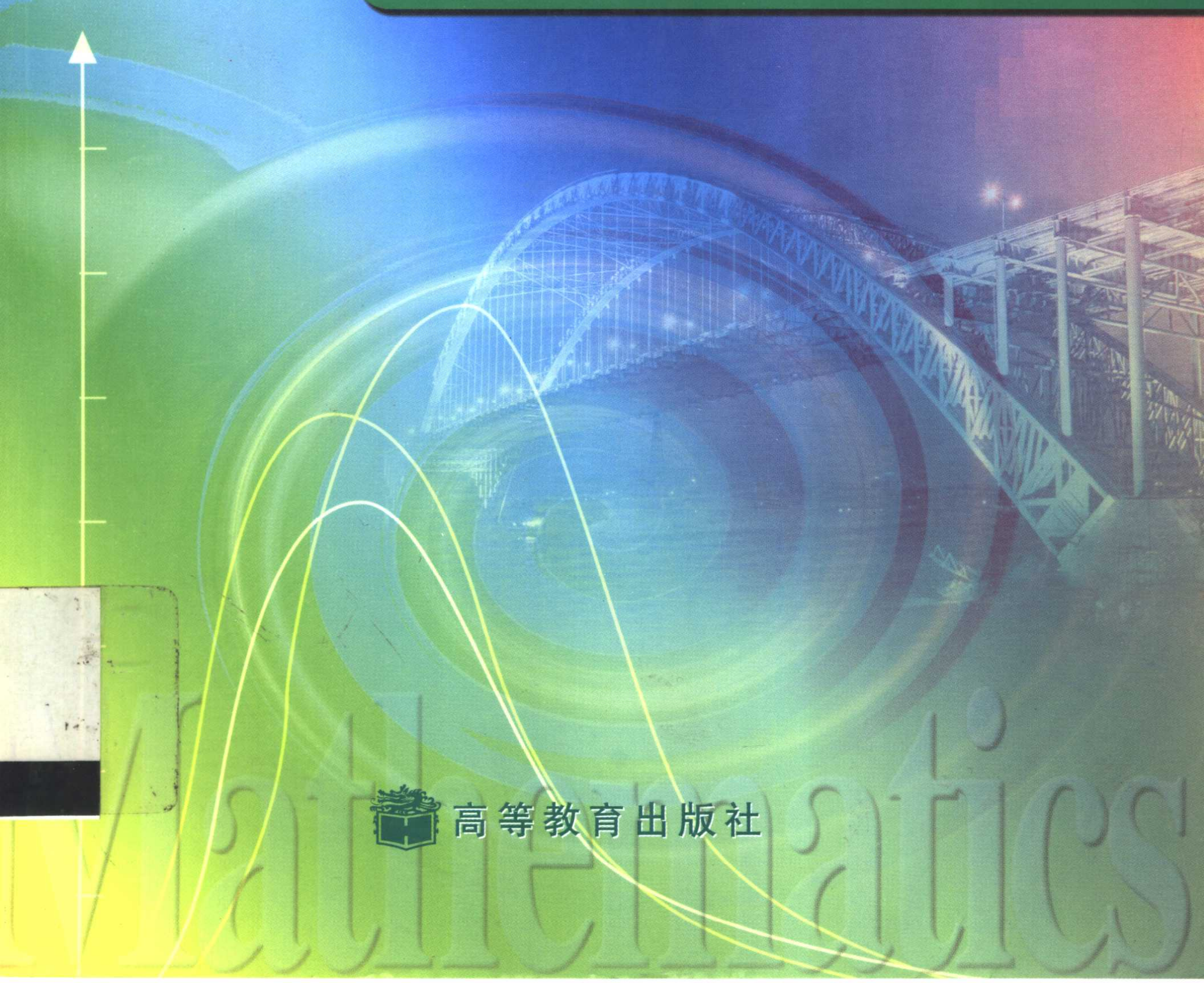
GAODENGZHIYEJIAOYU
TONGYONGJIAOCAI

高等职业教育通用教材

应用数学基础

下册

杜吉佩 主编



高等教育出版社

应用数学
基础

高等职业教育通用教材

应用数学基础

下册

杜吉佩　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部高教司审定通过的五年制高等职业教育《应用数学基础》教学基本要求编写的。

