XINBIANGAODENGSHUXUEJIAOCHENG

新编高等数学教程

（下册）

翟忠信
刘 耀
段炎伏 编 著

兰州大学出版社

新 编
高等数学教程

（下册）

翟忠信 刘 耀 段关沃 编著

兰州大学出版社

新编高等数学教程

（下册）

翟忠信　刘耀　段[illegible]

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 308 号　电话：8617156　邮编：730000

E-mail：press@lzu.edu.cn

http://www.lzu.edu.cn/press/index.htm

兰州大学出版社激光照排中心排版

甘肃静宁印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　　印张：13.625

2000 年 1 月第 1 版　　2000 年 1 月第 1 次印刷

字数：341 千字　　印数：1～4000 册

ISBN 7－311-01550-2/G・607　　定价：18.00 元

目　　录

第八章　空间解析几何及矢量代数初步…………………………（1）
§1　空间直角坐标系 ………………………………………（1）
§1.1　坐标系的建立……………………………………（1）
§1.2　距离公式 …………………………………………（5）
§2　矢量代数初步 …………………………………………（6）
§2.1　矢量的概念 ………………………………………（6）
§2.2　矢量的线性运算 …………………………………（10）
§2.3　矢量的共线与共面 ………………………………（13）
§2.4　矢量在轴上的投影 ………………………………（15）
§2.5　矢量的分解与坐标表示…………………………（17）
§2.6　矢量的数积 ………………………………………（20）
§2.7　矢量的矢积 ………………………………………（23）
§2.8　矢量的混合积 ……………………………………（26）
*§2.9　二重矢积 ………………………………………（29）
§3　空间曲面和曲线的一般概念………………………（30）
§3.1　空间曲面 …………………………………………（30）
§3.2　空间曲线及其在坐标面上的投影 ………………（34）
§4　空间平面与直线………………………………………（36）
§4.1　平面方程的点法式与一般式 ……………………（37）
§4.2　平面方程的其它几种形式 ………………………（39）
§4.3　空间直线 …………………………………………（43）

§4.4 点、线、面之间的关系 …… (45)
§5 二次曲面 …… (50)
§5.1 旋转曲面与锥面 …… (50)
§5.2 压缩与伸展 …… (53)
§5.3 二次曲面的各种类型 …… (54)
*§6 空间直角坐标的变换 …… (65)
§6.1 平移 …… (66)
§6.2 旋转 …… (67)
§6.3 一般变换 …… (68)
§6.4 欧拉角 …… (69)
习题八 …… (72)
第九章 多元函数微分法及其应用 …… (77)
§1 多元函数的基本概念与 R^n 中的点集 …… (77)
§1.1 多元函数的定义 …… (77)
§1.2 R^n 中的某些特定点集 …… (79)
§1.3 二元函数的图形 …… (82)
§2 多元函数的极限与连续性 …… (82)
§2.1 多重极限 …… (82)
§2.2 连续与间断 …… (85)
§2.3 连续函数的运算法则 …… (87)
§2.4 有界闭区域上的连续函数 …… (88)
§3 偏导数 …… (89)
§3.1 偏导数的定义 …… (89)
§3.2 计算举例 …… (91)
§3.3 可导与连续 …… (92)
§4 多元函数的微分 …… (93)
§4.1 全微分的概念 …… (93)

