



特别合作
sina 新浪教育

北京万向思维基础教育教学研究中心成果

高二数学

教材知识详解

上

总主编 刘增利

[审订] 清华大学 王志

章节详解 + 课后解答 + 学科综合 + 思路导航



北京万向思维



北京教育出版社



一网打尽系列

教材知识 详解

高二数学(上)

主 编: 王拥军 冯秀臣

作 者: 王拥军 宋美贞 宿守军

王永明 刘向伟 成丽君

岳云涛 沈 飞 王健敏

北京万向思维
北京教育出版社

北京万向思维幸运之星奖学金评选活动

参加办法：凡购买北京万向思维任意产品，填写所附“幸运之星奖学金申请卡”，并于2004年11月30日之前邮寄给我们，就有机会获得万向思维幸运之星奖学金。

奖金：一等奖1名，奖学金5000元
二等奖10名，奖学金1000元
三等奖150名，奖学金100元
鼓励奖1000名，每人赠送两套学习信息资料

一、二、三等奖奖金均为税前，个人所得税由北京万向思维国际教育研究中心代扣代缴。

以上获奖者还将有幸成为万向思维幸运之星，参加全国性、地方性宣传推广活动。

抽奖时间：2004年12月10日

抽奖结果：中奖名单将于2004年12月31日在万向思维学习网上公布，届时我们还将以电话或信件方式通知本人，敬请关注。

本次抽奖活动的最终解释权归北京万向思维国际教育研究中心。

本次抽奖活动经北京市海淀区公证处公证

● 版权所有 翻印必究 ●

教材知识详解 高二数学(上)

策划设计：北京万向思维基础教育教学研究中心
中学数学教研组

总主编：刘增利

主编：王拥军 冯秀臣

责任编辑：孙 森

责任校对：冯秀臣

封面设计：魏 晋

出版发行：北京教育出版社

印刷：陕西思维印务有限公司

经销：各地书店

开本：890×1240 1/32

印张：11.75

字数：310千字

版次：2004年6月第一版

印次：2004年6月第一次印刷

书号：ISBN 7-5303-2628-7/G·2595

定价：12.80元

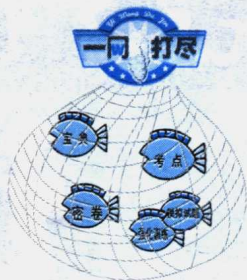
总主编寄语

一网打尽

既给鱼又给渔

猫妈妈养了两只小猫，她给了一只小猫一条大鱼，却教给另一只小猫捕鱼的方法。几天之后，得到大鱼的小猫吃完了鱼，饿得喵喵直叫，学会捕鱼的小猫却得到了一条又一条的鱼。

数学是通向科学大门的钥匙。历史证明，国家的繁荣昌盛，关键在于高新科技的发达和经济管理的高效率。高新科技的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。数学给与人们的不只是知识，更重要的是能力。掌握数学的概念、计算和解决问题的能力对一个真正有文化的人来说是至关重要的。因此中学数学教育在高素质人才的培养中就显得格外重要。为此，北京万向思维国际教育研究中心特聘请全国实验区的骨干教师和国内知名大学的专家学者共同精心打造了这套《中学数学教材知识详解》丛书。



首先本着打牢数学基础的目的，我们对教材中的数学知识进行了全面系统地剖析详解，并精选了大量例题分类进行了详细的分析解答。根据我国现行的考试模式和要求，在编写时注重学科内的综合和学科间的交叉渗透。为了适应学生学习兴趣广的特点，我们还特设了自主空间和探究性学习栏目，提供了数学专业词汇的英文、探究性问题和大量知识材料；我们也对“数学思想方法”专门进行了研究总结，置于附录中供学生参考。

筑高楼光有砖还是不够的，所以在讲解知识的基础上，我们注重引导并激发学生学习的兴趣，提高学生发散、创新、应用等的思维能力，开阔视野，让数学的精华：思考方法和创造能力能深入灵魂。本书从策划到编写再到出版，倾注了大量专家、老师和编辑们的心血，为的就是给所有热爱学习的人提供一本权威并且质量一流的好书。

“天道酬勤”，再辅以明灯指路，相信我们的读者一定能拥有远大的前程、光辉的未来！

刘增利

2004年5月1日

于清华大学

一网打尽系列 丛书编委会

一线名师大联手

清华附中	北大附中	北师大附中	首都师大附中	北京二一四中	北京一零一中学
北京五中	北京三中	北京十五中	北京十一学校	天津海河中学	北师大实验中学
密云二中	大峪中学	北京十四中	北方交大附中	东城教研中心	海淀教师进修学校
育英中学	卫国中学	北京十九中	北京三十一中	西城教研中心	大兴教师进修学校
北医附中	郑州五中	北京二十中	北京四十四中	崇文教研中心	顺义教师进修学校
矿院附中	郑州八中	中关村中学	北京六十六中	朝阳教研中心	教育学院丰台分院
黄村四中	郑州二中	知春里中学	北京一三八中	密云教研中心	教育学院宣武分院
黄村七中	郑州中学	花园村中学	北京一五九中	石家庄教科所	门头沟教师进修学校
黄村八中		燕城教研室	郑州外语中学	郑州五十七中	天津市河西区教研室
		北京教科院	郑州大学二附中	郑州三十四中	郑州市教育局教研室
		太平路中学			河南省第二实验中学