内容包括:常微分方程,级数,拉普拉斯变换,线性代数初步,概率论与数理统计。

本书为初中起点五年制高职教材,亦可作为高中起点和中职起点三年制高职教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础.下册/杜吉佩主编.—北京:高等教育出版社,2001.7

高等职业学校用书

ISBN 7-04-009693-5

Ⅰ.应… Ⅱ.杜… Ⅲ.应用数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 037841 号

责任编辑 邵 勇 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 杜晓丹

版式设计 马静如 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 张小强

应用数学基础(下册)

杜吉佩 主编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
	http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2001 年 7 月第 1 版
印 张	15.5	印 次	2001 年 11 月第 3 次印刷
字 数	370 000	定 价	13.50 元

目　　录

第六章　常微分方程

在自然科学、社会科学和工程技术等诸多领域中，所遇到的实际问题的规律，大多可以用函数及其导数的关系式来表达，这种关系式就是微分方程.

本章主要介绍微分方程的基本概念及几种常见微分方程的解法，微分方程的简单应用.

§6－1　微分方程的概念

一、两个实际问题

例1　湖水何时变清？

江河湖海的污染已为世人所瞩目，据载，某地一知名湖泊，因连年流入工厂的废水被严重污染，为还其本来面目，在严禁往湖中排放污水的同时，采取了注入清水的整治措施.

具体作法是让清水以不变的速度注入湖中，同时湖水以同样的速度排出(假定污染物均匀分布在整个湖中).

设湖水的容积为 V，x 为某一时刻 t 时污染物的总量，清水注入的速度为 ω，问湖水何时变清？

解　因为污染物不断流出湖外而不会再重新流入湖中，所以 x 是减少的，并且污染物流出的速度是下降的.

在时刻 t，污染物的浓度为$\frac{x}{V}$，由于这种浓度的水是以速度 ω 向外流出的，因此污染物流出的速度为

$$\frac{x}{V}\cdot\omega.$$

而污染物流出的速度是 x 对时间的导数，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-\frac{x}{V}\cdot\omega\\&=-\frac{\omega}{V}\cdot x,\end{aligned}\tag{1}$$

其中负号表示 x 是不断减少的.

由(1)得
$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\omega}{V}\mathrm{d}t,$$

两端积分，得

$$x=C\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{V}t},\tag{2}$$

其中 C 是任意常数.

当 $t=0$ 时，湖水中污染物的总量为 x_0，则(2)式为

$$x=x_0e^{-\frac{\omega}{V}t}. \tag{3}$$

(3)式是污染物总量 x 与时间 t 的关系,它反映了 t 值越大(时间越长),x 值越小(污染越少)这一基本事实.如果已知 ω, V,则由(3)式不难算出湖水何时变清(污染物不能完全消除,湖水变清是相对概念).

例 2 列车制动问题.

一列车在直线轨道上以 30 m/s 的速度行驶,制动时列车获得加速度 $-0.6\ \mathrm{m/s^2}$,问开始制动后经过多少时间才能把列车刹住?从制动到列车停止这段时间内列车行驶了多少路程?

解 设列车运动方程为 $s=s(t)$,由二阶导数的力学意义知,$s=s(t)$应满足

$$\frac{d^2s}{dx^2}=-0.6. \tag{4}$$

同时函数 $s=s(t)$还应满足下列条件:

$$s\Big|_{t=0}=0,\quad v=\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=30. \tag{5}$$

将(4)式积分,得

$$\frac{ds}{dt}=\int -0.6dt=-0.6t+C_1, \tag{6}$$

再积分,得

$$\begin{aligned} s&=\int(-0.6t+C_1)dt\\ &=-0.3t^2+C_1t+C_2. \end{aligned} \tag{7}$$

把条件(5)分别代入(6)式和(7)式中,得

$$C_1=30,\ C_2=0.$$

于是(6)式成为

$$\frac{ds}{dt}=-0.6t+30, \tag{8}$$

(7)式成为

$$s=-0.3t^2+30t. \tag{9}$$

在(8)式中,令 $v=\frac{ds}{dt}=0$,得到列车开始制动到完全停住的时间为

$$t=\frac{30}{0.6}=50(\mathrm{s}).$$

再把 $t=50$ 代入(9)式中,得到列车在这段时间内行驶的路程为

$$s=-0.3\times50^2+30\times50=750(\mathrm{m}).$$

二、微分方程的概念

上述两个实例中,关系式(1)和(4)都含有未知函数的导数.它们都是微分方程.一般地有如下的定义.

