

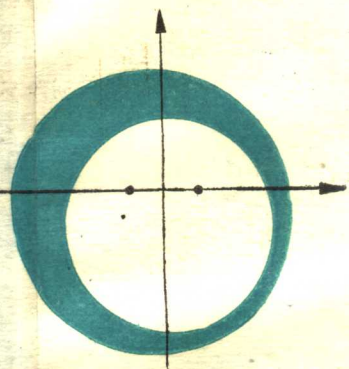
王向东 贾士代 编著

中学数学

实用解题方法与技巧

兵器工业出版社

上册



中 解題

方法与技巧

上 册

王向东 贾士代 编著

兵器工业

内 容 简 介

该书以新颁中学数学教学大纲为依据,以加强学生“双基”训练为准则,以提高学生的解题技能技巧为编写的指导思想。全书分上、下两册,各章自成体系,基本包括了高中数学的所有内容和主要题型及解题的基本方法。每章按“基本理论”、“方法与例题分析”、“习题精荟”、“习题答案或提示”四部曲逐步展开。对每一类型题,都简明扼要地阐明了解法的指导思想、理论依据及思维途径,并着重揭示解题的客观规律。

中学数学实用解题方法与技巧

王向东 贾士代 编著

责任编辑 张建刚 李卫 洁

兵器工业出版社出版发行

(北京市西城区百万庄10号)

各地新华书店经销

北京通县张家湾印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 26.125 字数: 548千

1989年8月北京第1版

1989年8月北京第1次印刷

印数 00,001—10,000册

ISBN 7-80038-135-6/G·23

定价: 8.40元 (上册: 4.45元, 下册: 3.95元)

