平面三角一题多解

翟连林主编

北京出版社

中学数学智力开发丛书

中学数学智力开发丛书

平面三角一题多解

主编　翟连林

编者　郁　力　王存礼

王家宝　杨志刚

中学数学智力开发丛书

平面三角一题多解

Pingmian Sanjiao yiti Duojie

翟连林　主编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

马 池 口 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米　32开本　13.25印张　294，000字

1990年5月第1版　　1991年6月第2次印刷

印数　7,301—28,000

ISBN　7—200—00840-0/G·204

定　价：4.90元

编 者 说 明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务．要完成这一任务，必须演算一定数量的题目．但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律．这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微．

长期的教学实践使我们体会到：恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度“追踪”，能“以少胜多”地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧．为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套“中学数学智力开发丛书”．这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》．

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总

结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及基本解题规律.

在本书编写过程中，姚桂枝、张文鞠、刘清波、刘金玲、耿雪、杨志强等同志给予很多帮助，在此表示感谢.

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

1988年10月

目　录

第一章　一题多解的意义与作用

一、加深对基本概念、性质、公式和定理的理解

解数学题，一般是从已知条件出发，根据有关的数学概念、性质、公式和定理，逐步推演、化简到题目的结论．在很多情况下，对同一个题目，由于所用的概念、性质、公式或定理不同，就会得到这个题目的不同的解法，收到异途同归的效果．探求三角题的一题多解法，就是要考虑从不同的角度寻求解题途径．这样，虽然是考虑一个题目的解法，却有机会运用到更多的概念、性质、公式或定理，从而加深对所用概念、性质、公式和定理的进一步认识和理解．

例1　求$\operatorname{tg}105^\circ$的值．

【分析1】　求$\operatorname{tg}105^\circ$的值，关键是把角$105^\circ$用特殊角$30^\circ$、$45^\circ$、$60^\circ$、$180^\circ$等来表示，并利用有关公式、定理、特殊角的三角函数值．

如取$105^\circ=45^\circ+60^\circ$，可采用正切的加法定理求解．

【解1】　由正切的加法定理，得

$$\operatorname{tg}105^\circ=\operatorname{tg}(60^\circ+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$=-(2+\sqrt{3}).$$

【分析2】 若取$105°=180°-75°$,则可采用诱导公式,化简求值.

【解2】 根据口诀“奇变偶不变,符号看象限”,得

$$\text{tg}105°=\text{tg}(180°-75°)=-\text{tg}75°$$

$$=-\text{tg}(45°+30°)=-\frac{\text{tg}45°+\text{tg}30°}{1-\text{tg}45°\text{tg}30°}$$

$$=-\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=-(2+\sqrt{3}).$$

【分析3】 若利用公式 $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 及正弦、余弦的加法定理,同样能化简求值.

【解3】 $\text{tg}105°=\frac{\sin105°}{\cos105°}=\frac{\sin(60°+45°)}{\cos(60°+45°)}$

$$=\frac{\sin60°\cos45°+\cos60°\sin45°}{\cos60°\cos45°-\sin60°\sin45°}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}=-(2+\sqrt{3}).$$

【分析4】 若把105°的角看作210°角的半角，则根据下列三个正切的半角公式：

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

又可分别得到此题的以下三个不同解法：

【解4】 ∵ 105°角的终边在第二象限内，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}105^\circ=-\sqrt{\frac{1-\cos210^\circ}{1+\cos210^\circ}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\cos(180^\circ+30^\circ)}{1+\cos(180^\circ+30^\circ)}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1+\cos30^\circ}{1-\cos30^\circ}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$=-(2+\sqrt{3}).$$

【解5】 $$\mathrm{tg}105^\circ=\frac{\sin210^\circ}{1+\cos210^\circ}=\frac{\sin(180^\circ+30^\circ)}{1+\cos(180^\circ+30^\circ)}$$

$$=\frac{-\sin30^\circ}{1-\cos30^\circ}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3}).$$

【解6】 $$\mathrm{tg}105^\circ=\frac{1-\cos210^\circ}{\sin210^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$=-(2+\sqrt{3}).$$

【评注】 尽管求 $\mathrm{tg}105^\circ$ 的值是三角中比较简单的问题，但是从不同的角度分析，就可以得到几种不同的解法；同时，又用到了许多三角中的公式．这样，既打开了解题思路，又加深了对公式的认识和理解．

二、丰富解题的经验

注意解题中的一题多解法，就会促使运用不同的解题思路和解题方法，从而丰富解题经验．

例2 设$\triangle ABC$的三边分别为a、b、c，其对角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，求证：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

【分析1】 本题是三角学中著名的正弦定理，它的证明方法很多. 如，同一个三角形，无论用它的哪条边作底，其边上的高均为此三角形的高，所得三角形面积为同一值. 利用这一性质列式求解，这种解法叫面积法.

【证1】 （面积法）

由三角形面积公式，得

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

$\because$ $\frac{1}{2}abc\neq 0,$

且 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A,$

$\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};$

又 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B,$

$\therefore$ $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$

故 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$

【分析2】 如果利用三角形的边角关系证明此题，则称此法为解三角形法.