语文	连中国	张 洋	郑伯安	李 娜	崔 萍	宋君贤	王玉河	朱传世	张春青
	邢冬方	胡明珠	徐 波	韩伟民	王迎利	乔书振	潘晚娟	张连娣	杨 丽
数学	宋秀英	周京昆	吕立人	王淑宁	李淑贤	王 磊	徐 波	陈奥月	黄占林
	穆 昭	赵宝桂	李永茂	柳 莉	张彩虹	刘晓静	孙 波	马东杰	夏 宇
英语	刘 燕	邱学东	张 娟	屈永科	樊微微	王丽华	马淑霞	史玉涛	赵经平
	郭根秋	程 霞	郭翠敏	刘丽霞	王 燕	李秀丽	张贵君	许玉敏	沈 飞
物理	马金敏	张君华	吕荣卿	张 诚	石罗松	李云雷	唐军平	霍雪雷	岳云涛
	张巧珍	郭雪早	张秀芳	岳胜兰	贾玉娟	程秀菊	何中义	邢玉申	戚丽君
化学	秦莉莉	蔺青刚	郭树林	虎秀兰	马丽红	王继增	孙玉章	刘向伟	刘向伟
	韩尚庆	邢 军	张 云	毛五忠	胡传新	石 慧	王 伟	刘春艳	王健敏
政治	王拥军	宋美贞	信守军	王永明	冯秀臣	朱春光	王 志	任宏彬	王 亮
	冯瑞先	刘志凤	耿宝柱	李晚洁	孙向党	吕晚华	樊艳慧	王微微	于宏伟
历史	杨 升	赵小红	耿文灵	柴珍珠					
	黄玉芳	孙 妍	李星辰	张 卓	关 高	张小燕	孙 瑜	王文晖	李 微
地理	马玉珍	杜志芬	张秀清	严瑞芳	魏 雪	张莉萍	周书丽	杨红琳	马三红
	刘 欣	于 欣	朱慧敏	卢志敏	高红艳	陈 娟	刘占林	张树军	朱重华
生物	应 劼	周兆玉	郭玉芬	黄 芳	钟菁菁	孙 妍	张晚燕	张 帆	张鹏燕
	何玉玲	李 霞	周 晶	杜 欣	王立英	马 敏	贾 光		
数学	陈立华	孙嘉平	金文力	王树明	赵 伟	李隆顺	林草华	唐细爱	刘 凌
	张文煊	谭宇清	戚世强	李 里	吴希夏	张京文	文瑞琴	何德强	郑合群
化学	边 红	汪维诚	陈翠梅	杨文彬	李 权	杨艳青	任廷全	张丽珠	
	马京莉	魏 安	魏新华	谢 虹	顾俊英	李玉英	刘松伟	班文岭	赵玉静
政治	吴海军	郭照辉	曹 艳	李 海	皮洪琼	陶春香	张立言	常如正	
	朱 勇	罗 霞	舒嘉文	沈义明	李克峰	张银线	靳 荣	葛本红	陈立华
历史	崔红艳	王阿丽	帅 刚						
	谢国平	张斌平	郭文英	张 鹰	李文胜				
地理	陶 利	孟胜修	丁伯敏	高 枫	卢奉琦	史纪春			
	赵京秋	刘 峰	孙 岩	李 萍	王 新	王 忠			
生物									

数学审读

[清华大学] 王 忠 [北京大学] 方 淮 [北京师范大学] 杨成立

万向思维专家顾问团



王大绩

语文特级教师 享受国务院特殊津贴的专家。北京市教育学会语文教学研究会常务理事，北京市教育科学研究院兼职研究员。光明日报《考试》杂志编委。

多年来潜心研究教学与高考规律，有数篇论文获国家级奖项，录制音像制品数十种，多次在中央电视台、中央人民广播电台、中央教育电视台、北京电视台及新浪网、搜狐网等媒体做高考辅导讲座，每年应邀到全国各省区讲学。

寄语：立志冲击顶峰，探索登山道路，是师生共同的责任；而冲击顶峰，登上峰顶，靠同学自己！



王建民

数学特级教师 享受国务院特殊津贴的专家。中国数学奥林匹克高级教练。多次被评为市、区先进工作者、模范教师，被评为海淀区教育战线十佳中央委员。曾任北京市海淀区第七至第十一届人民代表大会代表。