1. 微分方程 含有未知函数的导数或微分的方程叫做微分方程.

2. 常微分方程 未知函数是一元函数的微分方程叫做常微分方程.

例如

$$y' + xy = e^x, \ \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{V}x, \ \frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$$

都是常微分方程.

注意 在微分方程中,自变量和未知函数可以不出现,但未知函数的导数或微分必须出现.

本章只讨论常微分方程,并将它简称为微分方程.

3. 微分方程的阶 在一个微分方程中,未知函数导数或微分的最高阶数叫做微分方程的阶.

例如,$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{V}x$ 是一阶微分方程;

$(y')^4 = y + x^2$ 是一阶微分方程;

$y''' + xy = e^x$ 是三阶微分方程.

4. 微分方程的解 如果把某个函数代入微分方程中,能使该微分方程成为恒等式,那么这个函数叫做微分方程的解.求微分方程解的过程叫做解微分方程.

例如 $s = -0.3t^2 + 30t$ 是微分方程$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.6$ 的解.

5. 通解和特解 如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等①,则称这样的解为微分方程的通解;而不含任意常数的解叫做微分方程的特解.

例如,$x = Ce^{-\frac{\omega}{V}t}$是方程$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{V}x$ 的解,其中含有一个任意常数,因此它是通解.

$s = -0.3t^2 + C_1t + C_2$ 中含有两个任意常数,它是二阶微分方程$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.6$ 的通解;而解 $s = -0.3t^2$ 不含任意常数,是它的一个特解.

6. 初始条件 特解也可以看成是在通解中给任意常数一组确定的值而得到的解.通解中用来确定特解的条件叫做初始条件或定解条件.

带有初始条件的微分方程称为微分方程的初值问题.

例如,例 1 中 $x\Big|_{t=0} = x_0$ 与例 2 中 $s\Big|_{t=0} = 0, \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 30$ 分别是方程(1)与(4)的初始条件.

一般地,初始条件在实际问题中都具有一定的具体的意义.例 1 中初始条件表明开始注入清水时,湖中污染物的总量;例 2 中的初始条件 $s\Big|_{t=0} = 0$ 是列车的初始位置,$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 30$ 是列车的初始速度.

例 3 试写出下列各微分方程的阶:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy = 0$;　　(2) $(3x - 4y)dy + (2x - 3y)dx = 0$;

(3) $y'' + 2y' + y = 0$;　　(4) $y^{(4)} + y^6 + x^8 = 0$.

解 (1) 一阶微分方程;　　(2) 一阶微分方程;

(3) 二阶微分方程;　　(4) 四阶微分方程.

---

① "独立"也叫线性无关,具体定义见第九章.

例 4 验证 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 是微分方程 $y''+4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=-1$ 的特解.

解 因为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，所以 (10)

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x, \tag{11}$$

$$y''=-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x. \tag{12}$$

将上面各式代入原方程 $y''+4y=0$ 的左端，得

$$-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x+4C_1\cos 2x+4C_2\sin 2x=0,$$

故已给函数满足方程 $y''+4y=0$，是它的解. 由于有两个任意常数 C_1, C_2，因此这个解又是微分方程的通解.

将初始条件代入(10)和(11)两式中，求得

$$C_1=-\frac{1}{2},\quad C_2=1.$$

所以 $y''+y=0$ 满足初始条件的特解是

$$y=-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 2x.$$

三、微分方程解的几何意义

例 5 一曲线过点 $M_0(1,1)$，且在该曲线任一点处 $M(x,y)$ 的切线的斜率为 $3x^2$，求该曲线方程.