目 录

第一章 集合..... 1

§ 1 集合的有关概念及运算..... 1

- 一、基本理论..... 1
- 二、方法与例题分析..... 3
- 三、习题精荟..... 12
- 四、习题答案或提示..... 13

§ 2 集合等式的证明方法..... 14

- 一、基本理论..... 14
- 二、方法与例题分析..... 15
- 三、习题精荟..... 24
- 四、习题答案或提示..... 24

§ 3 有限集元素个数的计算方法..... 25

- 一、基本理论..... 25
- 二、方法与例题分析..... 28
- 三、习题精荟..... 33
- 四、习题答案或提示..... 34

§ 4 集合的应用..... 35

- 一、方法与例题分析..... 35
- 二、习题精荟..... 43
- 三、习题答案或提示..... 44

第二章 函数..... 45

§ 1 求函数定义域的方法..... 45

- 一、基本理论..... 45
- 二、方法与例题分析..... 45
- 三、习题精荟..... 54
- 四、习题答案或提示..... 55

§ 2 求函数值域的方法..... 56

- 一、基本理论..... 56
- 二、方法与例题分析..... 57
- 三、习题精荟..... 74
- 四、习题答案或提示..... 74

§ 3 函数的奇偶性与单调性..... 76

- 一、基本理论..... 76
- 二、方法与例题分析..... 77
- 三、习题精荟..... 89
- 四、习题答案或提示..... 91

§ 4 函数的周期性..... 92

- 一、基本理论..... 92
- 二、方法与例题分析..... 93
- 三、习题精荟..... 104
- 四、习题答案或提示..... 105

§ 5 求函数极值的常用方法..... 106

- 一、基本理论..... 106
- 二、方法与例题分析..... 108
- 三、习题精荟..... 138
- 四、习题答案或提示..... 140

§ 6 简单函数方程的解法..... 142

- 一、基本理论..... 142
- 二、方法与例题分析..... 143
- 三、习题精荟..... 154
- 四、习题答案或提示..... 155

第三章 三角学..... 156

§ 1 三角恒等式的证法..... 156

- 一、基本理论..... 156
- 二、方法与例题分析..... 158
- 三、习题精荟..... 182
- 四、习题答案或提示..... 184

§ 2 三角不等式的证法..... 188

- 一、方法与例题分析..... 188
- 二、习题精荟..... 205
- 三、习题答案或提示..... 207

§ 3 反三角等式的证法..... 208

- 一、方法与例题分析..... 208
- 二、习题精荟..... 224
- 三、习题答案或提示..... 225

§ 4 三角法解证代数题..... 226

- 一、基本理论..... 226
- 二、方法与例题分析..... 227
- 三、习题精荟..... 238
- 四、习题答案或提示..... 240

§ 5 三角法解证平面几何题..... 241

- 一、基本理论..... 241
- 二、方法与例题分析..... 242
- 三、习题精荟..... 253
- 四、习题答案或提示..... 255

第四章 数列..... 257

§ 1 由递推公式求通项公式..... 257

- 一、基本理论..... 257
- 二、方法与例题分析..... 258
- 三、习题精荟..... 286
- 四、习题答案或提示..... 288

§ 2 数列前 n 项和的求法..... 291

- 一、方法与例题分析..... 291
- 二、习题精荟..... 306
- 三、习题答案或提示..... 307

§ 3 数列前 n 项积的解法..... 308

- 一、方法与例题分析..... 308
- 二、习题精荟..... 318
- 三、习题答案或提示..... 319

§ 4 极限的计算方法..... 320

- 一、方法与例题分析..... 320
- 二、习题精荟..... 336
- 三、习题答案或提示..... 338

第五章 复数..... 340

§ 1 解复数题的七个技巧..... 340

一、方法与例题分析..... 340

二、习题精荟..... 359

三、习题答案或提示..... 360

§ 2 复数法解代数题..... 361

一、方法与例题分析..... 361

二、习题精荟..... 374

三、习题答案或提示..... 375

§ 3 复数法解三角题..... 376

一、基本理论..... 376

二、方法与例题分析..... 376

三、习题精荟..... 385

四、习题答案或提示..... 386

§ 4 复数法解几何问题..... 387

一、基本理论..... 387

二、方法与例题分析..... 388

三、习题精荟..... 396

四、习题答案或提示..... 399

第六章 排列组合与二项式定理..... 400

§ 1 有附加条件的排列组合..... 400

一、基本理论..... 400

二、方法与例题分析..... 401

三、习题精荟..... 412

四、习题答案或提示..... 413

§ 2 组合等式的证法..... 414

一、方法与例题分析..... 414

二、习题精荟..... 425

三、习题答案或提示..... 427

§ 3 二项式定理的综合应用..... 423

一、方法与例题分析..... 428

二、习题精荟..... 433

三、习题答案或提示..... 439

第一章 集合

集合是现代数学中最基本的概念之一，由于这一概念的简单性、普遍性和抽象性，已使它渗透到数学的一切领域。在中学阶段学习集合知识，不仅是为了今后学习做准备，而且有利于加深对中学数学教材的理解，抓住数学的实质，同时能更好地培养学生分析问题、解决问题的能力。

中学阶段集合的内容与方法主要有：

1. 集合的有关概念及运算；
2. 集合等式的证明方法；
3. 有限集元素个数的计算方法；
4. 集合的应用。

§ 1 集合的有关概念及运算

一、基本理论

1. 集合

集合同其它的基本概念，例如点、直线、平面等一样，不能用其它更基本的概念下定义，而只能用数学语言来描述。

我们把一些具有某种共同性质的研究对象的全体叫做一个集合。其中，每一个对象都叫做这个集合的元素。

集合中的元素具有三个特征：确定性、互异性和无序

性。

集合按其元素的多少可分成有限集合和无限集合两大类。所谓有限集是含有限个元素的集合，所谓无限集是含无限个元素的集合。

集合通常可用列举法和描述法来表示。在大括号内，把集合中的全部元素罗列出来的方法叫做列举法；在大括号内，把集合中的全部元素的共同属性描述出来的方法叫做描述法。例如，不大于8的自然数的集合，用列举法表示为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，用描述法表示为 $\{x | 1 \leq x \leq 8, x \in N\}$ 或 $\{\text{不大于8的自然数}\}$ 。

几个常见集合的表示法：

实数集用 R 表示，正数集用 R^+ 表示，负数集用 R^- 表示，有理数集用 Q 表示，整数集用 Z 表示，正整数集用 N 表示，空集用 ϕ 表示。

2. 元素与集合、集合与集合的关系

(1) 元素与集合的关系

元素与集合的关系是属于与不属于的关系。如果 a 是集合 A 的一个元素，那么就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 B 的一个元素，那么就说 a 不属于 B ，记作 $a \notin B$ 或 $a \notin B$ 。

(2) 集合与集合的关系

集合与集合的关系是包含与互不包含的关系。如果集合 A 的任意一个元素都属于集合 B ，那么集合 B 包含集合 A （或集合 A 包含于集合 B ），记作 $B \supseteq A$ （或 $A \subseteq B$ ），并把集合 A 叫做集合 B 的子集。如果集合 A 是集合 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么 A 叫做 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 。若集合 A 不是集合 B 的子集，且 B 也不是 A 的子集，则把这两个集合的关系叫做互不包含，记作 $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$ 。

3. 集合的运算

在中学里,集合的运算通常是指“交”、“并”和“补”三种.