【证2】 （解三角形法）

（1）若$\triangle ABC$为直角三角形，且$\angle C=90°$，如图1-1

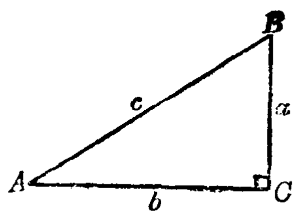

图 1-1

所示.

$$\because \quad \sin A=\frac{a}{c}, \quad \sin B=\frac{b}{c},$$

$$\therefore \quad c=\frac{a}{\sin A}, \quad c=\frac{b}{\sin B},$$

而 $\sin C=\sin 90^{\circ}=1$,

$$\therefore \quad c=\frac{c}{\sin C}.$$

故
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，作 $BD\perp AC$，D为垂足，如图1-2所示.

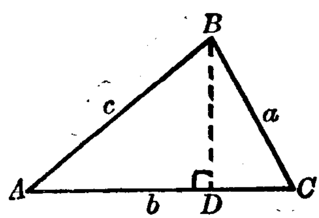

图 1-2

在$Rt\triangle ABD$中，有

$$\sin A=\frac{BD}{c}, \quad \therefore \quad BD=c\sin A,$$

在$Rt\triangle CBD$中，有

$$\sin C=\frac{BD}{a},$$

$$\therefore \quad BD=a\sin C.$$

于是，得

$$c\sin A=a\sin C, \quad \text{即} \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可证 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

故 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

(3) 若$\triangle ABC$为钝角三角形，作$BD\perp AC$，交AC延长线于点D. 如图1-3所示.

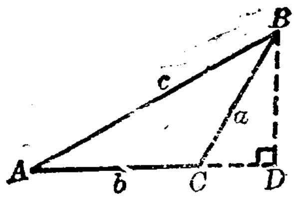

图 1-3

在$Rt\triangle ABD$中，有

$$\sin A=\frac{BD}{c},$$

∴ $BD=c\sin A$;

又 在$Rt\triangle BCD$中，有

$$\sin(180°-C)=\sin C=\frac{BD}{a},$$

∴ $BD=a\sin C$,

于是，得

$$c\sin A=a\sin C,\ 即\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

故 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

根据上述(1)、(2)、(3)的讨论，对任意三角形均有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

【分析3】 借助三角形的一边与三角形外接圆直径的关系：

$$a=2R\sin A,$$

$$b=2R\sin B,$$
$$c=2R\sin C,$$

其中，R为三角形的外接圆半径.

【证3】 证明上述三个等式之一，均有三种情况．下面以推证：

$$a=2R\sin A$$

为例，加以说明.

（1）当角A为锐角时，如图1-4所示.

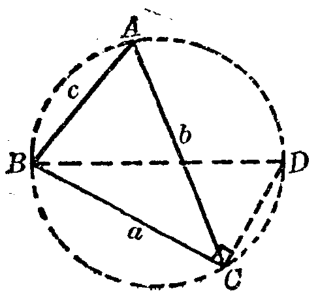

图 1-4

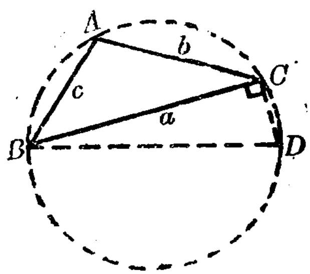

图 1-5

在$Rt\triangle BCD$中，根据锐角三角函数定义，有

$$\sin D=\frac{a}{BD}.$$

而 $\angle A=\angle D$,

且 $BD=2R$，R为$\triangle ABC$外接圆半径.

$\therefore$ $a=2R\sin A$.

（2）当角A为钝角时，如图1-5所示.

在$Rt\triangle BCD$中，有

$$\sin D=\frac{a}{BD}.$$

而　$BD=2R$,

且　$\angle A+\angle D=180°$,

∴　$\sin D=\sin(180°-A)=\sin A$.

于是，代入上式，得

$$a=2R\sin A.$$

(3) 当角A是直角时，有

$$a=2R\sin A.$$

根据以上讨论，不论$\triangle ABC$中的内角A是锐角、钝角或直角，总有

$$a=2R\sin A$$

成立.

同理可证

$$b=2R\sin B$$

$$c=2R\sin C$$

成立.

如果把上述三式分别变形为下列各式：

$$2R=\frac{a}{\sin A},$$

$$2R=\frac{b}{\sin B},$$

$$2R=\frac{c}{\sin C},$$

显然，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

说明： 这里，不仅证得三角形各边与其对角的正弦之比相等，而且，还证得这一比值等于此三角形外接圆的直径．这为正弦定理的应用开辟了更加广阔的途径．

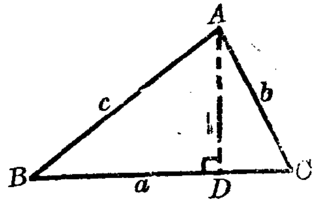

图 1-6

【分析4】 在 $\triangle ABC$ 中，过点A作$AD\perp BC$，如图1-6所示．

由射影定理，得

$$a=c\cos B+b\cos C \quad ①$$

同理

$$b=c\cos A+a\cos C \quad ②$$

$$c=a\cos B+b\cos A \quad ③$$

在此三式基础上，进一步变形，同样可证明正弦定理．

【证4】 （利用射影定理求证）

对于由射影定理求得的上述三式，作以下变形：$a\times①-b\times②$，得

$$\begin{aligned}a^2-b^2&=c(a\cos B-b\cos A)\\&=(a\cos B+b\cos A)(a\cos B-b\cos A)\\&=a^2\cos^2B-b^2\cos^2A.\end{aligned}$$

移项，化简，整理，得

$a^2(1-\cos^2B)=b^2(1-\cos^2A)$，

$$\therefore\quad \frac{a^2}{1-\cos^2A}=\frac{b^2}{1-\cos^2B},$$