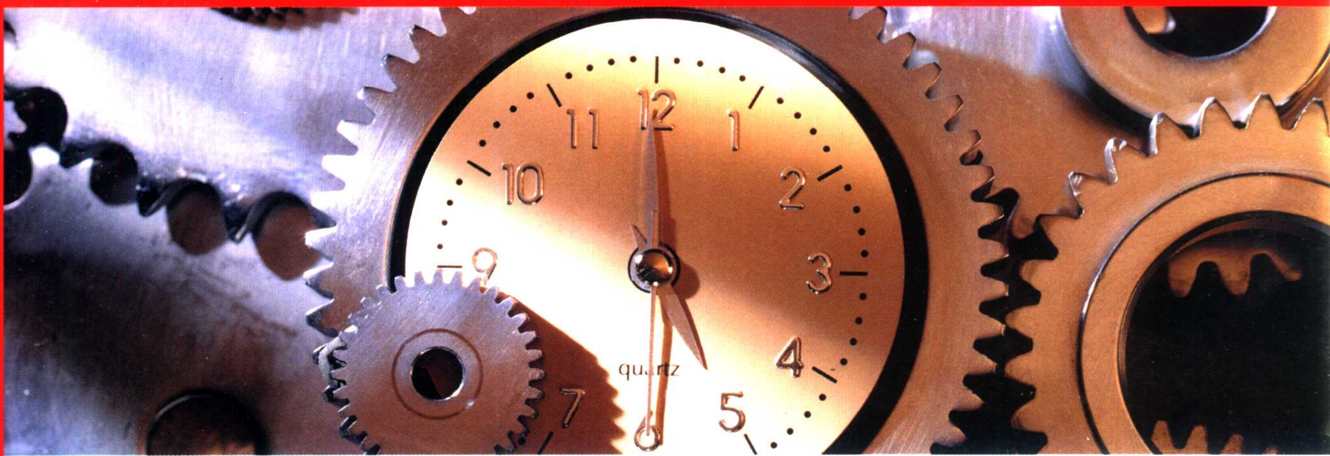
面向21世纪高等院校
机械类
专业规划教材



有限元法—原理、建模及应用

杜平安　甘娥忠　于亚婷　编著

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

面向21世纪高等院校机械类专业规划教材

有限元法

——原理、建模及应用

杜平安 甘娥忠 于亚婷 编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书介绍有限元法的原理、建模及应用。全书共分三篇二十一章。第一篇介绍有限元法的基本思想、概念和原理，包括平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析以及非线性问题的有限元法。该篇内容是应用有限元法解决实际问题的理论基础。第二篇介绍有限元建模方法。有限元模型是为有限元计算提供所有原始数据的计算模型，它直接影响计算结果的精度和计算规模的大小。该篇内容包括有限元建模概述、有限元建模的基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分方法、边界条件的建立以及一些常见建模方法。该篇内容是应用有限元法的关键，也是学习有限元法的目的。第三篇介绍有限元分析软件系统，在对有限元分析系统总体功能介绍的基础上，重点介绍了 ANSYS 和 I-DEAS 两个常用系统的特点、功能和应用实例。该篇内容是应用有限元法的工具。

本书力求将有限元法的理论和应用相结合，注重理论知识的建立和应用能力的培养，为有限元法的应用提供必要的理论支撑和应用指导。本书可作为高等学校工科类研究生、本科生的教科书，也可作为广大科研人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法:原理、建模及应用 / 杜平安等编著 .—北京:国防工业出版社,2004.8

面向 21 世纪高等院校机械类专业规划教材

ISBN 7-118-03536-X

Ⅰ.有...　Ⅱ.杜...　Ⅲ.有限元法-高等学校-教材　Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 068577 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码　100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 17¾　402 千字

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册　定价:24.00 元

前　言

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值方法。自20世纪50年代提出该方法以来，随着矩阵理论、数值分析方法、特别是计算机科学与技术的发展，有限元法无论在理论研究还是在应用上都取得了巨大进步。它从最初的固体力学领域拓展到了电磁学、流体力学、传热学以及声学等领域，从简单的静力分析发展到了动态分析、非线性分析、多物理场耦合分析等复杂问题的计算，有限元法已成为目前最为有效、应用最广的一种数值方法之一，成为计算机数值模拟中的一种主要手段。现广泛应用于机械、电子、航空航天、汽车、船舶、建筑以及石油化工等领域。