多次在中央人民广播电台、中央电视台、中央教育电视台、北京电视台、新浪网、搜狐网等做高考辅导讲座，每年应邀到全国各省区讲学。

寄语：认真读书，深入思考，崇尚理性精神，领悟数学思想，从数学的学习中，获得可持续发展的教学能力。



王乐君

英语特级教师 2001至2003届北京市高级教师职称英语学科评审主任，市级特级教师评审委员。教学35年，熟悉中学和大学各种教材，擅长培养和训练学生用英语思维进行书面表达。经常应邀去全国各地讲学。

寄语：丰富的语言知识和较强的语言技能会使你成为英语高才生。



徐兆泰

政治特级教师 原北京教科院基础教育教研研究中心政治室主任。参加全国高校招生命题工作14年。组织并编写：《北京市中学思想政治课课堂教学评价标准》、北京市《中华传统美德》实验教材；撰写了《北京市思想政治课的教研工作》等。

寄语：正确理解全面掌握基本概念、原理和理论知识，是形成能力的前提和基础。分析问题和解决问题的能力是练出来的，只有多运用所学知识去认识事物，才能不断提高自己认识世界和改造世界的能力。



周誉蔼

物理特级教师 原十五中副校长。人民教育出版社特聘编辑，光明日报《考试》杂志编委。长期任北京市物理兼职教研员。参与编写了人教社《高中物理教参》，编写多部学生高考教辅书、高中生物理解书和教师培训教材等。

寄语：联系实际、反复思考、懂理论、提高能力。



孟广恒

历史特级教师 原北京教科院基础教育教研研究中心历史室主任、全国历史专业委员会常务理事、副秘书长、北京历史教学研究会会长。历史教学著述和论文计200多万字。指导、培养优秀教师多人。

寄语：历史知识的基础性，理解问题的深邃性，分析问题的全面性，与有关学科的交互性，再加之学习方法的灵活性，掌握这五性，你就一定会成功。



程祯尧

化学特级教师 原北京教育学院丰台分院副院长。参与人民教育出版社《新课程标准高中化学》课本的编写。中国教育学会教育统计与测量分会考试委员会副主任、常委；曾荣授教师奖获得者；中央广播电视学校十佳教师。著述有：《化学基础》、《化学教育与素质教育》。

寄语：自学自励，自思自励，做一輩子主动学习的人。



郭正权

地理特级教师 北京中学地理教研员。曾专职编写中学地理教材。40多年来献身中学地理教育事业，并撰写出版了《中国自然地理常识问答》、《中学地理教材中的名人》、《现代中学地理教学研究》等地理教育专著，发表地理教学论文数十篇。

寄语：紧紧地抓住环境、资源、人口和可持续发展这个主题，密切地联系当地实际，学会分析和思考地理问题的方法，这是学好地理知识的一条必由之路。



裴伯川

生物特级教师 原北京市教育科学研究院基础教育教研研究中心生物室主任。全国生物专业委员会常务理事兼学术委员会常务副主任；首都师范大学研究生院客座教授。

寄语：既要通过对生物的学习，加深理解，又要主动参与，不断创新全面提高自身的生物科学素养。

万向思维学生顾问团



马亦欣：2002年以山东省理科第七名的高考成绩考入北京大学。现就读于北大元培计划实验班。

座右铭：Tomorrow is another day.

对学弟学妹的希望：把握现在，把握自己，用自己的努力塑造自己的明天。



刘雅洁：现就读于北京大学金融系。高中时曾获山西省奥林匹克竞赛物理二等奖、化学二等奖。

2002年高考总分685分（理科），山西省第四名，大同市第一名。



魏娜：现就读于北京大学金融系。2002年高考新疆文科状元。中学时曾多次获得省三好学生和优秀班干部称号。

人生格言：自信是远胜一切的人生法宝！



黄琳娜：北京大学法学院2003级本科生。

最喜欢的名言是：

能够摄取必要营养的人要比吃的很多的人更健康；同样地，真正的学者往往不是读了很多书的人，而是读了有用的书的人。

——（古希腊）亚里士多德



李响：就读于清华大学信息学院自动化系，任班长职务，获清华大学新生一等奖学金。

2002年吉林省理科第一名。曾获全国小学生作文竞赛优秀奖、吉林省中小学作文竞赛二等奖、吉林省化学竞赛二等奖、四平市优秀学生干部、吉林省优秀学生干部（高考加10分）等奖励。