解 设所求曲线为 $y=f(x)$，根据导数的几何意义，可知 y 应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2, \tag{13}$$

同时曲线还应满足下述条件：$y\Big|_{x=1}=1$.

将(13)式两端积分，得

$$y=\int 3x^2\mathrm{d}x,\quad 即\quad y=x^3+C. \tag{14}$$

将初始条件代入(14)式，得 $C=0$，故所求曲线方程为 $y=x^3$.

微分方程的通解中含有任意常数，因此是一族函数，在几何上就表示一族曲线，称为积分曲线族. 族中的每一条曲线称为该方程的一条积分曲线，它对应于方程的一个特解.

例如，方程(13)即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$ 的通解

$$y=x^3+C$$

就表示如图 6－1 所示的一族曲线——立方抛物线族. 这些曲线中的每一条在相同的点 x_0 处有平行的切线. 而特解 $y=x^3$ 则表示通过点 $M_0(1,1)$ 的一条确定的立方抛物线.

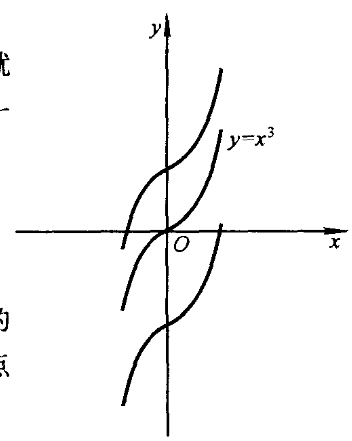


图 6－1

四、特殊的微分方程

一般说来,求微分方程的解是比较困难的,每种特定类型的微分方程都有特定的解法.我们这里讨论的是最特殊的微分方程——通过直接积分就可求解的特殊方程,它的一般形式是

$$y^{(n)}=f(x), \tag{6-1}$$

其中 $f(x)$为已知函数.此方程经过 n 次积分即可求得通解.

例 6 求微分方程 $y'''=6x+1$ 的通解.

解 这是一个三阶微分方程,其特点是经过三次积分即可求得通解.

$$y''=\int(6x+1)\mathrm{d}x = 3x^2+x+C_1,$$

$$\begin{aligned} y'&=\int(3x^2+x+C_1)\mathrm{d}x \\ &=x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y&=\int\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2\right)\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3. \end{aligned}$$

习题 6-1

1. 指出下列微分方程的阶数:

(1) $y''-3y'+2y=x^2$; (2) $x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$;

(3) $y(y')^2=3$; (4) $y^3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y^4=0$;

(5) $xy''=2y'+\mathrm{e}^x$; (6) $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=4$.

2. 验证所给函数是所给微分方程的解,并说明是通解还是特解(其中 C,C_1,C_2 为任意常数).

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=0$, $y=\mathrm{e}^{2x}$, $y=C\mathrm{e}^{2x}$;

(2) $4y'=2y-x$, $y=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\dfrac{x}{2}+1$;

(3) $y''+9y=0$, $y=\cos 3x$, $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$;

(4) $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C$.

3. 若一条曲线上任意点处的曲率都等于零,证明该曲线一定是直线.

4. 一物体以初速度 v_0 从地面垂直上抛,设此物体的运动只受重力的影响,试确定物体上升高度 y 与时间 t 的函数关系.

§6-2 一阶微分方程

本节我们讨论一阶微分方程的解法.

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y')=0,$$
或解出 y' 的形式:$y'=f(x,y)$.

一、可分离变量的微分方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y). \tag{6-2}$$
的一阶微分方程,叫做可分离变量的微分方程.

之所以称这个方程为可分离变量的方程是因为它可以化成
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \tag{6-3}$$
的形式,也就是说,把微分方程中不同的两个变量分离在等式的两边.

这类方程的求解分两步完成:第一步分离变量,即将原方程化为(6-3)的形式;第二步将(6-3)两端求积分,即
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$
得到 x 与 y 的一个关系式,求出通解.

例 1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的通解.