目前已出版较多介绍有限元法原理的论著和教材，但学生反映，仅仅学习原理还很难在实际工作中应用有限元法，为此编著者曾出版了《结构有限元分析建模方法》一书，该书在电子科技大学研究生中已连续讲授5届，学生反映良好。然而目前很多研究生在本科阶段并未学过有限元法，所以直接学习建模方法时感到理论基础不够。为此，本书对原书进行了内容扩充和修改，注重了知识的连续性和系统性，旨在将理论和应用相结合，既加强学生理论基础的学习，又注重培养学生解决实际问题的能力。

本书共分三篇二十一章。第一篇介绍有限元法的基本思想、概念和原理，包括平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析以及非线性问题的有限元法。该篇内容是应用有限元法解决实际问题的理论基础。第二篇介绍有限元建模方法。有限元模型是为有限元计算提供所有原始数据的计算模型，它直接影响计算结果的精度和计算规模的大小。该篇内容包括有限元建模概述、有限元建模的基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分方法、边界条件的建立以及一些常见建模方法。该篇内容是应用有限元法的关键，也是学习有限元法的目的。第三篇介绍有限元分析软件系统，在对有限元分析系统总体功能介绍的基础上，重点介绍了ANSYS和I-DEAS两个常用系统的特点、功能和应用实例。该篇内容是应用有限元法的工具。

考虑到工科学生的特点，本书在理论推导中尽量简练，尽量选择最基础的内容，一些应用较少、推导很复杂的内容并未纳入。在介绍建模方法时，列举了大量的实例，并尽量采用图示说明，增加内容的直观性和可读性。

本书由杜平安、甘娥忠、于亚婷编著，由杜平安担任主编并进行统稿。其中第一章、第二章、第七章、第八章、第十一章、第十二章、第十三章、第十四章、第十五章、第十六章、第十七章、第十八章、第十九章由杜平安编著，第三章、第四章、第五章、第六章、第九章、第十章由甘娥忠编著，第二十章、第二十一章由于亚婷编著。

华东交通大学周新建教授对本书进行了仔细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此深表

感谢!

本书为电子科技大学研究生重点课程建设项目,在此向电子科大研究生院对本书出版的大力支持表示衷心感谢!

由于编著者水平有限,书中难免有不妥之处,竭诚希望读者指正!

编著者

2004 年 8 月

目　录

第一篇　有限元法

第二篇　有限元建模方法

第三篇　常见有限元分析系统

第一篇　有限元法

第一章　绪　　论

第一节　有限元法的产生与基本思想

工程中的许多问题都可以用微分方程和相应的边界条件来描述。例如,图 1-1 所示的等截面悬臂梁在自由端受集中力 F 作用时,其变形挠度 y 满足微分方程

和边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F}{EI}(l-x)\\&y|_{x=0}=0\\&\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

式中,E 为梁材料的弹性模量;I 为梁截面对形心主轴的惯性矩;l 为悬臂梁长度。

再如,对于图 1-2 所示的结构,其内部稳定的温度分布可表示为

和边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0\\&\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)+\alpha(T-T_m)=0\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