王悦：清华大学2002级电子工程系电子科学与技术专业。高中时获得山西省化学、生物、英语竞赛一等奖，物理竞赛二等奖，大一曾担任班级组织委员。



夏华：1985年生于江西湖口县，2002年毕业于湖口县中学，高考总分为683分，就读于北京大学信息管理信息系统专业。高二曾参加高考被东南大学少年班录取。

我的理念是：幸运总是只垂青于锲而不舍的人们！

面对困难，让我们抱着平常心、自信心和背水一战的心态为自己的未来和梦想打拼！旗鼓相当勇者胜！成功与辉煌在向勇士们招手！



李光明：清华大学2002级工业工程系的學生。高中时担任班长三年，参加了全国奥林匹克物理竞赛与全国高中生数学联赛，取得物理一等奖，数学二等奖的成绩。

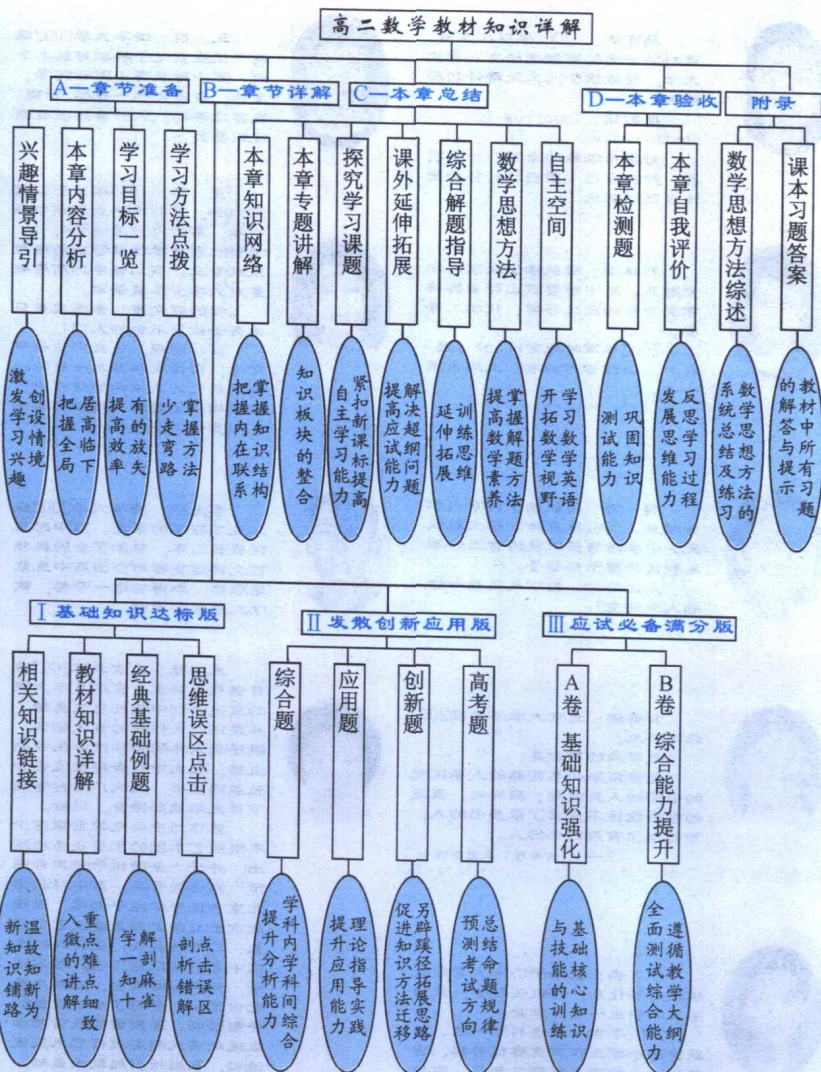


王朝彦：北京大学2002级日语系本科生。在同日本大使的交流活动中担任日文主持，并兼任北大校长的日文翻译。现任北大外国语学院学生会副主席，北大中日青年交流会长兼团支书，北大广播台专栏节目主编兼任播音、记者。

曾作为中央电视台银河少年电视艺术团团员在各地演出，并于“全国城市童声合唱节”获得优秀奖。高中时获得北京市优秀学生干部奖，担任北京十五中学学生会文艺部部长、广播台台长，在历次的考试中名列年级前三名。学习之余，受中央电视台、北京广播电台邀请，参与了多期栏目的录制活动。暑期曾代表首都学生远赴澳大利亚进行艺术交流活动，在当地引起巨大轰动。

