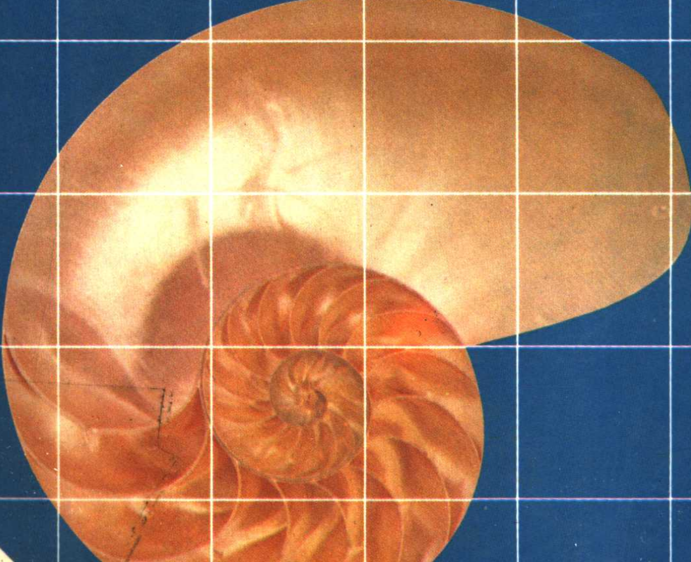
新世紀叢書

數學的趣味

形與數的世界

審定者：周東川



銀禾文化事業有限公司

新世紀

007
新世紀叢書

形與數的世界

銀禾文化事業公司印行

新世紀

007
新世紀叢書

形與數的世界

主　編：新世紀編輯小組
審定者：周東川
出版者：銀禾文化事業有限公司
發行人：陳俊安
地　址：台北市光復南路415巷
252號 1 樓
電　話：7335575・7335576
郵　撥：0736622-3
定　價：新台幣70元
新聞局登記證局版台業字第3292號
1988年 8 月四版

目錄

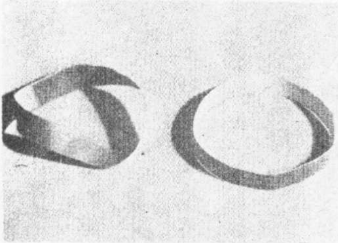
第一章　科學皇后

純數學是處理抽象理論的訓練，但它的結論卻能解決實際問題。它們包括那些過程？使用什麼標準？

每一個人都知道，或說應該知道，一切熟悉物品的內部和外部有何不同。人們都能立刻指出一幢建築物或房子的內部、外部，至於要區分出玩具汽球的內部和外部，更是不會出錯。

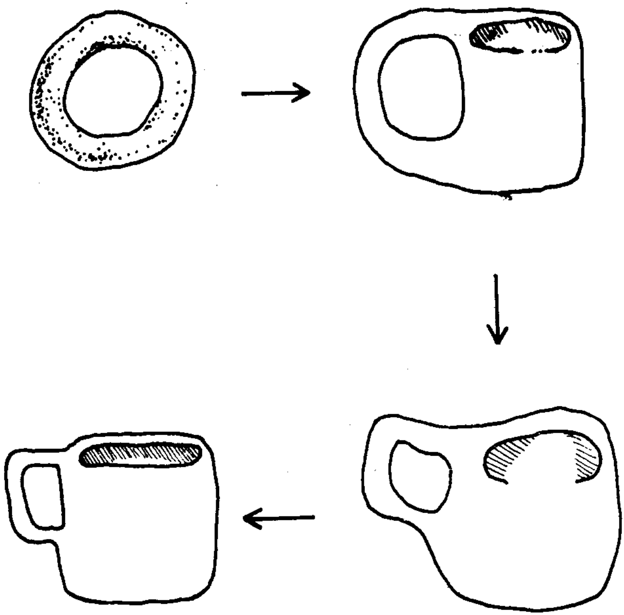
紙上隨便畫個圈，就把紙分成二部分：圈的內部和圈的外部。同樣的，用紙條圍個圓柱，可以分出圓柱的內面和外面；如果在紙條結成圓柱前，旋個半圈（如下頁上圖），它是否仍有所謂的內和外呢？有個試驗的方法：在圍成圓柱的紙條上，由相反的兩面各取一點，儘可能畫一條線連接這二點而不與紙的邊緣相交（表示內外兩面合一）；若非相交不可，就表示有外面和內面。所以只要畫一下，就可以知道，旋半圈的紙條只有一面，分不出內面和外面。