§4.2 可微与可导 …………………………………………………… (94)
§4.3 全微分在近似计算和误差估计中的应用 ………………… (98)
§5 复合函数的导数……………………………………………… (99)
§5.1 连锁规则 ……………………………………………………… (99)
§5.2 几种情况 …………………………………………………… (101)
§6 全微分基本定理 ………………………………………………… (103)
*§7 方向导数、梯度 ………………………………………………… (105)
§7.1 射线的参数方程 ………………………………………… (105)
§7.2 方向导数 …………………………………………………… (106)
§7.3 梯度 ……………………………………………………… (109)
§8 隐函数的导数 ………………………………………………… (109)
§8.1 由一个方程确定的隐函数 ……………………………… (110)
*§8.2 由方程组所确定的隐函数 …………………………… (112)
§9 几何方面的应用 ………………………………………………… (115)
§9.1 空间曲线的切线与法平面 ……………………………… (115)
§9.2 曲面的切平面与法线 …………………………………… (118)
*§9.3 等值面与等值线 ………………………………………… (121)
§10 高阶偏导数与高阶微分…………………………………… (122)
*§11 泰勒公式 ……………………………………………………… (127)
§12 极值问题……………………………………………………… (130)
§12.1 自由极值 ………………………………………………… (130)
§12.2 最大与最小 ……………………………………………… (134)
§12.3 条件极值 ………………………………………………… (137)
习题九…………………………………………………………………… (144)
第十章 重积分和第一类线、面积分 ………………………………… (151)
§1 概论 …………………………………………………………… (151)
§1.1 问题的提出 ……………………………………………… (152)

§1.2 一般的定义 …………………………………… (154)
§1.3 具体的形式 …………………………………… (155)
§1.4 共同的性质 …………………………………… (157)
§2 二重积分的计算 …………………………………… (158)
§2.1 化二重积分为二次积分 …………………………… (158)
§2.2 用极坐标计算二重积分 …………………………… (167)
*§2.3 二重积分的一般变量代换 ………………………… (172)
§3 三重积分的计算 …………………………………… (175)
§3.1 化三重积分为三次积分 …………………………… (175)
§3.2 三重积分的变量代换 ……………………………… (179)
§4 n重积分与广义重积分 ……………………………… (186)
§4.1 n重积分 ………………………………………… (186)
§4.2 广义重积分 ……………………………………… (189)
§5 含参变量的积分 …………………………………… (192)
§5.1 固定限情形的含参变量常义积分 ………………… (193)
§5.2 变动限情形的含参变量常义积分 ………………… (196)
§5.3 含参变量的无穷积分 ……………………………… (198)
§5.4 含参变量的瑕积分 ………………………………… (202)
§6 第一类曲线积分的计算 …………………………… (202)
§6.1 几点说明 ………………………………………… (203)
§6.2 化第一类曲线积分为定积分 ……………………… (203)
§6.3 例 ……………………………………………… (206)
§7 第一类曲面积分的计算 …………………………… (208)
§7.1 面积投影定理 …………………………………… (209)
§7.2 光滑曲面的面积 ………………………………… (209)
§7.3 化第一类曲面积分为二重积分 …………………… (215)
§8 几类积分的应用 …………………………………… (217)

§8.1 质心(重心) …………………………………… (217)
§8.2 矩 …………………………………………… (220)
*§8.3 引力 …………………………………………… (222)
习题十 ………………………………………………… (225)
第十一章 第二类线、面积分及各种积分间的关系 ……… (231)
§1 第二类曲线积分 ……………………………………… (231)
§1.1 变力做功问题 …………………………………… (231)
§1.2 定义与性质 ……………………………………… (233)
§1.3 第二类曲线积分的计算 ………………………… (235)
§1.4 两类曲线积分的关系 …………………………… (240)
§2 第二类曲面积分 ……………………………………… (242)
§2.1 曲面侧的概念 …………………………………… (242)
§2.2 流量问题 ………………………………………… (245)
§2.3 第二类曲面积分的定义 ………………………… (246)
§2.4 第二类曲面积分的计算 ………………………… (247)
§2.5 两类曲面积分间的关系 ………………………… (251)
§3 格林公式 ……………………………………………… (254)
§3.1 平面单连通域与多连通域 ……………………… (254)
§3.2 定理及其证明 …………………………………… (256)
§3.3 应用于积分路线的变形 ………………………… (260)
§4 平面曲线积分与路径的无关性 ……………………… (262)
§4.1 问题的提出 ……………………………………… (262)
§4.2 定理及其证明 …………………………………… (263)
§4.3 原函数的求法 …………………………………… (266)
§5 奥—高公式 …………………………………………… (267)
§5.1 一维单连通与二维单连通的空间区域 ………… (267)
§5.2 定理及其证明 …………………………………… (268)
§6 斯托克斯公式 ………………………………………… (272)