自己的格言：生命中，没有什么是我的终极目标。生命的线，因不断延长，而永远找不到停滞的那一天。

来自作者的使用说明



CONTENTS 目录

第六章 不等式

A——章节准备	(1)	II 发散创新应用版	(38)
一、兴趣情景导引	(1)	一、综合题	(38)
二、本章内容分析	(1)	二、应用题	(39)
三、学习目标一览	(1)	三、创新题	(40)
四、学习方法点拨	(2)	四、高考题	(41)
B——章节详解	(2)	III 应试必备满分版	(43)
6.1 不等式的性质	(2)	A 卷 基础知识强化	(43)
I 基础知识达标版	(2)	B 卷 综合能力提升	(45)
一、相关知识链接	(2)	6.4 不等式的解法举例	(49)
二、教材知识详解	(2)	I 基础知识达标版	(49)
三、经典基础例题	(4)	一、相关知识链接	(49)
四、思维误区点击	(5)	二、教材知识详解	(50)
II 发散创新应用版	(6)	三、经典基础例题	(52)
一、综合题	(6)	四、思维误区点击	(56)
二、应用题	(7)	II 发散创新应用版	(56)
三、创新题	(8)	一、综合题	(56)
四、高考题	(9)	二、应用题	(57)
III 应试必备满分版	(10)	三、创新题	(58)
基础知识强化	(10)	四、高考题	(58)
6.2 算术平均数与几何平均数	(14)	III 应试必备满分版	(60)
I 基础知识达标版	(14)	A 卷 基础知识强化	(60)
一、相关知识链接	(14)	B 卷 综合能力提升	(61)
二、教材知识详解	(15)	6.5 含有绝对值的不等式	(66)
三、经典基础例题	(16)	I 基础知识达标版	(66)
四、思维误区点击	(17)	一、相关知识链接	(66)
II 发散创新应用版	(19)	二、教材知识详解	(66)
一、综合题	(19)	三、经典基础例题	(67)
二、应用题	(21)	四、思维误区点击	(70)
三、创新题	(22)	II 发散创新应用版	(70)
四、高考题	(24)	一、综合题	(70)
III 应试必备满分版	(26)	二、应用题	(71)
基础知识强化	(26)	三、创新题	(71)
6.3 不等式的证明	(30)	四、高考题	(72)
I 基础知识达标版	(30)	III 应试必备满分版	(74)
一、相关知识链接	(30)	基础知识强化	(74)
二、教材知识详解	(31)	C——本章总结	(77)
三、经典基础例题	(33)	一、本章知识网络	(77)
四、思维误区点击	(37)	二、本章专题讲解	(78)
		三、探究学习课题	(82)

CONTENTS 目录

四、自主空间	(84)	7.3 两条直线的位置关系	(134)
D——本章验收	(86)	I 基础知识达标版	(134)
I 本章检测题	(86)	一、相关知识链接	(134)
II 本章自我评价	(89)	二、教材知识详解	(134)
第七章 直线和圆的方程		三、经典基础例题	(137)
A——章节准备	(91)	四、思维误区点击	(139)
一、兴趣情景导引	(91)	II 发散创新应用版	(141)
二、本章内容分析	(91)	一、综合题	(141)
三、学习目标一览	(91)	二、应用题	(142)
四、学习方法点拨	(91)	三、创新题	(143)
B——章节详解	(92)	四、高考题	(144)
7.1 直线的倾斜角和斜率	(92)	III 应试必备满分版	(145)
I 基础知识达标版	(92)	A 卷 基础知识强化	(145)
一、相关知识链接	(92)	B 卷 综合能力提升	(146)
二、教材知识详解	(92)	7.4 简单的线性规划	(150)
三、经典基础例题	(95)	I 基础知识达标版	(150)
四、思维误区点击	(97)	一、相关知识链接	(150)
II 发散创新应用版	(98)	二、教材知识详解	(150)
一、综合题	(98)	三、经典基础例题	(152)
二、应用题	(99)	四、思维误区点击	(153)
三、创新题	(100)	II 发散创新应用版	(154)
四、高考题	(102)	一、综合题	(154)
III 应试必备满分版	(103)	二、应用题	(155)
A 卷 基础知识强化	(103)	三、创新题	(158)
B 卷 综合能力提升	(103)	III 应试必备满分版	(159)
7.2 直线的方程	(107)	A 卷 基础知识强化	(159)
I 基础知识达标版	(107)	B 卷 综合能力提升	(161)
一、相关知识链接	(107)	7.5 曲线和方程	(167)
二、教材知识详解	(108)	I 基础知识达标版	(167)
三、经典基础例题	(111)	一、相关知识链接	(167)
四、思维误区点击	(113)	二、教材知识详解	(167)
II 发散创新应用版	(115)	三、经典基础例题	(168)
一、综合题	(115)	四、思维误区点击	(170)
二、应用题	(117)	II 发散创新应用版	(171)
三、创新题	(118)	一、综合题	(171)
四、高考题	(122)	二、应用题	(172)
III 应试必备满分版	(125)	三、创新题	(173)
A 卷 基础知识强化	(125)	四、高考题	(174)
B 卷 综合能力提升	(126)	III 应试必备满分版	(177)