式中,λ 为导热系数;α 为换热系数;T_m 为介质温度;Γ 为结构边界。

式(1-1)、式(1-2)是对物理问题的数学描述,称为数学模型。像式(1-1)、式(1-2)这种由微分方程和相应边界条件构成的定解问题称为微分方程边值问题。

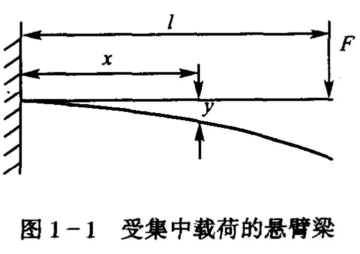


图 1-1　受集中载荷的悬臂梁

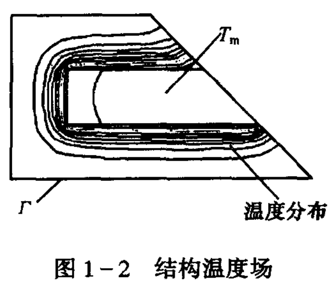


图 1-2　结构温度场

求解数学问题通常有两种方法:一种是解析法,它通过严格的数学推导求出问题的精确解;另一种是数值法,它是通过一定的算法和程序,利用计算机算出问题的近似解。

在工程实际问题中,由于几何形状、材料尺寸和外部载荷的不规则性,使得边值问题

的求解十分困难。除少数简单边值问题可用解析法求出精确解外,一般都只能用数值法求解。常见的数值法主要有以下几种。

一、差分法

差分法的基本思想是用均匀的网格离散求解域,用离散点的差分代替微分,从而将连续的微分方程和边界条件转换为网格节点处的差分方程,并用差分方程的解作为边值问题的近似解。由于差分方程是一组线性代数方程,因而容易求解。

下面用图 1-3 所示的一维问题来说明差分法原理。设一维函数 $y(x)$ 的求解域为 $[a, b]$,边值问题为

$$\left.\begin{aligned} &y''(x) - y'(x) + y(x) = f(x) \quad a < x < b \\ &y(a) = d_1 \quad y(b) = d_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

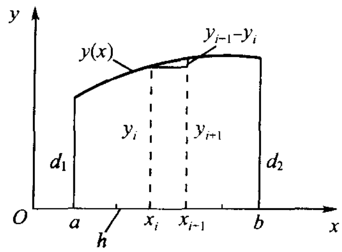


图 1-3　一维问题差分法

首先将求解域 $[a, b]$ 划分为 n 等分(即离散为 n 个等长的一维网格),形成的等分点以及两个端点称为节点 x_i($i=0,1,\cdots,n$),相邻两节点之间的距离 h 称为步长,$h=(b-a)/n$。

对于每个内节点 x_i($i=1,2,\cdots,n-1$),若用差分近似代替微分,则有

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

若将 $y(x_{i+1})$、$y(x_i)$、$y'(x_i)$ 简记为 y_{i+1}、y_i、y'_i(以下类似),则上式为

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \tag{1-4}$$

同样,

$$y''(x_i) \approx \frac{\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \dfrac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}}{h} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{1-5}$$

将式(1-4)、式(1-5)代入式(1-3),得

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + y_i = f_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

即

$$(1-h)y_{i+1} - (2-h-h^2)y_i + y_{i-1} = f_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{1-6}$$

再由式(1-3)中的边界条件有

$$y_0 = d_1,\ y_n = d_2 \tag{1-7}$$

式(1-6)、式(1-7)组成一个封闭的关于 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的线性方程组,共有 $n+1$ 个方程,因此可求出 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 共 $n+1$ 个未知量。这些量便是差分法求得的原边值问题解 $y(x)$ 在节点 x_i 上的近似值,即数值解。

差分网格越密,节点越多,求解精度越高。但由于差分法采用均匀大小的正交网格,

所以当求解区域的边界形状比较复杂时，用差分法求解的精度就会受到限制，甚至不能求解。

二、变分法

变分法是利用变分原理求解边值问题的一种方法。变分原理是指，微分方程边值问题的解等价于相应泛函极值问题的解。利用这一原理，就可将边值问题的复杂求解转换为相对简单的泛函极值的求解。

里兹法是求解泛函极值的一种直接解法。其基本思想是选择一个定义于整个求解域并满足边界条件的试探函数，试探函数的形式一般为含有 n 个待定系数的多项式；然后将试探函数代入泛函表达式中，并利用泛函有极值的条件——泛函对各待定系数的偏微分为零，建立起 n 个关于待定系数的线性方程；联立求解这些方程计算出各个系数，就确定了使泛函实现极值的试探函数，该函数就是原边值问题的近似解。

下面用一个具体的例子来说明里兹法的基本原理。

设有边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}+y+1=0\\&y(0)=0\quad y(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

通过数学推导，求得其泛函为

$$I[y(x)]=\int_0^1\left(\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}y^2-y\right)dx\tag{1-9}$$