解 分离变量得
$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$
两端积分
$$\int y\mathrm{d}y=\int -x\mathrm{d}x,$$
得
$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$
于是得通解
$$x^2+y^2=C.$$
这个解是用隐函数形式表示的.

例 2 求微分方程 $xy\mathrm{d}x-(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 原方程化为
$$(1+x^2)\mathrm{d}y=xy\mathrm{d}x,$$
分离变量得
$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$
两端积分
$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$
得
$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$
$$y=\pm C_1\sqrt{1+x^2},$$
因 $\pm C_1$ 仍是任意常数,把它记作 C,便得方程的通解
$$y=C\sqrt{1+x^2}.$$

例 3 放射性元素镭由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素,镭的含量就不断减少,这种现象叫做衰变,英国物理学家卢瑟福因对元素衰变的研究获得 1908 年的诺贝尔化学奖.现已知镭的衰变速度与当时未衰变的镭的含量 M 成正比,比例系数为 k,又知 $t=0$ 时镭的含量为 M_0,求在衰变过程中镭含量 $M(t)$ 随时间变化的规律.

解 镭的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.由题意有

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-kM \quad (k \text{ 是常数,且 } k>0),$$

其中衰变系数 k 前的负号是由于当 t 增加时,M 单调减少,即$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$ 的缘故.

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-k\mathrm{d}t,$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=\int-k\mathrm{d}t,$$

即

$$\ln|M|=-kt+\ln C,$$

$$|M|=C_1\mathrm{e}^{-kt} \text{ 或 } M=\pm C_1\mathrm{e}^{-kt},$$

从而

$$M=C\mathrm{e}^{-kt}\text{①}(\text{其中 } C=\pm C_1).$$

把初始条件 $M\Big|_{t=t_0}=M_0$ 代入上式,得

$$M=M_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

这就是所求的镭的衰变规律,它是随时间的增加按指数规律衰减的.

例 4 人口增长模型中,人口总量 N 对时间 t 的变化率$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$叫做绝对增长率,而$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$与当时人口总量的比$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}/N=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}t}$叫做相对增长率.人们通常所说的人口平均增长率是指相对增长率而言.据人口统计资料知 1990 年我国人口总数为 11.6 亿且年人口平均增长率为 14.8‰,在不发生意外(例如灾害、战争)的条件下,试确定人口总数 N 与时间 t 的函数关系.若今后保持这个增长率,到今年(2001 年)我国人口总数是多少?

解 由人口增长模型知,

$$\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}t}=14.8‰.$$

这是一个可分离变量的微分方程.分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=0.014\,8\,\mathrm{d}t,$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}N}{N}=\int0.014\,8\mathrm{d}t,$$

即

$$\ln N=0.014\,8\,t+\ln C,$$

---

① 为了书写方便,以后遇到这种情况就不再取绝对值了.

$$N = C\mathrm{e}^{0.0148t}.$$

这就是人口总数 N 与时间 t 的关系.

由题设,$t=1\,990$ 时,$N=11.6$,代入上式得

$$C = 11.6\times \mathrm{e}^{-0.0148\times 1\,990},$$

这样
$$N(t) = 11.6\times \mathrm{e}^{0.0148(t-1\,990)}.$$

因此
$$N(2\,001) = 11.6\times \mathrm{e}^{0.0148(2\,001-1\,990)}$$
$$\approx 13.65(\text{亿})^{①}.$$

二、齐次方程

如果一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

可以化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6-4}$$

的形式,则称这个方程为齐次方程.

这类方程的求解分三步进行.

第一步:将原方程化为(6-4)式的形式;

第二步:作变量代换

$$u = \frac{y}{x},$$

以 u 为新的未知函数,就可化为可分离变量的方程.

因为 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=ux$,求导数得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入方程(6-4)式中,得
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u,$$

分离变量,得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分,得
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

第三步:回代.求出积分后,将 u 还原成 $\frac{y}{x}$ 就得到所给方程的通解.

例 5 解方程 $x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2$.