CONTENTS 目录

A 卷 基础知识强化	(177)	一、综合题	(219)
B 卷 综合能力提升	(178)	二、应用题	(221)
7.6 圆的方程	(183)	三、创新题	(221)
I 基础知识达标版	(183)	四、高考题	(223)
一、相关知识链接	(183)	III 应试必备满分版	(226)
二、教材知识详解	(183)	A 卷 基础知识强化	(226)
三、经典基础例题	(183)	B 卷 综合能力提升	(227)
四、思维误区点击	(186)	8.2 椭圆的简单几何性质	(232)
II 发散创新应用版	(188)	I 基础知识达标版	(232)
一、综合题	(188)	一、相关知识链接	(232)
二、应用题	(190)	二、教材知识详解	(233)
三、创新题	(191)	三、经典基础例题	(234)
四、高考题	(193)	四、思维误区点击	(236)
III 应试必备满分版	(195)	II 发散创新应用版	(237)
A 卷 基础知识强化	(195)	一、综合题	(237)
B 卷 综合能力提升	(196)	二、应用题	(238)
C——本章总结	(201)	三、创新题	(239)
一、本章知识网络	(201)	四、高考题	(241)
二、本章专题讲解	(203)	III 应试必备满分版	(245)
三、探究学习课题	(205)	A 卷 基础知识强化	(245)
四、课外延伸拓展	(206)	B 卷 综合能力提升	(246)
五、自主空间	(207)	8.3 双曲线及其标准方程	(252)
D——本章验收	(208)	I 基础知识达标版	(252)
I 本章检测题	(208)	一、相关知识链接	(252)
II 本章自我评价	(213)	二、教材知识详解	(253)
第八章 圆锥曲线方程		三、经典基础例题	(253)
A——章节准备	(214)	四、思维误区点击	(255)
一、兴趣情景导引	(214)	II 发散创新应用版	(256)
二、本章内容分析	(214)	一、综合题	(256)
三、学习目标一览	(214)	二、应用题	(257)
四、学习方法点拨	(214)	三、创新题	(258)
B——章节详解	(215)	四、高考题	(260)
8.1 椭圆及其标准方程	(215)	III 应试必备满分版	(262)
I 基础知识达标版	(215)	A 卷 基础知识强化	(262)
一、相关知识链接	(215)	B 卷 综合能力提升	(264)
二、教材知识详解	(216)	8.4 双曲线的简单几何性质	(269)
三、经典基础例题	(217)	I 基础知识达标版	(269)
四、思维误区点击	(218)	一、相关知识链接	(269)
II 发散创新应用版	(219)	二、教材知识详解	(270)

CONTENTS 目录

三、经典基础例题	(271)
四、思维误区点击	(273)
II 发散创新应用版	(273)
一、综合题	(273)
二、应用题	(275)
三、创新题	(276)
四、高考题	(277)
III 应试必备满分版	(281)
A 卷 基础知识强化	(281)
B 卷 综合能力提升	(282)
8.5 抛物线及其标准方程	(288)
I 基础知识达标版	(288)
一、相关知识链接	(288)
二、教材知识详解	(288)
三、经典基础例题	(289)
四、思维误区点击	(290)
II 发散创新应用版	(291)
一、综合题	(291)
二、应用题	(292)
三、创新题	(293)
四、高考题	(293)
III 应试必备满分版	(295)
A 卷 基础知识强化	(295)
B 卷 综合能力提升	(296)
8.6 抛物线的简单几何性质	(299)
I 基础知识达标版	(299)
一、相关知识链接	(299)
二、教材知识详解	(300)
三、经典基础例题	(300)
四、思维误区点击	(302)
II 发散创新应用版	(303)
一、综合题	(303)
二、应用题	(305)
三、创新题	(306)
四、高考题	(307)
III 应试必备满分版	(309)
A 卷 基础知识强化	(309)
B 卷 综合能力提升	(310)

C——本章总结	(315)
一、本章知识网络	(315)
二、本章专题讲解	(316)
三、综合解题指导	(319)
四、数学思想方法	(322)
五、自主空间	(322)
D——本章验收	(323)
I 本章检测题	(323)
II 本章自我评价	(328)

附录

附录一 数学思想方法综述	(329)
附录二 课本练习题复习题参考答案	(331)
第六章 不等式	(331)
6.1 不等式的性质	(331)
6.2 算术平均数与几何平均数	(333)
6.3 不等式的证明	(334)
6.4 不等式的解法举例	(335)
6.5 含有绝对值的不等式	(336)
复习参考题六	(337)
第七章 直线和圆的方程	(339)
7.1 直线的倾斜角和斜率	(339)
7.2 直线的方程	(340)
7.3 两条直线的位置关系	(343)
7.4 简单的线性规划	(347)
7.5 曲线和方程	(350)
7.6 圆的方程	(351)
复习参考题七	(353)
第八章 圆锥曲线方程	(356)
8.1 椭圆及其标准方程	(356)
8.2 椭圆的简单几何性质	(357)
8.3 双曲线及其标准方程	(358)
8.4 双曲线的简单几何性质	(359)
8.5 抛物线及其标准方程	(360)
8.6 抛物线的简单几何性质	(361)
复习参考题八	(362)

第六章 不等式

数学是人类抽象思维的产物,是一种抽象的存在.

A

一、兴趣情景导引

如图 6-0-1 所示,为处理含有某种杂质的污水,要制造一底宽为 2 m 的无盖长方体沉淀箱.污水从 A 孔流入,经沉淀后从 B 孔流出,设箱体的长度为 a m,高度为 b m.已知流水中含杂质的质量分数与 a 、 b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料 60 m^2 ,问:当 a 、 b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量最小(A、B 两孔的面积忽略不计)?

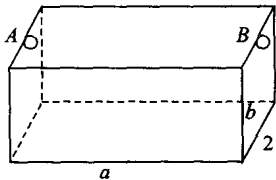


图 6-0-1

数学课外小组的同学认为综合应用所学数学知识、思想和方法可以解决实际问题,可以通过建立函数关系、不等式的性质、最值等基础知识来解决.同学们要想知道该题的结果,请跟我们一起来研究不等式的有关知识.

