冷建华 编著

傅里叶变换

清华大学出版社

冷建华 编著

傅里叶变换

清华大学出版社
北京

内容简介

本书将散见于不同书籍中的有关傅里叶变换的内容汇集在一起，全面完整地论述了傅里叶变换的理论和方法，全书共分 9 章。在第 1 章信号基本概念的基础上，第 2 章介绍了连续傅里叶级数变换和连续傅里叶变换，第 3 章介绍了拉普拉斯变换，第 4 章介绍了离散傅里叶级数变换和序列傅里叶变换，第 5 章介绍了 Z 变换，第 6 章介绍了离散傅里叶变换。在介绍了所有 7 种傅里叶变换后，第 7 章和第 8 章集中介绍了离散傅里叶变换的各种快速算法。最后一章简要地介绍了一般的变换理论以及一般变换的主要应用。

本书对从事通信、雷达、声纳、导航、遥测、遥感、遥控以及各种信号处理工作的信息科学和技术工作的学者、研究人员以及初学者将是一本好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

傅里叶变换/冷建华编著. —北京：清华大学出版社，2004
ISBN 7-302-08308-8

Ⅰ.傅…　Ⅱ.冷…　Ⅲ.傅里叶变换　Ⅳ.O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 020934 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969

组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：刘晓艳
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　印张：16.25　字数：336 千字
版　　次：2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08308-8/O・351
印　　数：1～4000
定　　价：25.00 元

前 言

傅里叶变换是大家所熟悉的一种变换，又是一种令人感到陌生的变换！随着信号从模拟信号到数字信号，信号处理从模拟信号处理到数字信号处理，18 世纪末和 19 世纪初诞生的傅里叶变换发生了巨大的变化。

傅里叶变换的丰富和发展，极大地促进了信息科学的丰富和发展。现代的信息科学和技术离不开傅里叶变换的理论和方法。

可惜的是，傅里叶变换理论和方法的介绍分散在不同的书籍中。《高等数学》仅从数学的角度，在级数的章节中讨论了连续傅里叶级数。《复变函数》也仅从数学的角度，介绍了拉普拉斯变换。《积分变换》只介绍连续时间信号的傅里叶变换和拉普拉斯变换。《数字信号处理》仅介绍离散时间信号的傅里叶变换。《电路、信号与系统》除了介绍连续时间信号的傅里叶变换外，对离散时间信号的傅里叶变换，仅涉及了一个 Z 变换，而对离散时间信号的离散傅里叶级数变换、离散傅里叶变换和序列傅里叶变换，并没有作进一步的介绍。

由于傅里叶变换的理论和方法散见在不同的书籍中，使一些概念和术语名出多门。同一个概念在不同的书籍中有时使用不同的名称，而傅里叶变换家族的不同成员在不同的书籍中有时却有着相同的名称，这给读者，尤其是初学者的学习造成了不少困难。由于傅里叶变换的不同成员在不同的书籍中讨论，使读者对傅里叶变换只有一些零碎的部分知识，无法从整体上去把握这种重要的变换。

本书是一本全面完整论述傅里叶变换理论和方法的书。在本书中，不仅介绍连续时间信号的傅里叶变换，如连续傅里叶级数变换、连续傅里叶变换和拉普拉斯变换，而且介绍离散时间信号的傅里叶变换，如离散傅里叶级数变换、序列傅里叶变换、Z 变换和离散傅里叶变换。本书详细地给出了这七种傅里叶变换的定义、性质和计算，讨论了其间的相互关系，介绍了离散傅里叶变换的各种快速算法（FFT 算法）。最后，从傅里叶变换出发，本书简要地介绍了一般的变换理论以及一般变换的应用。