现用一试探函数近似原边值问题的解，试探函数设为以下多项式形式

$$\varphi(x)=\alpha_1(x-x^2)+\alpha_2(x-x^3)+\alpha_3(x-x^4)+\cdots+\alpha_n(x-x^{n+1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x-x^{i+1})\tag{1-10}$$

式中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为待定系数。

因此有

$$y(x)\approx\varphi(x)$$

试探函数中所取的项数越多，逼近的精度越高。

将试探函数代入式(1－9)，可以得到关于 n 个待定系数的泛函表达式，简记为

$$I[y(x)]\approx I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$$

根据多元函数有极值的必要条件，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)=0\\&\frac{\partial}{\partial\alpha_2}I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)=0\\&\vdots\\&\frac{\partial}{\partial\alpha_n}I(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)=0\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

上式是关于待定系数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的由 n 个线性方程组成的方程组，求解该方程组便可求出这 n 个待定系数。再将这些系数代回到式(1－10)，就可得到试探函数的表达

式，即原边值问题的近似解。

三、有限元法

有限元法是在差分法和变分法的基础上发展起来的一种数值方法，它吸取了差分法对求解域进行离散处理的启示，又继承了里兹法选择试探函数的合理方法。从实质上看，有限元法与里兹法是等效的，它属于里兹法的范畴，多数问题的有限元方程都是利用变分原理来建立的。但由于有限元法采用了离散处理，所以它计算更为简单，处理的问题更为复杂，因而具有更广泛的实用价值。

有限元法的基本思想可归结为两个方面，一是离散，二是分片插值。

1．离散

离散就是将一个连续的求解域人为地划分为一定数量的单元(element)，单元又称网格(mesh)，单元之间的连接点称为节点(node)，单元间的相互作用只能通过节点传递。通过离散，一个连续体便分割为由有限数量单元组成的组合体，如图 1－4 所示。

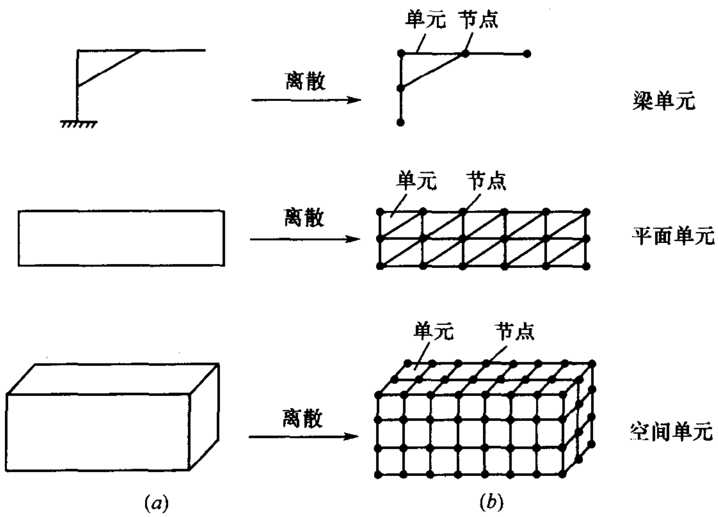


图 1－4　连续体的离散

(a)连续体；(b)组合体。

离散处理的目的，就是将原来具有无限自由度的连续变量微分方程和边界条件转换为只包含有限个节点变量的代数方程组，以利于用计算机求解。

有限元法的离散思想借鉴于差分法，但做了适当改进。首先，差分法是对计算对象的微分方程和边界条件进行离散，而有限元法是对计算对象的物理模型本身进行离散，即使该物理模型的微分方程尚不能列出，但离散过程依然能够进行。其次，有限元法的单元形状并不限于规则网格，各个单元的形状和大小也并不要求一样，因此在处理具有复杂几何形状和边界条件以及在处理具有像应力集中这样的局部特性时，有限元法适应性更强，离散精度更高。

例如图 1－5 所示的齿轮轮齿，若用图(a)中差分法的均匀网格离散，则离散后的形状与原有齿形相差就很大。如果用图(b)中有限元法网格划分，则组合体就能较好地逼近原有的轮廓形状，同时在齿根应力集中部位也能通过加密网格来提高精度。