§6.1 定理及其证明 …………………………………… (272)
§6.2 空间曲线积分与路径无关的条件 ………………… (275)
*§7 各种积分间的关系小结 ……………………… (277)
习题十一……………………………………………… (279)
第十二章 矢量分析及场论初步…………………… (283)
*§1 矢量分析初步 ……………………………… (283)
§1.1 矢量函数的极限和连续 ……………………… (283)
§1.2 一元矢量函数的微分 ……………………… (285)
§1.3 一元矢量函数的积分 ……………………… (288)
§1.4 多元矢量函数的微积分 ……………………… (289)
§2 场的概念 ……………………………………… (291)
§3 数量场的梯度 ………………………………… (293)
§4 矢量场的散度 ………………………………… (296)
§5 矢量场的旋度 ………………………………… (299)
§6 特殊的场 ……………………………………… (302)
§6.1 无旋场 ……………………………………… (302)
§6.2 无散场 ……………………………………… (303)
§6.3 调和场 ……………………………………… (306)
§7 场的确定 ……………………………………… (306)
*§8 正交曲线坐标下的场论量 ……………………… (308)
§8.1 正交曲线坐标…………………………………… (308)
§8.2 正交曲线坐标系中的场论量 ………………… (312)
习题十二……………………………………………… (316)
第十三章 常微分方程(续)………………………… (320)
§1 一阶常微分方程的其它可解类型 ……………… (320)
§1.1 全微分方程 ………………………………… (320)
§1.2 积分因子 …………………………………… (323)

§1.3　一阶隐方程 …………………………………… (328)
*§2　解的存在与唯一性定理 ……………………… (335)
*§3　幂级数解法大意 ……………………………… (343)
§4　标准微分方程组 ………………………………… (348)
§4.1　基本概念 ……………………………………… (349)
§4.2　消去法 ………………………………………… (351)
§4.3　首次积分 ……………………………………… (353)
*§4.4　与一阶线性偏微分方程的关系 ……………… (356)
§5　线性方程组 ……………………………………… (359)
§5.1　基本理论 ……………………………………… (360)
§5.2　常系数齐线性方程组的通解 ………………… (365)
§5.3　常系数非齐线性方程组的解法举例 ………… (371)
*§6　拉普拉斯变换 ………………………………… (374)
§6.1　基本概念 ……………………………………… (374)
§6.2　拉氏变换的性质 ……………………………… (376)
§6.3　拉氏变换在求解微分方程中的应用 ………… (384)
习题十三……………………………………………… (387)
附录………………………………………………… (392)
附录一　实数的基本定理…………………………… (392)
附录二　常系数非齐次线性方程的算子解法……… (398)
参考书目…………………………………………… (409)
下册部分习题简答………………………………… (411)

第八章 空间解析几何及矢量代数初步

解析几何是用代数方法研究几何图形的一门数学学科，它不但给传统的几何学带来一套全新的研究方法，而且在其它数学学科中，使我们可以利用直观的几何形象来启发新的数学思想，说明抽象的数学概念。正如在一元函数微积分中，有关函数及其连续性等概念的解释，导数、微分和定积分概念的引入等诸多内容，都曾多次涉及到平面解析几何的知识，在我们将要学习的多元函数微分学和积分学中，类似内容的处理则要用到空间解析几何和矢量代数的知识。此外，矢量代数也是研究空间解析几何的重要工具，我们将简单介绍其必需的内容。

§1 空间直角坐标系

一根数轴，实现了直线上的所有点和全部实数间的一一对应；两根互相垂直而交于原点的数轴，引出了平面直角坐标系，从而实现了平面上所有点和全部有序实数对之间的一一对应，正是这种点和数或数组之间的对应，奠定了解析几何的基础。现在我们要建立空间直角坐标系，以实现空间所有点和全部有序三元实数组之间的一一对应。

