 将下列线性规划化为标准型

$$\min Z=-x_1+x_2-3x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\leqslant 8\\ x_1+x_2+x_3\geqslant 3\\ -3x_1+x_2+2x_3\leqslant -5\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\text{无符号要求}\end{cases}$$

解 (1) 因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，令$x_3=x_3'-x_3''(x_3',x_3''\geqslant 0)$。

(2) 第一个约束条件是"$\leqslant$"号，在"$\leqslant$"号左端加入松弛变量$x_4(x_4\geqslant 0)$化为等式。

(3) 第二个约束条件是"$\geqslant$"号，在"$\geqslant$"号左端减去剩余变量（也称松弛变量）$x_5(x_5\geqslant 0)$。

(4) 第三个约束条件是"$\leqslant$"号且常数项为负数，因此在"$\leqslant$"号左边加入松弛变量$x_6(x_6\geqslant 0)$，同时两边乘以-1。

(5) 目标函数是最小值，为了化为求最大值，令$Z'=-Z$，得到$\max Z'=-Z$，即当Z达到最小值时Z'达到最大值，反之亦然。

综合起来得到下列标准型

$$\max Z'=x_1-x_2+3x_3'-3x_3''$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=8\\ x_1+x_2+x_3'-x_3''-x_5=3\\ 3x_1-x_2-2x_3'+2x_3''-x_6=5\\ x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

当某个变量$x_j\leqslant 0$时,令$x_j'=-x_j$。当某个约束是绝对值不等式时，将绝对值不等式化为两个不等式，再化为等式。例如约束

$$|4x_1-x_2+7x_3|\leqslant 9$$

将其化为两个不等式

$$\begin{cases}4x_1-x_2+7x_3\leqslant 9\\ -4x_1+x_2-7x_3\leqslant 9\end{cases}$$

再加入松弛变量化为等式。

【例1.13】 将下列规划化为线性规划的标准型

$$\max Z=-|x_1|-|x_2|$$

$$\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 5\\ x_1\leqslant 4\\ x_1,x_2\text{ 无约束}\end{cases}$$

解 此题关键是将目标函数中的绝对值去掉。

令

$$x_1'=\begin{cases}x_1,\ x_1\geqslant 0\\ 0,\ x_1<0\end{cases}\qquad x_1''=\begin{cases}0,\ x_1\geqslant 0\\ -x_1,\ x_1<0\end{cases}$$

$$x_2'=\begin{cases}x_2,\ x_2\geqslant 0\\ 0,\ x_2<0\end{cases}\qquad x_2''=\begin{cases}0,\ x_2\geqslant 0\\ -x_2,\ x_2<0\end{cases}$$

则有

$$|x_1|=x_1'+x_1'',\ x_1=x_1'-x_1''$$

$$|x_2|=x_2'+x_2'',\ x_2=x_2'-x_2''$$