本书对从事通信、雷达、声纳、导航、遥测、遥感、遥控以及各种信号处理工作的信息科学和技术工作的学者、研究人员以及初学者将是一本好的参考书、一本可供入门的教材。

鉴于作者水平有限，错误之处，请读者指正。

著 者

2004.05.10

目 录

绪　论

17 世纪和 18 世纪，在牛顿(Newton)和莱布尼茨(Laibniz)等科学巨人的推动下，数学获得了飞速的发展。随着函数、极限、微积分和级数理论的创立，法国数学家傅里叶(Jean-Baptiste Fourier, 1768—1830)在 1822 年发表了题为《热的解析理论》的论文。在该论文中，傅里叶提出，以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 可展开成无限多个正弦函数和余弦函数的和，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{0.1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{0.2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{0.3}$$

(0.1)式就是著名的傅里叶级数。在以后的工作中，傅里叶将傅里叶级数从以 2π 为周期的周期函数推广到任意周期的周期函数，又从周期函数推广到非周期函数，并提出了傅里叶积分。傅里叶级数与傅里叶积分的提出，奠定了傅里叶变换的基础。现在我们知道，傅里叶级数就是连续傅里叶级数变换的反变换，傅里叶积分则是连续傅里叶变换的反变换。

作为早期的傅里叶变换之一，必须提到拉普拉斯变换，拉普拉斯变换也是一种傅里叶变换。事实上，在 18 世纪末和 19 世纪初的法国，拉普拉斯(Laplace)在数学界的地位高于傅里叶。早在傅里叶级数提出的 40 年前，即 1782 年，拉普拉斯就提出了拉普拉斯变换。

傅里叶级数、傅里叶积分和拉普拉斯变换形成了早期傅里叶变换家族的三种变换。傅里叶变换是源于数学研究的，早期的傅里叶变换是数学分析的一个分支。随着电磁理论和技术的产生和发展，尤其是电子通信与电信号理论和技术的产生与发展，傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换在电磁理论和技术、电信号理论和技术等领域得到了广泛的应用。

在模拟信号传输和模拟信号处理的时代，傅里叶变换只是一种用于分析连续时间信号和系统的数学工具。为了实际地获得各种复杂信号中特定频率的分量，工程师们应用由电阻、电容、电感等模拟元器件为基础构成的模拟滤波器。通过不同频率的窄带滤波，人们得到由傅里叶变换所预计的信号中频率分量的幅度和相位。

这种用模拟滤波器给出傅里叶变换数值的方法不仅麻烦，而且由于窄频带信号是由多个频率分量组成的，因此所得到的数值很不准确。随着大规模集成电路和超大规模集成电路的发展以及计算机技术的进步，随着模拟信号变为数字信号，从 20 世纪 60 年代开始，产生和发展了由计算机和各种数字硬件处理信号的理论和方法。在这种称为数字信号处理的理论和方法的产生及发展过程中，傅里叶变换家族出现了新的成员。这些新的成员是离散周期信号的离散傅里叶级数变换、离散时间信号的序列傅里叶变换、离散时间信号的 Z 变换和典型有限序列的离散傅里叶变换。

新的计算机计算方法使傅里叶变换数值的计算不仅快速方便，而且大大地提高了计算结果的准确性。数字信号处理的理论和方法给信号处理带来了巨大的好处，但也带来了一些概念上的复杂和“混乱”。

由于傅里叶变换的理论和方法被分散在不同的书籍中讨论，使一些概念和术语名出多门。同一个概念在不同的书籍中，有时会有不同的名称。傅里叶变换家族的不同成员在不同的书籍中，有时却有着相同的名称。这给读者的学习造成了不少困难。而且由于傅里叶变换的不同成员在不同的书籍中讨论，使读者对傅里叶变换只有一些零碎的部分知识，无法从整体上去把握这种重要的变换。

傅里叶变换是源于数学的，在 19 世纪的数学研究中产生了傅里叶变换。傅里叶变换又是工程技术的理论基础，20 世纪的信息科学以傅里叶变换为基石。本书的撰写是从信号处理的工程角度着眼的，从工程的角度全面完整地介绍傅里叶变换，是本书的出发点，也是本书的目的。

第1章　信　号

1.1　信号的一般概念

本书介绍的是信号的各种**傅里叶变换**(Fourier transform),为了方便今后的讨论,作为本章同时也是本书的第1节,我们首先介绍一下**信号**(signal)的一般概念。