§1.1 坐标系的建立

过空间一点 O 作三条两两垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，并设 O 为三坐标轴的原点，这样便建立了一个**空间直角坐标系**，用 $Oxyz$ 表

示。点 O 称为坐标系的**原点**，Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴叫做这个坐标系的三个**坐标轴**，并分别简称为 **x 轴**、**y 轴**、**z 轴**，三个坐标轴的每两个确定一个平面，称为**坐标平面**，共有三个坐标平面，它们两两垂直，垂直于 x 轴的叫做 **yz（平）面**，用 Oyz 或 yOz 表示；垂直于 y 轴的叫做 **zx（平）面**，用 Ozx 或 zOx 表示；垂直于 z 轴的叫 **xy（平）面**，用 Oxy 或 xOy 表示。

通常，我们取 Oxy 面为水平面，且称 Ox、Oy、Oz 三个坐标轴分别为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**（**或立轴**）。

如果 Ox、Oy、Oz 三坐标轴的顺序的相对位置与右（左）手拇指、食指和中指相互垂直时可能形成的相对位置一致，则称该坐标系为**右（左）手系**（图 8.1）。

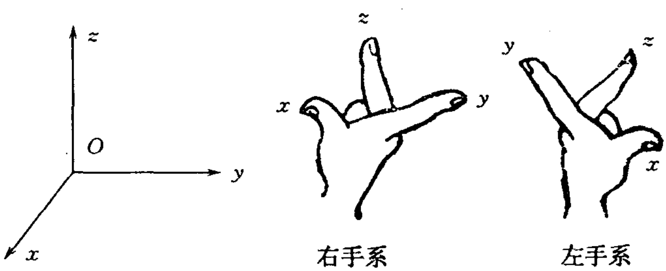

图 8.1

此外，为方便计，我们取三个坐标轴的单位彼此相等。

我们知道，规定了正向的直线叫做轴，规定了起点和终点的线段叫**有向线段**。以 A 为起点、B 为终点的有向线段记为$\overline{AB}$，其方向认作从 A 指向 B。设$\overline{AB}$ 是轴 l 上的有向线段，所谓$\overline{AB}$ 的**代数长**（**或值**）是指这样一个实数 AB：

$$AB=\begin{cases}|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{与 } l \text{ 方向相同。}\\ 0 & \text{当 } A \text{ 与 } B \text{ 重合，}\\ -|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{与 } l \text{ 方向相反。}\end{cases}$$

其中 $|AB|$ 是线段 AB 之长。

今后，如果空间坐标系的有向线段与某个坐标轴平行，则其代数长的符号由其与这个坐标轴是否同向而定，度量单位与坐标轴的单位一致。

设 M 是空间一点，M 在坐标轴 Ox、Oy、Oz 上的投影依次为 A、B、C，此三点在各自坐标轴上的坐标（即$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 的代数长）顺次为实数 x、y、z，则称 (x,y,z) 为**点 M 的坐标**，并依次称此三数为 M 的 **x 坐标**（**横坐标**），**y 坐标**（**纵坐标**）和 **z 坐标**（**竖坐标或立坐标**），这个事实用 $M(x,y,z)$ 表示。

通常有两种方法来得到空间一点 M 的坐标：

(1) 过点 M 作三个平面，分别与三个坐标平面平行，此三平面顺次交横轴、纵横和竖轴于 A、B、C 三点，则此三点便是 M 在上述三坐标轴上的投影（图 8.2）。

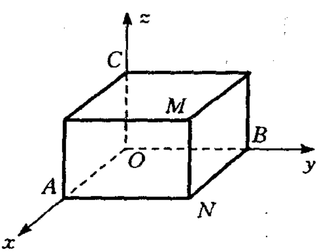

图 8.2

(2) 从 M 向 xy 面作垂线，设垂足为 N，在 xy 面上自 N 向 x 轴作垂线，设垂足为 A，则有向线段$\overline{OA}$、$\overline{AN}$、$\overline{NM}$ 的代数长即为点 M 的坐标：

