高等职业教育数学系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

杜俊文 陈洁 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育数学系列教材 线性代数

出版社

线性代数

线性代数

主编 杜俊文 陈 洁

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杜俊文,陈洁主编.—天津:天津大学出版社,2004.7

ISBN 7-5618-1967-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①杜… ②陈… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第058517号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	天津市宝坻区第二印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	140mm×203mm
印　　张	6.75
字　　数	175千
版　　次	2004年7月第1版
印　　次	2004年7月第1次
印　　数	1-5 000
定　　价	10.00元

前　　言

面临我国高职高专教育大好的发展机遇，适应国家经济、科技和社会发展对高职高专教育人才培养的要求，为了更好地培养高素质的高等技术应用型人才，提高教育教学质量，解决高职高专层次《线性代数》课程的教材问题，我们根据高等职业院校对数学教学的基本要求，本着基础教学为专业服务和以应用为目的，以够用为原则，在多年从事高等职业教育教学实践的基础上，编写了本教材.

本教材在保证科学性、系统性的基础上，注意拓宽基础、强化能力、立足应用；结合高等职业教育的特点，淡化数学理论，精选内容和习题，在少而精的原则下，注重实用，讲究实效，以培养学生的基本运算、分析问题和解决问题的能力；突出应用性，使内容通俗易懂，既达到大纲的要求，又便于学生学习，充分体现高等职业教育的特色.

本教材初稿由杜俊文、陈洁、姜文玲、刘振云、王鲁静等同志执笔，由杜俊文、陈洁任主编，丁杰统稿．限于编者的水平，教材中难免存在不妥之处，欢迎读者批评指正.

在此，对本教材的出版发行给予帮助的同志们一并表示感谢！

编者

2004 年 6 月

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，也是讨论许多问题的一个基本工具．本章通过解二元和三元线性方程组引入二阶和三阶行列式的定义，进而归纳出 n 阶行列式的定义，并讨论其性质及计算方法，最后给出应用行列式解线性方程组的克拉默法则．

1.1 行列式的定义

1.1.1 数域与排列

1 数域

定义1 设 P 是至少有两个不同数组成的集合，P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数，则称 P 为一个数域．

如果数的集合 P 中任意两个数进行某一运算的结果仍在 P 中，就称数集 P 对这个运算是封闭的．因此数域的定义也可以说成：对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)均封闭的、至少含有两个不同数的数集．

定义2 设 K 和 F 均为数域，如果 $K\subseteq F$，那么称 K 为 F 的子域，F 为 K 的扩域．

由上述定义可知：全体有理数集合、全体实数集合、全体复数集合均是数域．这三个数域分别用字母 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 表示，且有 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$．因此 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的扩域，$\mathbf{C}$ 的子域．

定理1 设 P 是任何一个数域，则 $\mathbf{Q}\subseteq P$．

证明 由数域的定义知，P 中有相异的数 a,b．故 a,b 中必

有一个不为零，不妨设 $a\neq 0$，从而

$$a-a=0\in P,\frac{a}{a}=1\in P.$$

进而对任意正整数

$$n=1+1+1+\cdots+1\in P,$$

又因 P 对减法封闭，所以

$$-n=0-n\in P,$$

这样 $\mathbf{Z}\subseteq P$.对任意的$\frac{m}{n}\in Q$，此处 $m,n\in\mathbf{Z},n\neq 0$，有 $m,n\in P$，再利用 P 对除法封闭有$\frac{m}{n}\in P$，这表明 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{P}$.

此定理说明任何数域 P 必含子域 $\mathbf{Q}$，因此称 $\mathbf{Q}$ 为最小子域.同时还说明任何数域必含有无穷多个数.

2　排列

定义 3　由 n 个数码组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列.

例如 1,2,3 可组成以下 6 种排列：

123,132,213,231,312,321.

n 阶排列的种数通常用P_n 表示.因为从 n 个数中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个数中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；这样继续下去，直到最后只剩下一个数放在第 n 个位置上，只有 1 种取法.于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

在 $n!$ 个 n 阶排列中，唯有 $12\cdots(n-1)n$ 是按从小到大的次序组成的一个排列(称为标准排列).于是在任意一个 n 阶排列中，当某两个数码的先后次序与标准次序不同时，则称有一个逆序.

定义 4　一个排列的逆序总数称为排列的逆序数，记为$\tau(p_1$

$p_2 \cdots p_n$).逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

下面介绍一个求逆序数的方法.

设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为 n 个自然数的一个排列,考虑 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 τ_i 个,就说 p_i 的逆序数是 τ_i.全体数码的逆序数的总和

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i,$$

就是这个排列的逆序数.