世界是由物质组成的,一切物质都处在不间断的运动之中。物质世界的任何变化都可以看作信号。譬如,温度的高低、压力的升降是信号;声音的大小、光线的明暗是信号;不同的气味、相异的感觉是信号;电压的变化、电流的波动当然更是众所周知的信号。

人们的日常生活离不开信号。人通过自己的眼、耳、鼻、舌、身感知周围的各种信号,从而了解自己的环境、确定自己的行为、安排自己的生活。

人们通过探测和研究自然界发出的各种信号,深入地认识自然界的各种特性。由所研究的各种不同的信号,产生出了各不相同的科学研究部门。例如,天体信号的研究是天文学的基本内容,而对原子变化的研究则是物理学的重要课题等。

人们通过调查和分析人类社会发出的各种信号,不断地认识人类社会本身、揭示人类社会的发展规律。根据社会上出现的各种不同的情况,提出各种不同的处理方法,推动着人类社会的进步。

由此可见,信号无处不在。在日常生活、工农业生产、科学研究、国防建设中都离不开信号。但是在科学不发达的时代,人们对信号的接收和利用完全是自然方式的,对信号的认识非常肤浅,完全谈不上对信号的处理。随着科学技术的发展,特别是电的发现和电信号的应用,人们对信号的认识大大地深化了,开始了自觉利用信号的新时期。计算机的出现和大规模集成电路的进展,更使信号的产生、传输、处理和应用进入了一个前所未有的新阶段。

信号对人们来说是重要的,它的重要性首先表现在能给人们提供各种所需要的信息(information)。所谓信息,在信息论中有着严格的定义。若用一句通俗的话来说明,**信息**就是信号中所包含着的有用内容。

人们用声音信号(语言)来表达自己的思想、感情,提出自己的要求,这是最普通、也是最大量地利用信号提供信息的例子。古时用烽火告诉人们关于战争的信息,次声波告诉人们风暴即将到来,宇宙射线带来了太空中无穷的奥秘,所有这些,都是信号提供信息的例子。

信号中包含了人们所需要的信息,显然,信号可以作为载体来传送信息。人们应用电

流的变化进行远距离通话(电话),应用声音的变化探测海中的物体(声纳)。至于广播、电视、传真等,更是大家熟悉的利用信号传输信息的实例。

在科学技术高度发达的今天,自动化是现代化的重要标志,它的最新进展是人工智能的研究和实现。无论是实现自动控制,还是设计人工智能,都离不开信号。人们用信号作为控制的工具,使远距离的、太空中或海底的各种机械,按照人们的意志动作,完成各种复杂的任务。

信号是多种多样的。人们按不同的标准,从不同角度将信号进行分类。

1　电信号和非电信号。电参量的变化形成的信号统称为电信号,例如电压的变化、电流的变化等。而由非电参量的变化形成的信号统称为非电信号,如声音信号、光信号等。由于电子技术的飞速发展,电信号的产生、转换、传输和处理都远较其他信号方便,从而使电信号得到了广泛的应用。因此,各种信号往往首先转变成电信号。在作了种种必要的处理后,最后再转变成相应的非电信号。

2　确定信号和随机信号。信号是一种变化,它或者是某个参量随时间变化,或者是随空间变化,或者随另外的一种或几种参量的变化而变化。若在任一给定的时间、空间或某个参量值,该信号参量的数值都是确定的,则这种信号就是确定信号。各种信号发生器中产生的信号都是确定信号。若在给定的时间、空间或某个参量值,信号参量按概率可取一个以上的值,则称这种信号为随机信号。噪声就是随机信号的典型例子。

3　一维信号和多维信号。若信号只随某一个参量的变化而变化,这样的信号称为一维信号,如仅随时间变化的电流、电压等。若信号随两个或两个以上参量的变化而变化,这种信号称为多维信号。例如,各种静止图像,其明暗随坐标 x 和 y 变化,因此它们是二维信号。