$$OA = x, AN = y, NM = z$$

（图 8.3）。这其实是法(1) 的简化。

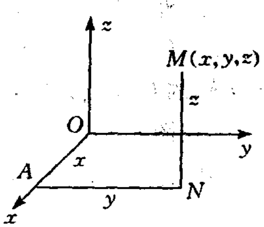

图 8.3

这样，在空间直角坐标系建立之后，空间任一点 M 均对应着一个“有序三数组”，它们就是 M 的坐标；反之，任给一有序三数组 (x,y,z)，则 x、y、z 分别在 Ox、Oy、Oz 轴上决定了三个点 A、B、C，这三点在相应坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，过 A、B、C 三点依次作平行于 Oyz、Ozx、Oxy 的平面，此三平面交于空间一点 M，则

M 的坐标显然是(x,y,z)。于是我们得出结论：

空间直角坐标系建立之后，空间所有点和全部有序三数组之间建立了一宗一一对应关系。

今后，我们可直接把一个有序三数组(x,y,z)视为空间一点，该点即以此三数组为它的坐标，于是，称呼**点**(x,y,z)是允许的。

由点 M 与其坐标(x,y,z)的对应关系易见：$M \in Oxy \Leftrightarrow z = 0$，$M \in Oyz \Leftrightarrow x = 0$，$M \in Ozx \Leftrightarrow y = 0$，$M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$，$M \in Oy \Leftrightarrow z = x = 0$，$M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**（不含坐标面上的点），共有八个卦限，用大写罗马字母 Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ 表示，各卦限内点的坐标 x、y、z 的符号如下表（表 8.1）。

表 8.1

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

此外，容易看到，点 $M(x,y,z)$ 关于坐标原点 $O(0,0,0)$ 的对称点为$(-x,-y,-z)$，关于 xy 面的对称点为$(x,y,-z)$，关于 Ox 轴的对称点为$(x,-y,-z)$等等。

在图 8.3 中，若在直线 MN 上任取一点 M_1，易见点 M_1 与 M 的横、纵坐标均相等，而竖坐标可以有所不同，设 M_1 的坐标为(x_1, y_1, z_1)，则差 $z_1 - z$ 恰为有向线段$\overline{MM_1}$之代数长 MM_1（图 8.4），一般来讲，我们可以得出论断：

当空间一点 M 平行于某坐标轴移动到另一点 M_1 时，与此坐标轴相应的坐标有所改变，其差恰为有向线段$\overline{MM_1}$ 的代数长，其余二坐标不变。

例 1　设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间二点，它们在 xy 面上的投影为 N_1 和 N_2，作直线 $N_1M_3 \parallel M_1M_2$ 交直线 M_2N_2 于点 M_3，在 xy 面上作直线 $N_1M_4 \perp Ox$ 轴，M_4 为垂足，在平面 $M_3N_1M_4$ 上作 $\square M_3N_1M_4M_5$，在平面 OM_4M_5 上作 $\square OM_4M_5M_6$（图 8.5）。于是由上面的论断易知诸点的坐标如下：

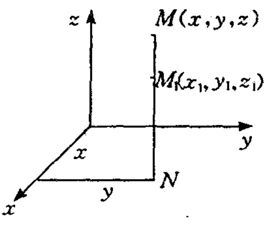

图 8.4

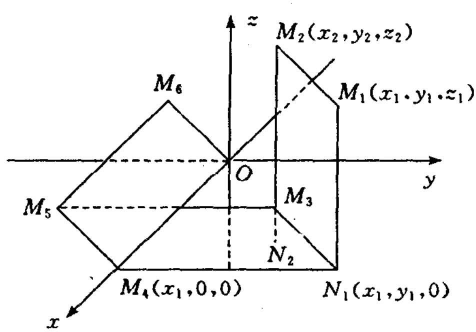

图 8.5

$N_1(x_1,y_1,0),N_2(x_2,y_2,0)$

$M_3(x_2,y_2,z_2-z_1),M_4(x_1,0,0)$

$M_5(x_2,y_2-y_1,z_2-z_1),$

$M_6(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$

§1.2　距离公式

设 $M(x,y,z)$ 是空间任意一点，由图 8.2 知点 M 到原点的距离是长方体的一条对角线 OM 的长度：

$$|OM| = \sqrt{OA^2+OB^2+OC^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1}$$