具有此特質的紙環，叫做莫比斯帶；研究莫比斯帶的工作，發展成數學內的最新學問——拓樸學（位置解析學）。照拓樸學英文字的含義，它是處理「關係」的知識，不僅是在我們所熟悉的課本上的幾何圖形之間，



將紙條接合前旋半圈，形成莫比斯帶。圖右是正常的圓柱。連續不斷的磁性錄音帶，就是一個大的莫比斯帶。

兒童樂園內的圓柱，內部和外部有很清晰的區別。但別種形狀的則未必分得那麼清楚。



拓樸學　由圓餅變形爲咖啡杯的過程。

而是平面或空間上幾何圖形的關係。它不處理帶有長度的線段，或是帶有面積或體積的幾何圖形；它只關注線段與線段、線段與圖形、圖形與圖形之間的關係。

普通常識之外

凡是一門新的學科出現，（如拓樸學）都會引起非數學家的質問：它們的用處何在？或詰難，這門數學和

眞實世界的關係太少。

眞正的數學家對這些批評，一笑置之。一個純數學家的工作，不是把眞實世界縮成一幅畫——這種工作屬於物理學家、化學家和地質學家。對他來講，一個數學體系的判準只是自相一致，也就是它應該由一些基本的敍述、公設，邏輯地推展出一個不自相矛盾的架構。

由嚴格邏輯的推導，所獲得的純數學結論，有些顯得荒謬。例如：數學家問數目字一共有幾個？答案是：無限多，與偶數數目總個數的無限多相同。這個答案看起來似乎是開玩笑，實際上卻可由一絲不苟的邏輯推理，得到這樣的結論。的確，這結論與平常觀察和普通常

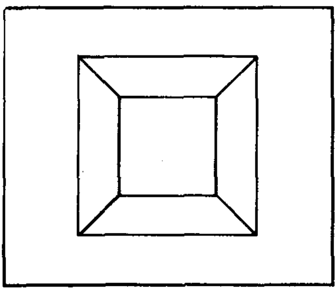
近代雕刻，是拓樸學研究的最好材料。拓樸學研究線和空間的關係，而不是它們的形狀和大小。

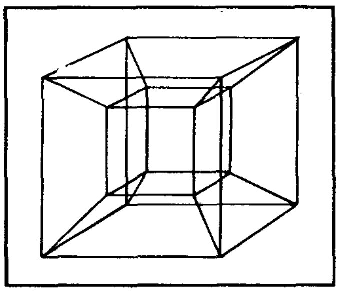
識完全相反，但它滿足了數學家的判斷標準。

不過，也用不著驚奇。數學本來就是在常識所忽略的地方，找出一絲眞理。這門科學所研究的對象正是我們日常談論的，但我們卻不知道究竟。

數的問題

「維數」是這些問題中最奧祕的例子，尤其是四維空間（照數學家說是「一個」四維空間）。在此，我們稍微談一些維數，若 x 代表一根線的長度（一維），x^2 代表以 x 爲邊的正方形面積（二維），x^3 代表以 x 爲邊的正方形體積（三維），那 x^4（四維）代表什麼呢？一般人都會問這問題，但同樣的，數學家覺得沒這必要。硬要求個答案，他會告訴你 x^4 是個超立方體或是「