交集 由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且} x \in B\}$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\}$.

补集 如果集合 A 是全集 I 的一个子集,那么全集 I 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合,叫做集合 A 在全集 I 中的补集,记作 $\bar{A}$,即 $\bar{A} = \{x | x \in I, \text{且} x \notin A\}$.

二、方法与例题分析

解关于子集、交集、并集和补集综合题的方法主要是运用“子”、“交”、“并”和“补”等概念,把它们化为代数、三角和几何题,然后用有关知识去解.以下从几个方面举例谈谈这类问题的解法.

1. 化为代数方程问题

例1 若集合 $P = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $M = \{1, a + 1, a^2 - 2a + 2, -\frac{1}{2}(a^2 - 3a - 8), a^3 + a^2 + 3a + 7\}$,

且 $P \cap M = \{2, 5\}$, 则 a 的值等于 ().

(A) $\pm 1, 2$; (B) 2 ;

(C) $1, -2$; (D) $1, 3$.

解 $\because P \cap M = \{2, 5\}$, $\therefore 5 \in P$.

从而 $a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-1)(a-5)=0$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 1, 2.$$

当 $a=1$ 时, 在集合 M 中, $\because a^2-2a+2=1$, $\therefore 1$ 与 a^2-2a+2 相同. 这与集合中元素互异矛盾, 故 $a \neq 1$.

当 $a=-1$ 时, $P = \{2, 4, 5\}$, $M = \{1, 0, 5, 2, 4\}$, $P \cap M = \{2, 4, 5\}$ 与已知不符, 故 $a \neq -1$;

当 $a=2$ 时, $P = \{2, 4, 5\}$, $M = \{1, 3, 2, 5, 25\}$, $P \cap M = \{2, 5\}$. 这与已知条件吻合.

$\therefore a=2$. 故选 (B).

评注: (1) 上述解法用交集和元素与集合关系的概念, 把求 a 的值转化为解方程 $a^3-2a^2-a+2=0$.

(2) 作为选择题, 本题简捷的解法是验证、淘汰法, 把 $a=1$ 代入集合 M 中知, $a \neq 1$, 于是 (A)、(C)、(D) 都不对, 故选 (B).

例2 已知集合 $A = \{x | x^3 - px^2 + \pi x = 0\}$, $B = \{x | x^3 - (l+i)x^2 + qx = 0\}$, $A \cup B = \{0, 1, i, \pi, l\}$, 求 p, q 的值与集合 A, B .

分析: 因 A, B 中都有一个元素 0 , 可设它们的另两个元素分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 然后用韦达定理和并集的概念, 求出 p, q 和 $x_j (j=1, 2, 3, 4)$ 的值.

解 由已知可设 $A = \{0, x_1, x_2\}$, $B = \{0, x_3, x_4\}$, 则由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p, & \text{①} \\ x_1 x_2 = \pi, & \text{②} \\ x_3 + x_4 = l + i, & \text{③} \\ x_3 x_4 = q. & \text{④} \end{cases}$$

$$\text{又 } A \cup B = \{0, 1, i, \pi, l\},$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + i + \pi + l, \quad (5)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \pi i l. \quad (6)$$

$$(1) + (3) - (5), \text{ 得 } p = 1 + \pi.$$

$$(2) \times (4), \text{ 得 } x_1 x_2 x_3 x_4 = \pi q,$$

$$\text{代入 (6) 中, 得 } q = li.$$

从而把 p, q 的值分别代入 (1)、(4) 中, 解得

$$A = \{0, 1, \pi\}, B = \{0, l, i\}.$$

例3 对于点集 $A = \{(x, y) | x = m, y = -3m + 2, m \in N\}$, $B = \{(x, y) | x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in N\}$, 是否存在这样的非零整数 a , 使 $A \cap B \neq \emptyset$?

分析: 问题等价于是否存在非零整数 a , 使方程组

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = a(x^2 - x + 1) \end{cases} \quad \text{对 } x \text{ 有正整数解.}$$

解 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则存在非零整数 a , 使方程组

$$\begin{cases} y = -3x + 2, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = a(x^2 - x + 1), \end{cases} \quad (2)$$

对 x 有正整数解.