这就是说，空间任一点到原点的距离等于这点各坐标的平方和的

平方根。

如果 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意二点，以 $d(M_1,M_2)$ 表示此二点的距离，则作图如图 8.5，易知线段 M_1M_2 $\underline{\underline{\mathbin{/\!/}}}$ N_1M_3 $\underline{\underline{\mathbin{/\!/}}}$ M_4M_5 $\underline{\underline{\mathbin{/\!/}}}$ OM_6，故

$$d(M_1,M_2) = |M_1M_2| = |OM_6|.$$

由(1)式及例 1 中导出的 M_6 的坐标，知

$$d(M_1,M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2}$$

这个公式叫做空间两点的**距离公式**，是空间解析几何的一个最基本的公式。

例 2　在 Oz 轴上求一点，使此点与点 $A(-2,5,3)$ 和 $B(3,2,-1)$ 等距离。

解　设所求点为 $M(0,0,z)$，则由 $d(M,A) = d(M,B)$ 得

$$\sqrt{[0-(-2)]^2 + (0-5)^2 + (z-3)^2}$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (0-2)^2 + [z-(-1)]^2}$$

两边平方后解得 $z = 3$，故所求的点为 $M(0,0,3)$。

§2　矢量代数初步

矢量是数学中的基本概念之一，它在数学的许多分支及力学、物理学等其它科学领域中都有着广泛的应用，更是研究和解决空间解析几何的许多问题的有力工具，其特点是简捷直观。本节只介绍矢量及其运算的若干基本内容。

§2.1　矢量的概念

既有大小又有方向的量称为**矢量**或**向量**，简称**矢**，如力、速度、加速度等等均为矢量。

矢量可用一端带箭头的线段表示，如图 8.6，在线段 AB 的一

端加一箭头便表示一个矢量。约定该矢量的方向与箭头方向相同，而大小等于线段 AB 的长度 $|AB|$，并记为 $\overrightarrow{AB}$。A 和 B 分别是矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**始**(**起**)点和**终点**。

手写时常用一个带箭头的字母来标记一个矢量，如 $\vec{A}$，$\vec{r}$，$\vec{a}$ 等等。书刊中矢量排成黑斜体字，如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{a}$ 等等。

必须严格区别矢量和数量。数量，也称**标量**，是一个只有大小而没有方向的量，如长度、面积、密度、功、流量等。数量是数而**矢量不是数**。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$。显然，$|\boldsymbol{a}|$ 是一个非负实数。特别，模为零的矢量叫做**零矢量**，以 $\boldsymbol{0}$ 标记，它可以看成是始点和终点重合的矢量，而**其方向可以认为是任意的**，模为 1 的矢量称为**单位矢量或么矢**，我们以 $\boldsymbol{a}^0$ 来记与非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位矢量。

设 $A(a_1,a_2,a_3)$ 与 $B(b_1,b_2,b_3)$ 是空间二点，则矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的模显然是线段 AB 的长，故由距离公式有

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同(图 8.6)，我们称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。这样，两个相等矢量的任一个均可看做是另一个在空间平移而得到的，即，相等的矢量的始点可以不同，这就是**自由矢量**的概念。特别，始点在坐标原点 O 而终点在 M 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**径矢或矢径**，于是，空间任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 均有唯一一个径矢 $\overrightarrow{OM}$ 与之相等，这个径矢有时也称为 $\boldsymbol{a}$ 的径矢。由于一个径矢完全由其终点来决定，故空间任一矢量均可由其径矢的终点来决定，而且，为确定 $\boldsymbol{a}$ 的方向，只须确定其径矢的方向。

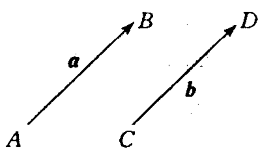

图 8.6

空间矢量的方向可以用方向角或方向余弦来确定，下面我们