左圖　二維空間所見之立體（三維）的形狀如圖所示。

右圖　數學家對四維空間內的想像，叫做超立方體，或“tesseract”。

tesseract」：卽四維空間內的等邊立方體此一圖形超越人們視力的範圍。所以，活在三維空間內的人類，誰能想像出這玩意兒呢？

理論數學家的工作，是對某個領域內的一般事例，找出普徧化的證明。擺在眼前，最豐富的領域就是數：一個接一個，不間斷的整數。數學家們付出了許多時間和精力，要在數的領域內硏究出普徧化的眞理。但是，有些二百年前留下的問題，到現在仍沒得到解答。

對這種問題，我們擧個關於質數的簡單例子，質數是指除了1與自身之外，不能被任何數整除的自然數。哥德巴哈定理談到質數的問題是這樣的：任何偶數均可用兩個質數的和表示。敍述很簡單，個別取任一偶數，也能找出兩個質數；但是，到今天，仍然求不出一般化的證明。附帶著的另一問題，如何得到質數的一般表示法，也困擾了許多偉大的數學家。拓樸學的門揭開之後，不少數學硏究工作指向幾何，這裏所說的「幾何」與歐幾里得的線段，正方形長方形的幾何大不相同。歐氏的定理、證明與圖形早在2,000年前就風行，沒有任何人敢向它挑戰。柏拉圖說過「若是上帝根據幾何造天地的話，祂一定找歐幾里得制定規則」。歐氏幾何之所以顯得那麼重要是因爲它的結構與自然界的實際狀況相配合，可以用來度量土地、建房子或是其他基本測量。

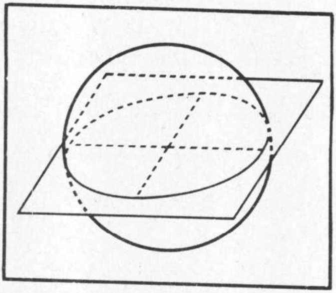
直到 19 世紀，數學家才發覺歐幾里得幾何的限制。像希臘城邦的小片土地，正好適用歐氏幾何測量、繪圖；要繪出整個歐洲或美國的地形，就不是歐氏幾何所能辦得到的。它只適用於一塊平面上，無限大、無限遠的平面，與眞實世界並不相同。

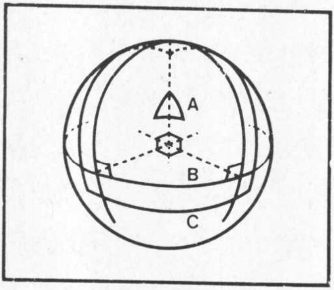
歐幾里得幾何有五個基本假設，受到數學家攻擊的是第五個假設，假設說「在平面上，通過已知線外一點，只能做一條線與已知線平行」。一位德國數學家，李曼將這假設更改爲「在平面上，通過已知線外一點，沒有一條線能與已知線平行」換句話說：在平面上的二條線絕不可能平行，一定會相交。（譯註：歐氏所謂平面，爲絕對平坦的平面；李氏所謂的平面，爲圓球的表面；是個曲面）除去第五個假設，李氏以其餘四個假設，建立另一種型態的幾何，稱之爲李曼幾何，適用的範圍爲我們熟悉的圖形：圓球。

李曼幾何的大部分內容，非常艱深。若是能將圓球表面想成爲一幅平面，比較容易體會，通常幾何說的線段距離，定義爲任意二點間的最短長度；但在球面上，連接二點的最短直線，爲大圓的一部分。

圓的接點

大圓的概念雖不甚熟悉，但不難了解。假設一個平





①
②
③

①大圓爲平面通過球中心點，與球相交的圖形。赤道是一個大圓。

②所示的大圓指出李曼所謂的平行線如何相交，形成三角形。圓球中的三角形對航海和製圖的影響很大。

③測量員仍然使用歐幾里得幾何工作。他們也可以使用李曼幾何。使用李曼幾何可以測量得比較精確，但是比較複雜。

面（例如紙片）通過球（例如：網球）的中心，與球相交，相交的點所成的圓叫做大圓。也可以把地球當做圓球，它的大圓就是赤道和整圈的子午線。所有大圓都會在球面上相交，因此，在李曼幾何內找不出平行的直線。（如上段所說，直線就是大圓）。