4　连续时间信号和离散时间信号。通常我们把信号都看作是随时间变化的,尽管实际上不一定是时间,而可能是空间坐标或其他参量。可是,鉴于我们接触最多的还是时间信号,不失一般性,我们把信号一概看作时间信号。把时间信号变成空间信号或其他参量的信号是容易的,无非是更换一下自变量的符号,这并不改变问题的实质。

对时间信号,如果在任何有限的时间间隔内,信号都取无限个值,则称它为**连续时间信号**(continuous-time signal)。反之,在任何有限的时间间隔内,信号都只取有限个值,则称它为**离散时间信号**(discrete-time signal)。话音信号、温度变化信号等是连续时间信号,而计算机输出的数字则是离散时间信号。

1.2　连续时间的基本信号

连续时间的基本信号是连续时间情形的傅里叶变换的基础,本节对连续时间基本信号做一简要的介绍。

连续时间信号在数学上可以用函数 $x_a(t)(-\infty<t<+\infty)$表示，其中下标 a 表示模拟(analog)。**单位冲激信号**是最简单的连续时间基本信号，它的表示式为

$$\delta_a(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \tag{1.1}$$

并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1.2}$$

这种信号如图 1.1(a)所示。图中，纵坐标轴上带箭头的线段表示$+\infty$。

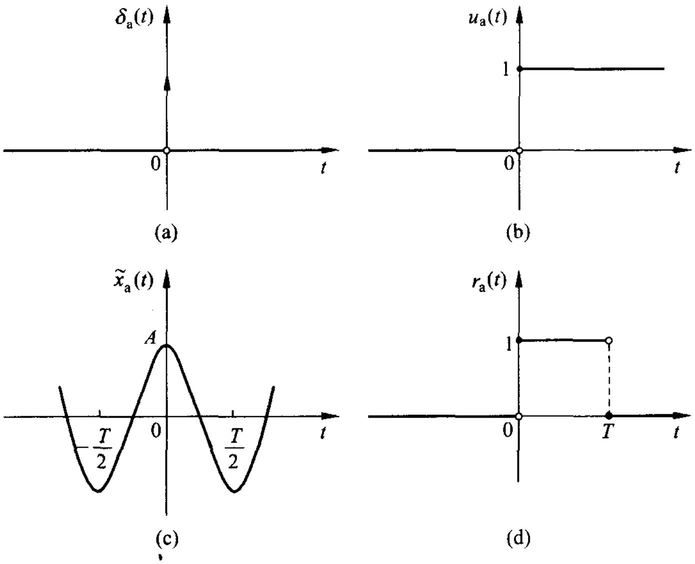

图 1.1 连续时间的基本信号

另一种基本的连续时间信号是**单位阶跃信号**，它的表示式为

$$u_a(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1.3}$$

其图形如图 1.1(b)所示。

在连续时间信号的分析过程中，**单位复指数信号**起着重要的作用，它的表示式为

$$\tilde{x}_a(t)=e^{j\Omega t} \tag{1.4}$$

式中，Ω 为单位复指数信号的**模拟角频率**(analog angular frequency)，并且

$$\Omega=2\pi F=\frac{2\pi}{T} \tag{1.5}$$

其中，F 和 T 分别为**模拟频率**(analog frequency)和周期。

与单位复指数信号有着密切关系的是**正弦信号**(或余弦信号),它的表示式为

$$\tilde{x}_a(t) = A\sin(\Omega t + \phi) \tag{1.6}$$

式中 A 和 ϕ 分别为正弦信号的幅度和初相位。Ω 为正弦信号的模拟角频率,其情形与单位复指数信号时相同。容易看出,无论是正弦信号还是单位复指数信号都是周期信号,我们用顶端的波纹号"～"来表示这种周期性。$\phi=\frac{\pi}{2}$时正弦信号的曲线如图 1.1(c)所示。

单位矩形信号也是一种基本的连续时间信号,它的表示式为

$$r_a(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < T \\ 0, & 其他 \end{cases} \tag{1.7}$$

这种信号如图 1.1(d)所示。显然,它的曲线是矩形形状的,这是把它称作矩形信号的缘由。

1.3 离散时间的基本信号

在介绍了连续时间的基本信号后,本节介绍几种离散时间的基本信号,它们是离散时间情形的傅里叶变换的基础。离散时间的基本信号中,最简单的是**单位冲激序列** $\delta(n)$,它的表示式为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