二、本章内容分析

本章教材是在初中介绍了不等式的概念学习了一元一次不等式和一元一次不等式组的解法,高一学习了一元二次不等式、简单分式不等式和含绝对值不等式的解法的基础上,研究不等式的性质、不等式的证明和一些不等式的解法.

本章内容分成五部分:第一部分讲不等式的基本概念;第二部分讲不等式的性质(五个定理三个推论);第三部分讲不等式的证明,其常用方法有比较法、综合法和分析法等;第四部分举例介绍不等式的解法,复习总结了一元二次不等式(组)、含绝对值不等式、简单高次不等式和分式不等式的解法;第五部分讲含绝对值不等式.同学们对不等式这一章要引起足够的重视,因为它的方法灵活多变、技巧性强、综合性强.

本章内容中,不等式的证明和不等式的解法是重点.不等式的性质及其证明、不等式的证明是难点,掌握不等式的性质是学好本章的关键.

三、学习目标一览

1. 通过本章学习深刻理解不等式的概念及性质,学会灵活应用不等式的证法.
2. 掌握各类不等式的解法,渗透分类讨论的数学思想方法.
3. 不等式在解决各类实际问题时有着广泛的应用,进一步培养学生实际应用能力.

四、学习方法点拨

1. 加强对不等式性质的理解,学习这部分内容必须记清不等式成立的条件.
 2. 抓好化归思想方法在不等式中的运用,即化未知为已知,化复杂为简单,化一般为特殊.
 3. 抓好数形结合思想在不等式中的运用,可提高解题速度和准确率.
 4. 抓好不等式证明中理论论证能力的提高.必须掌握不等式的证明方法.利用均值不等式求最值要注意“一正、二定、三等”.
 5. 抓好不等式的应用.高考中考查不等式多与其他知识交汇,一般表现在三个方面:一是研究函数的性质,如求函数的定义域、值域、最大值和最小值,函数的单调性等;二是方程与不等式解的讨论;三是实际问题中的应用.
- 总之,不等式是研究数学问题的重要工具,是培养推理证明能力的重要内容,它渗透在高中数学的各个部分.

B

6.1 不等式的性质

I 基础知识达标版

一、相关知识链接

1. 什么叫不等式?

用不等号($<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 、 $\neq$)连接起来的式子叫不等式.例如 $f(x) > g(x)$,
 $f(x) \geq g(x)$ 等.用“ $<$ ”或“ $>$ ”号连接的不等式叫严格不等式,用“ $\leq$ ”或
“ $\geq$ ”号连接的不等式叫非严格不等式.

2. 任意两个实数如何比大小?

我们知道,实数与数轴上的点是一一对应的.在数轴上不同的两点中,右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.例如图 6-1-1 所示,点 A 表示实数 a ,点 B 表示实数 b ,点 A 在点 B 的右边,那么 $a > b$.

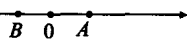


图 6-1-1

3. 实数的两个特征:

(1) 任意实数的平方不小于 0,即 $a \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a^2 \geq 0$.

(2) 任意两个实数都可以比较大小,反之,可以比较大小的两个数一定是实数.

二、教材知识详解

1. 不等式的性质是本章的理论基础,它包括实数大小与实数运算的关系及不等式的五个定理、三个推论.

实数大小比较的定义,是比较法证明不等式的基础.

(1) 实数大小比较的定义

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

上述三式左边是实数运算性质,右边反映的是实数大小顺序,合起来反映了实数的运算性质和大小顺序间的关系.它是本章的理论基础,是解不等式和证明不等式的依据.

(2) 不等式的性质

定理1(对称性) $a > b \Leftrightarrow b < a$;

定理2(传递性) $\left. \begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array} \right\} \Rightarrow a > c$;

定理3(加法性质) $\left. \begin{array}{l} a > b \\ c \in \mathbf{R} \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + c$;

推论 $\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$.

注意:①定理3是不等式移项法则的基础.②定理3推论是同向不等式相加法则的依据.它还可以推广到:任意有限个同向不等式的两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.

定理4(乘法性) $\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bc$;

推论1 $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bd$;

推论2 $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ n \in \mathbf{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow a^n > b^n$;

定理5(开方性质) $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ n \in \mathbf{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

2. 不等式的性质共5个,其中性质3、4、5要注意符号,另外还有一些常用的结论,学生也要掌握:“ $a > b$ 且 $ab > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.”;“ $a > b, c < d$, 则 $a - c > b - d$.”;“ $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.”在使用这些性质时,如果不满足条件,要注意符号的变换.因此,性质的灵活应用,构成本节的难点.