从 (1)、(2) 中, 消去 y 得

$$ax^2 - (a-3)x + a-2 = 0 \quad (3)$$

上述方程的两个根都是正整数, 从而

$$\begin{cases} (a-3)^2 - 4a(a-2) = 9 + 2a - 3a - 3a^2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 1 - \frac{3}{a} > 1, \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{2}{a} \geq 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3} < 3, \\ a < 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -1.$$

把 $a = -1$ 代入式③中，得

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$$

或 3.

故当 $a = -1$ 时， $A \cap B \neq \emptyset$.

小结：从例1~例3可知，在集合的元素中，含有某个（或某些）变数时，若已知这些集合间的一些关系（例如“交”、“并”、“补”等），则可将集合题转化为方程题，然后用方程知识去解。

2. 化为代数不等式问题

例4 已知集合 $A = \{x | -4 < x < -3\} \cup \{x | x > 3\}$ ，集合 $B = \{x | a \leq x \leq b, a, b \text{ 是常数}\}$ ，且 $A \cap B = \{x | 3 < x \leq 5\}$ ， $A \cup B = \{x | x > -4\}$ ，求 a, b 的值。

解 如图1-1. $A \cup B = \{x | x > -4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 < a \leq -3, & \text{①} \\ b \geq 3. & \text{②} \end{cases}$$

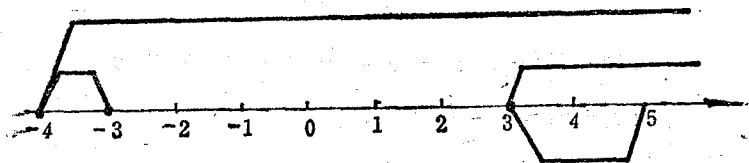


图1-1

$$A \cap B = \{x | 3 < x \leq 5\} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq a \leq 3, \\ b = 5. \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$\because$ 式①、③要同时成立, $\therefore a = -3$.

又 $\because$ 式②、④要同时成立, $\therefore b = 5$.

故 $a = -3, b = 5$.

例5 设集合 $A = \{x | |x^2 - 2x| \leq x\}$, $B = \{x |$

$$\left| \frac{x}{1-x} \leq \frac{x}{1-x} \right\}, C = \{x | px^2 + x + q < 0, p, q \text{ 是常}$$

数 $\}$, 且 $(A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = R$, 求 p, q 的值.

$$\text{解 } \because |x^2 - 2x| \leq x \Leftrightarrow |x| \cdot |x - 2| \leq x$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| \leq 1 \text{ 或 } x = 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x = 0,$$

$$\therefore A = \{x | 1 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x = 0\}.$$

$$\because \left| \frac{x}{1-x} \right| \leq \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 1, \quad \therefore B = \{x | 0 \leq x < 1\}.$$

$$\text{从而 } A \cup B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}.$$

$$\because (A \cup B) \cup C = R, \text{ 且 } (A \cup B) \cap C = \emptyset,$$

$$\therefore C = \{x | -\infty < x < 0 \text{ 或 } 3 < x < +\infty\}.$$

$$\text{于是 } px^2 + x + q < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ 或 } x > 3.$$

$$\text{从而} \begin{cases} px^2 + x + q \equiv px(x-3), \\ p < 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow px^2 + x + q \equiv px^2 - 3px \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{3}, \\ q = 0. \end{cases}$$

小结：当集合中的元素由不等式确定时，可用数轴或解不等式的方法处理这类集合问题。

3. 化为解析几何问题

例6 设集合 $M = \{(x, y) | y \geq x^2\}$ ， $P = \{(x, y) | x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$ ，那么使 $M \cap P = P$ 成立的充要条件为 ()。

(A) $a \geq \frac{5}{4}$; (B) $a = \frac{5}{4}$;

(C) $a \geq 1$; (D) $0 < a \leq 1$.

解 如图1-2集合M表示抛物线 $y = x^2$ 的内部区域（包括

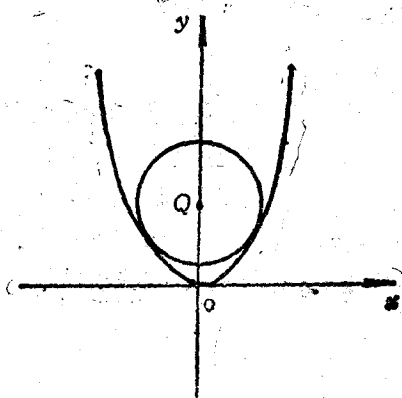


图1-2

边界)，集合 P 表示以点 $Q(0, a)$ 为圆心，半径为 1 的圆域（包括边界）。由图可知，要使 $M \cap P = P$ ，必须且只需圆在抛物线的内部区域（包括边界）。