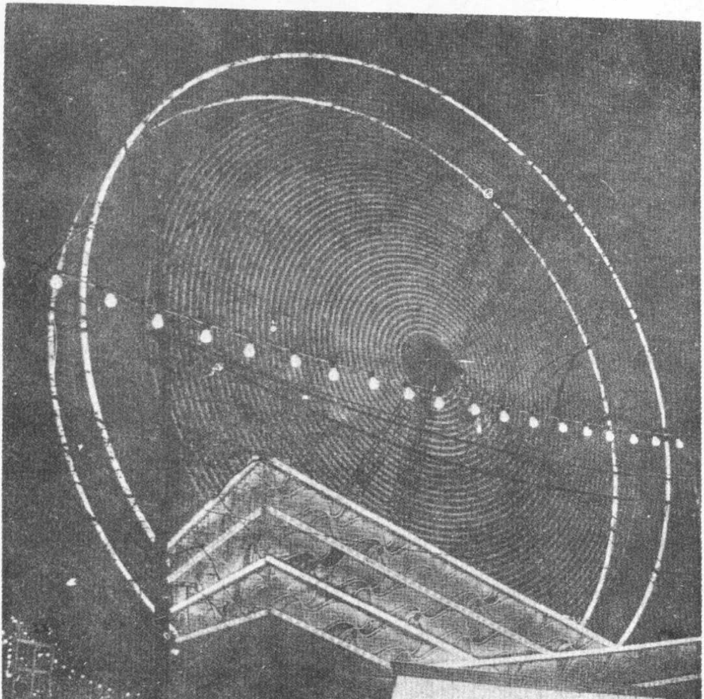
其他熟知的平面幾何定理，轉移到球面上，要做一些有趣的變動。譬如：歐氏幾何中，垂直同一直線於不同點的兩條線平行；畫二條垂直於赤道的直線，往北延伸到北極，向南延伸到南極，一定會相交在南北極，而形成有兩個直角的三角形；願意的話，可以畫出有三個直角的三角形。照歐氏幾何的定理，三角形的內角角度和僅為 180°，二個直角而已！

李曼幾何的研究發展，爲數學家的工作，提供了最好的說明；藉這些例子可以告訴那些數學外行人，爲何數學家的工作不易了解。數學中最深奧的理論可能是「數論」：有關整數性質的研究。

由 0 開始，正常的計數是 1，2，3，4，5……等等；若計數的方向相反，由加 1 變成減 1；計數數列成爲 −1，−2，−3，−4，−5，……等等；你看，數學家立刻由常識內的眞實狀況中，跳出來了。世上沒有一個人能想像「負三間房子」是什麼東西。眞要說出負數能夠像正數一樣，表示物體的個數，才是笑話呢

!數學家就是要處理這方面的問題，還要用合理的邏輯，推導出正確的結論。

討論負數的更進一步：平方根的概念，大家都熟悉



數學和物理內的四維空間，包括了時間的因素。照片上爲示時的費利斯齒輪，表示位置和時間的關係。

遊樂場內的各式娛樂器具可以說明不少數學觀念：各式的曲線、統計及或然率等。

的像 4 = 2 × 2，2 為 4 的平方根；同樣的，3 為 9 的平方根，4 為 16 的平方根，餘此類推，這有誰不知道呢？但是，－9 的平方根是多少？－9 這個數有平方根嗎？若是這種觀念有意義的話，利用數學，可以得到怎樣的值？有一個問題是由一位 16 世紀的意大利數學家卡登提出的，（除了數學家以外，誰會覺得這問題有意義呢？）他的問題是：那兩個數字相加為 10，相乘為