式中,n 为整数,其线图如图 1.2(a)所示。

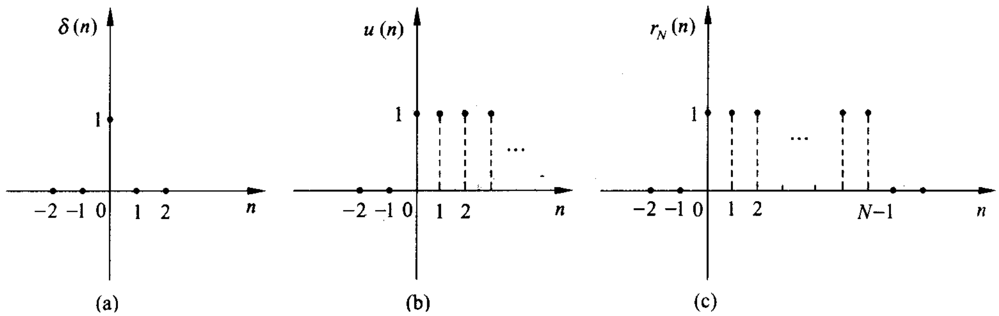

图 1.2 三种基本序列

由上式可见,这种序列除了在 $n=0$ 时序列值为 1 外,其他地方的序列值都等于零。它在数字信号处理领域中,有着重要的理论价值。$\delta(n)$的许多重要性质将在以后的讨论中一一讲述。

另一种离散时间的基本信号是**单位阶跃序列** $u(n)$。它的表示式为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,2,\cdots \\ 0, & n\text{ 为负整数}\end{cases} \tag{1.9}$$

其线图如图 1.2(b)所示。它与单位冲激序列 $\delta(n)$有下述关系

$$u(n)=\sum_{i=0}^{+\infty}\delta(n-i) \tag{1.10}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m) \tag{1.11}$$

并且

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)=\Delta u(n) \tag{1.12}$$

即单位冲激序列是单位阶跃序列的一阶差分。

单位矩形序列 $r_N(n)$也是一种离散时间的基本信号，它的表示式为

$$r_N(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & \text{其他整数}\end{cases} \tag{1.13}$$

它的线图如图 1.2(c)所示。容易看出，$r_N(n)$的包络是一个矩形。

单位矩形序列 $r_N(n)$非零值的个数 N 称为单位矩形序列的长度。显然，当 $N=1$ 时

$$r_1(n)=\delta(n)$$

当 $N\to+\infty$时

$$r_{+\infty}(n)=u(n)$$

在一般情况下，$r_N(n)$和 $u(n)$有下述关系

$$r_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{1.14}$$

单位复指数序列是第四种离散时间的基本信号，单位复指数序列的表示式为

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\quad(-\infty<\omega<+\infty,n\text{ 为整数}) \tag{1.15}$$

容易看出，该序列的值一般是复数，因此单位复指数序列是复序列。式中，ω 被称为复指数序列的**数字角频率**(digital angular frequency)。在数值上，它等于 n 每增加 1 时相位角度的增加，因此，ω 的单位是弧度(rad)。数字角频率 ω 和模拟角频率 Ω 不同，模拟角频率是相位对时间的导数，单位是弧度/秒，这是应当严格加以区别的。和模拟信号的情形相似，$f=\frac{\omega}{2\pi}$为复指数序列的**数字频率**(digital frequency)。显然，数字频率 f 是一个无量纲的物理量。

一般地说，离散时间信号可由连续时间信号的样本值得到，即

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT_s}=x_a(nT_s) \tag{1.16}$$

式中，T_s 是连续时间信号的抽样周期，其中下标 s 表示抽样 sample。由此，单位复指数序列和连续单位复指数信号间的关系如下

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\big|_{t=nT_s}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T_s n} \tag{1.17}$$