例如在排列 314265 中,3 在首位,逆序数为 0;1 的前面比 1 大的有一个 3,故逆序数为 1;4 的前面没有比它大的,逆序数为 0;2 的前面比它大的有 3 和 4,逆序数为 2;6 是最大数,故逆序数为 0;5 的前面比它大的数只有 6,故逆序数是 1.于是排列 314265 的逆序数为 $\tau=0+1+0+2+0+1=4$,为偶排列.

定义 5 将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动就得到另一个排列,这样的变换称为对换.将相邻两个数码对换,称为相邻对换.

定理 2 任一个排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$.显然 $a_1, \cdots, a_l, b_1, \cdots, b_m$ 的逆序数经过对换并不改变,而当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1.所以排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$. 即经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变为排列 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

定理 3 在 $n!$ 个 n 阶排列中，奇偶排列各占一半.

证明 设有 p 个奇排列，q 个偶排列.

如果将每一个奇排列都施以同一对换，则由定理 2 可知 p 个奇排列均变为偶排列，于是 $p\leqslant q$；同理如将每一个偶排列都施以同一对换，则由定理 2 可知 q 个偶排列均变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

1.1.2 行列式的定义

1 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

引进记号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称 D 为二阶行列式. 横写的称为行，竖写的称为列. 行列式中的数称为行列式的元素. 每个元素有两个下标，第一个下标表示它所在的行，称为行指标；第二个下标表示它所在的列，称为列指标.

如果把 a_{11}，a_{22} 的连线称为主对角线，把 a_{12}，a_{21} 的连线称为副对角线，则二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去副

对角线上元素的乘积.这种算法称为二阶行列式的对角线法则.按此法则方程组(1-1)的解可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$.

行列式 D 称为方程组的系数行列式,行列式 D_1,D_2 分别是将 D 的第1列,第2列换为常数项 b_1,b_2 得到的.

2　三阶行列式

用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1-2}$$

类似于二元线性方程组(1-1)的求解,当

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\text{ 时},$$

其解为

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3),$$

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

引进记号 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$,

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称 D 为三阶行列式.其右端的项可按下图记忆:

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

图中实线上三个元素的乘积组成的三项取正号,虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号.这种方法称为三阶行列式的对角线法则(沙流氏法则).

引入三阶行列式后,三元线性方程组(1-2)当 $D\neq0$ 时有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & b_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 称为方程组的系数行列式,而行列式 D_1, D_2, D_3 分别是将 D 中的第 1,2,3 列换成常数项 b_1, b_2, b_3 得到的.

3　n 阶行列式的定义

为了恰当地定义 n 阶行列式,通过观察二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

可以发现其共同特征如下.

(1)二阶行列式是 $2! = 2$ 项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的两个元素的乘积;三阶行列式是 $3! = 6$ 项的代数和,其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(2)代数和中每一项的符号是这样决定的:当这一项的行指标取成标准排列后,如果对应的列指标是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

据此,我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 这两个数组成的所有排列 j_1j_2 取和,$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 这三个数组成的所有排列 $j_1j_2j_3$ 取和.

推而广之,定义 n 阶行列式.

定义 5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，横排称为行，纵排称为列．它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和．各项的符号是：当这一项的行指标取成标准排列后，如果对应的列指标是偶排列则取正号，是奇排列则取负号．因此，n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 阶排列，当取遍所有 n 阶排列时，则得到 n 阶行列式表示的代数和中的所有的项．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 取和．n 阶行列式有时简记为 $D=|a_{ij}|$．

特别规定一阶行列式 $|a|=a$．

由上述定义知，当 a_{ij} 均为数时，行列式 D 为一个数．如果 $a_{ij}\in P(i,j=1,2,\cdots,n)$，这里 P 是一个数域，则 $D\in P$．当 a_{ij} 中含有变量时，行列式 D 是此变量的多项式．故计算或求行列式就是把这个数或多项式求出来．

例 1 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$．

解 由行列式定义知

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$中的$a_{nj_n}$取自$D$的第$n$行，而第$n$行除$a_{nn}$外，其余元素全为零．故当$j_n\neq n$时，对应的行列式展开式中的那一项一定为零，求和时该项可不记，因此只需考虑$j_n=n$的项．同样第$n-1$行中只需考虑$j_{n-1}=n-1$的项．依此类推，D的$n!$项中除了列指标$j_1j_2\cdots j_n=12\cdots n$对应的项外，其余的项均为零，又因$\tau(12\cdots n)=0$，故$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．

上面形式的行列式称为上三角行列式．

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$．

特别地，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$．

这种行列式称为对角行列式．

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线．

以上三种情况可简单记为：三角行列式及对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积．