解 原方程化成

---

① 2000 年 11 月 1 日统计结果,我国人口数为 12.95 亿.比估计的数目少,说明我国人口控制比较好.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

因此是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1},$$

分离变量,得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分,得

$$\int\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

即

$$u-\ln u+\ln C=\ln x,$$

亦即

$$xu=Ce^u.$$

将 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u,得所给方程通解为

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}.$$

三、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{6-5}$$

的方程叫做一阶线性微分方程,其中 $P(x)$,$Q(x)$都是自变量 x 的已知函数.

所谓“线性”指的是(6-5)式中的未知函数 y 及其导数 y' 都是一次的.

当 $Q(x)\equiv 0$ 时,(6-5)式变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \tag{6-6}$$

叫做一阶线性齐次微分方程.

当 $Q(x)\neq 0$ 时,(6-5)式叫做一阶线性非齐次微分方程.

先讨论线性齐次方程(6-6)的解. 它是可分离变量的方程,将其分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两端积分,得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

整理化简得
$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{6-7}$$

再讨论非齐次方程(6-5)的解.

方程(6-5)不能用分离变量的方法求解(因为 $Q(x)\neq 0$).但方程(6-6)与方程(6-5)的左端是一样的,只是右端不同,故(6-6)是(6-5)的特殊情况.因此可以设想(6-5)与(6-6)的解一定有联系,不妨按照方程(6-6)的解题思路分析它们之间的联系.

把
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$
变形为
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]\mathrm{d}x,$$
两边积分,得
$$\ln y=\int\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]\mathrm{d}x,$$
即
$$\begin{aligned} y&=e^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x}\\ &=e^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$
其中 $e^{\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}$ 是 x 的函数,记为 $C(x)$.于是上式可写成
$$y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{6-8}$$

把(6-7)和(6-8)式相比较,它们的区别仅仅是把(6-7)式中的常数 C 变成了(6-8)式中的函数 $C(x)$.

上述推导表明,方程(6-5)的解一定可表为
$$y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$
的形式,如果能进一步定出 $C(x)$,方程(6-5)就解出了.

下面求 $C(x)$.

将 $y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入方程(6-5),有
$$[C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}]'+P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$
整理得
$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$
两边积分,得
$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+C,$$
将上式回代到(6-8)式中,得(6-5)式的通解
$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+C\right). \tag{6-9}$$

推导(6-9)式的方法是把方程(6-5)对应的线性齐次方程(6-6)的通解中任意常数 C 看作自变量 x 的函数来求解线性非齐次方程(6-5),这种方法叫做常数变易法.

将(6-9)式改写成两项之和:
$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$
上式右端第一项是线性非齐次方程(6-5)的一个特解($C=0$ 时的解),第二项是对应的线性齐

次方程(6-6)的通解.因此有下面的定理.

定理 1 一阶线性非齐次微分方程(6-5)的通解是由对应的线性齐次方程(6-6)的通解加上线性非齐次方程(6-5)的一个特解构成的(证明从略).

经过上面的讨论,将求方程(6-5)的通解的步骤总结如下:

(1) 求出对应的线性齐次方程(6-6)的通解;

(2) 用常数变易法或用公式(6-9)求方程(6-5)的通解.

例 6 求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$的通解.

解 方法一:常数变易法.

先求该方程对应的齐次方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0$的通解,得

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{-\int\frac{-2}{x+1}dx} \\ &= C(x+1)^2. \end{aligned}$$

将上式的 C 换成$C(x)$,即令 $y=C(x)(x+1)^2$,代入原方程,得

$$[C(x)(x+1)^2]'-\frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2=(x+1)^3,$$

即
$$C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1)-\frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2=(x+1)^3.$$

整理得
$$C'(x)=(x+1),$$

积分得
$$C(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2+C.$$

于是原方程通解为

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right](x+1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2. \end{aligned}$$

方法二:公式法.

这里 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$,$Q(x)=(x+1)^3$.将其代入公式(6-9),得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^3e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int(x+1)^3\times\frac{1}{(x+1)^2}dx+C\right] \\ &= (x+1)^2\left[\int(x+1)dx+C\right] \\ &= (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right] \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2. \end{aligned}$$

例 7 求方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$的通解.

解 方法一:公式法.