式中，ω 是离散时间信号的数字角频率，Ω 是连续时间信号的模拟角频率。由上式容易看出

$$\omega = \Omega T_s \tag{1.18}$$

这表明，数字角频率 ω 等于模拟角频率 Ω 和抽样周期 T_s 的乘积。

由 $\omega=2\pi f$ 和 $\Omega=2\pi F$，可以得到数字频率 f 和模拟频率 F 间的关系如下

$$f = FT_s = \frac{F}{F_s} \tag{1.19}$$

这意味着，数字频率 f 可以看作模拟频率 F 对抽样频率 F_s 的归一化频率。

由(1.15)式可以看出，单位复指数序列 $e^{j\omega n}$ 在频域具有周期性。对数字角频率 ω 而言，它以 2π 为周期，即

$$e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n} \quad (-\infty < \omega < +\infty) \tag{1.20}$$

因此，数字角频率 ω 相差 $2k\pi$(k 为整数)的单位复指数序列完全相同。如在任意一个长为 2π 的区间上选取 ω 的值，可以得到全部的单位复指数序列。所以，在理论和实践上，只需考虑 ω 在某个长为 2π 区间上的复指数序列就够了，通常选为$[-\pi,\pi]$，称其为复指数序列数字角频率 ω 的主值区间。

需要指出的是，尽管复指数序列是离散时间信号，n 只能取离散的整数值，但它的数字角频率 ω 和数字频率 f 的取值却是连续的，可以取任意的实数值。

一般复指数序列的表达式为

$$x(n) = X(\omega)e^{j\omega n} \tag{1.21}$$

式中，$X(\omega)$往往是复数，是复指数序列的复振幅。它的模数$|X(\omega)|$，叫做复指数序列的幅度，幅角 $\mathrm{Arg}[X(\omega)]$叫做复指数序列的初相位。

第五种离散时间的基本信号是**单位正弦序列**。单位正弦序列的表示式为

$$x(n) = \sin\omega n \quad (-\infty < \omega < +\infty, n \text{ 为整数}) \tag{1.22}$$

其包络图如图1.3所示。容易看出，它的包络是正弦曲线。

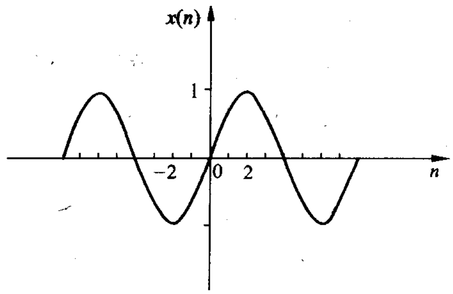

图1.3 单位正弦序列

单位正弦序列和单位复指数序列有下述关系

$$\sin\omega n = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}) \tag{1.23}$$

由上式显然可以看出，ω 也是正弦序列的数字角频率，它的意义和复指数序列时完全一样。因此，ω 的取值也是连续的，$[-\pi,\pi]$也是它的主值区间。

单位正弦序列和连续单位正弦信号有下述关系

$$\sin\omega n = \sin\Omega t \mid_{t=nT_s} = \sin\Omega T_s n \tag{1.24}$$

容易看出，由上式也可以得到与(1.18)式完全相同的数字角频率 ω 和模拟角频率 Ω 之间的关系。

与单位正弦序列相对应，还有下述单位余弦序列

$$x(n) = \cos\omega n \quad (-\infty < \omega < +\infty, n\ 为整数) \tag{1.25}$$

单位复指数序列与单位正弦序列和单位余弦序列有下述关系

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} = \cos\omega n + \mathrm{j}\sin\omega n \tag{1.26}$$

一般正弦序列的表达式为

$$x(n) = A(\omega)\sin(\omega n + \beta(\omega)) \tag{1.27}$$

式中，$A(\omega)$和 $\beta(\omega)$分别为正弦序列的幅度和初相位。容易看出，对单位正弦序列而言，$A(\omega)=1,\beta(\omega)=0$，而对单位余弦序列，则有 $A(\omega)=1,\beta(\omega)=\frac{\pi}{2}$，即

$$\cos\omega n = \sin\left(\omega n + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.28}$$