3. 学习不等式的基本性质,对表达不等式性质的各不等式,要注意“箭头”是单向的还是双向的,也就是说每条性质是否具有可逆性.运用不等式的基本性质解答不等

式问题,要注意不等式成立的条件,否则将会出现一些错误.例如,性质“ $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in \mathbb{Z}, n > 1)$ ”成立的条件是“ $n > 1$ 的整数, $a > b > 0$ ”,假如去掉“ $b > 0$ ”这个条件,取 $a = 3, b = -4, n = 2$,那么就会出现“ $3^2 > (-4)^2$ ”即“ $9 > 16$ ”的错误结论.

三、经典基础例题

【例1】若 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 且 $a > b, c > d$, 则().

- A. $a - c > b - d$ B. $ac > bd$ C. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ D. $a - d > b - c$

分析:不等式的性质是解、证不等式的理论基础,应用它必须注意它们适用的条件.

解:解法1:由已知得 $a > b, -d > -c$,

$\therefore a - d > b - c$ (两同向不等式相加). 选 D.

解法2:取特殊值:

令 $a = 2, b = 1, c = -3, d = -4$.

- A. $5 > 5$ 不成立; B. $-6 > -4$ 不成立;
C. $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$ 不成立; D. $6 > 4$ 成立. 故选 D.

点拨:在用特殊值解题时,取特殊值是关键,若取值不恰当,可能不能排除全部错误,需要再换值检验.

【例2】已知 $a > b$, 试比较 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$ 的大小.

分析:本题实际上考查不等式性质的逆用,当作差结果不能确定时,应根据结果的符号进行分类讨论.

解: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$,

$\because a > b, \therefore a - b > 0, b - a < 0$.

(1) 当 $ab > 0$ 时, 即 $a > b > 0$ 或 $b < a < 0$ 时,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0, \text{ 故 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

(2) 当 $ab < 0$ 时, 即 $a > 0 > b$ 时,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0, \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

点拨:作差比较法经常可用于两个代数式大小的比较,特别提醒学生符号的讨论.

【例3】比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小.

分析:比较两个实数 a 与 b 的大小,须归结为判断它们的差的符号,至于差是什么无关紧要.

解: $(a+3)(a-5) - (a+2)(a-4)$

$$= (a^2 - 2a - 15) - (a^2 - 2a - 8) = -7 < 0,$$

$$\therefore (a+3)(a-5) < (a+2)(a-4).$$

【例4】已知 $x \neq 0$, 比较 $(x^2 + 1)^2$ 与 $x^4 + x^2 + 1$ 的大小.

$$\text{解: } (x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - x^2 - 1 = x^2.$$

$$\because x \neq 0, \therefore x^2 > 0, \text{ 从而 } (x^2 + 1)^2 > x^4 + x^2 + 1.$$

点拨: 比较两个实数的大小, 基本方法是作差, 对差的正、负或零做出判断, 得出结论.

四、思维误区点击

本节常见的思维误区是: (1) 在利用不等式的性质证明不等式时, 往往由于记丢、记混条件而导致错误. (2) 错误地运用了同向不等式相加或相乘的法则. 克服的办法是必须有意识地加强训练, 记清定理的条件和结论, 可有效地避免错误的产生. (3) 在解题时, 把非等价转化当成等价转化, 导致结论出现错误.

【例1】判断下列各命题的真假, 并说明理由.

$$(1) \text{ 若 } a > b, \text{ 则 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$(2) \text{ 若 } a > b, c > d, \text{ 则 } ac > bd;$$

$$(3) \text{ 若 } a > b > 0 > c > d, \text{ 则 } ad < bc;$$

$$(4) \text{ 若 } a > b > 0, \text{ 则 } a^n > b^n (n \in \mathbb{Z}).$$

误区分析: 这道题可能产生以下几方面的错误:

对题(1)不自觉地添加了 $a > b > 0$ 的条件, 或取特殊值来判断, 只取 a, b 同号数字, 错误地认为(1)是正确的. 否定它其实并不难, 只要恰当地举出反例即可. 如 $a = 2, b = -1$, 所以(1)是假命题.

对题(2)的两个同向不等式相乘, 很容易忽略两数为正数的条件. 同样举反例即可. 如 $a = 2, b = 1, c = -2, d = -3$, 满足 $a > b, c > d$, 但 $ac < bd$, 所以(2)是假命题.

对题(3)只要正确运用不等式的性质不难得证.

$$\because a > b > 0 > c > d, \therefore a > b > 0, -d > -c > 0,$$

$$\therefore a(-d) > b(-c), \text{ 故 } ad < bc, \therefore (3) \text{ 是正确的.}$$

对题(4)容易把 $n \in \mathbb{Z}$ 当成 $n \in \mathbb{N}^*$, 审题不细心造成错误. 显然 $n = -1$ 时(4)为假命题.

点拨: 解这类题出现错误的原因除定理的条件记不清外, 再就是由审题不仔细, 马虎造成的.

【例2】求使关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (k+1)x + 2 = 0$ 有实根, 且二根的绝对值都小于1的 k 的取值范围.

错解: 设方程的两根为 x_1, x_2 , 则

$$\Delta = (k+1)^2 - 8k = k^2 - 6k + 1 \geq 0,$$