前面介绍了五种基本序列，即五种基本的离散时间信号。这些序列在理论和实践上都很重要，今后在离散形式的傅里叶变换的讨论中会多次用到这些序列。

1.4 连续时间信号的卷积和相关

本节将介绍连续时间信号的卷积和相关运算，这对今后讨论连续时间形式的傅里叶变换是有用的。连续时间信号的卷积(convolution)运算有线性卷积、周期卷积和循环卷积三种。设 $x_a(t)$和 $y_a(t)$为一般的连续时间信号，则 $x_a(t)$和 $y_a(t)$的**线性卷积**(linear convolution)定义为

$$g_a(t) = x_a(t) * y_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)y_a(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.29}$$

显然，$g_a(t)$也是一个连续时间信号。线性卷积具有冲激不变性，即

$$x_a(t) * \delta_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\delta_a(t-\tau)\mathrm{d}\tau = x_a(t)$$

设 $\tilde{x}_a(t)$和 $\tilde{y}_a(t)$是周期均为 T 的连续时间周期信号，则 $\tilde{x}_a(t)$和 $\tilde{y}_a(t)$的**周期卷积**

(periodic convolution) 定义为

$$\tilde{g}_a(t) = \tilde{x}_a(t) \tilde{*} \tilde{y}_a(t) = \int_0^T \tilde{x}_a(\tau)\tilde{y}_a(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.30}$$

周期卷积也具有冲激不变性,即

$$\tilde{x}_a(t) \tilde{*} \tilde{\delta}_a(t) = \int_0^T \tilde{x}_a(\tau)\tilde{\delta}_a(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \tilde{x}_a(t)$$

设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为连续时间的有限信号,并且

$$x_a(t) = y_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geqslant T) \tag{1.31}$$

则 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的**循环卷积**(cyclic convolution) 定义为

$$g_a(t) = x_a(t) \circledast y_a(t) = r_a(t)\int_0^T x_a(\tau)y_a(\langle t-\tau\rangle_T)\mathrm{d}\tau \tag{1.32}$$

式中,$\langle t-\tau\rangle_T$ 表示对 $t-\tau$ 做模 T 运算,即 $t-\tau$ 除以 T 所得的余数,显然 $0 \leqslant \langle t-\tau\rangle_T < T$,$r_a(t)$ 为单位矩形信号。显然

$$g_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geqslant T) \tag{1.33}$$

若仅考虑 $0 \leqslant t < T$,则

$$g_a(t) = x_a(t) \circledast y_a(t) = \int_0^T x_a(\tau)y_a(\langle t-\tau\rangle_T)\mathrm{d}\tau \quad (0 \leqslant t < T) \tag{1.34}$$

连续时间信号的相关(correlation)运算也有线性相关、周期相关和循环相关三种。设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为一般的连续时间信号,则 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的**线性相关**(linear correlation) 定义为

$$g_{xy}(t) = x_a(t) \sqsupset y_a(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)y_a^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau \tag{1.35}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau+t)y_a^*(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.36}$$

式中,$y_a^*(\tau)$ 表示 $y_a(\tau)$ 的共轭运算。

设 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 是周期均为 T 的连续时间周期信号,则 $\tilde{x}_a(t)$ 和 $\tilde{y}_a(t)$ 的**周期相关**(periodic correlation)定义为

$$\tilde{g}_{xy}(t) = \tilde{x}_a(t) \,\tilde{\sqsupset}\, \tilde{y}_a(t) = \int_0^T \tilde{x}_a(\tau)\tilde{y}_a^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau \tag{1.37}$$

设 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 为连续时间的有限信号,并且

$$x_a(t) = y_a(t) = 0 \quad (t < 0, t \geqslant T) \tag{1.38}$$

则 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 的**循环相关**(cyclic correlation) 定义为

$$g_{xy}(t) = x_a(t) \ominus y_a(t) = r_a(t)\int_0^T x_a(\tau)y_a^*(\langle \tau-t\rangle_T)\mathrm{d}\tau \tag{1.39}$$

显然