设 (x_0, y_0) 是圆 Q 上任一点，则 $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 1$ ，
即 $x_0^2 = 1 - (y_0 - a)^2$ 。 ①

圆 Q 在抛物线的内部区域（包括边界）的充要条件为
 $y_0 \geq x_0^2$ 。 ②

把①代入②中得

$$y_0^2 + (1 - 2a)y_0 + a^2 - 1 \geq 0, \quad ③$$

$\because y_0$ 是圆 Q 上任一点的纵坐标，

$$\therefore \Delta = (1 - 2a)^2 - 4(a^2 - 1) \leq 0,$$

$$\text{即 } a \geq \frac{5}{4}. \quad \text{故选 (A).}$$

小结：当集合中元素的关系是二元二次或二元一次不等式时，可用解析几何中区域的理论解决这类问题。

例7 已知平面上三个点集： $A = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 25\}$ ， $B = \{(x, y) | (x+1)^2 + y^2 \leq 25\}$ ， $C_t = \{(x, y) | |x| \leq t, |y| \leq t, t > 0\}$ ，求满足 $C_t \subset A \cap B$ 时 t 的最大值。

解 如图 1-3. 集合 $A \cap B$ 表示两圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 与 $(x+1)^2 + y^2 = 25$ 的公共部分的区域，集合 C_t 表示以 $P(-t, t)$ 、 $Q(t, t)$ 、 $R(t, -t)$ 、 $S(-t, -t)$ 为顶点的正方形。把 $x = t$ ， $y = t$ 代入 $(x+1)^2 + y^2 = 25$ 中，得 $(t+1)^2 + t^2 = 25 \iff (t-3)(t+4) = 0$ 。

$$\because t > 0, \quad \therefore t = 3.$$

于是，满足 $C_t \subset A \cap B$ 的最大值为 3。

例8 已知集合 $A = \{\alpha | 0 < \alpha < 2\pi\}$ ， $B = \{(x, y) | x = \sin \alpha, y = \sin 2\alpha, \alpha \in A\}$ ，对于任意 $\alpha \in A$ ，有映射 $f: A \rightarrow B$ ；

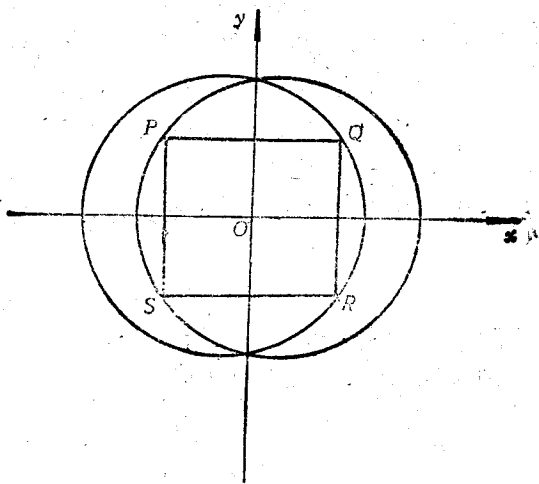


图1-3

又 $C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0 \}$, 求满足 $B \subseteq C$ 的 r 的最小值.

解 由已知易得 $B = \{ (x, y) \mid y^2 = 4x^2 - 4x^4, |x| \leq 1 \}$.
 设 $(x_0, y_0) \in B$, 由 $B \subseteq C$, 得

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= 5x_0^2 - 4x_0^4 \\ &= -4 \left(x_0^2 - \frac{5}{8} \right)^2 + \frac{25}{16} \leq r^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x_0 = \pm \sqrt{\frac{5}{8}}$ 时, $x_0^2 + y_0^2$ 取得最大值 $\frac{25}{16}$.

此时, r 有最小值 $\frac{5}{4}$.

小结: 用集合中元素满足的方程或不等式的几何意义, 可把集合问题转化为解析几何问题.

4. 化为排列组合问题

例9 求满足 $\{a_1, a_2\} \subseteq M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 的集合 M 的个数。

解 依题意，集合 M 的个数等于从 $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ 这 $n-2$ 个不同的元素中，依次取出 $0, 1, 2, 3, \dots, n-2$ 个不同元素的组合种数之和，即

$$C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}.$$

例10 已知集合 A 和集合 B 各有 12 个元素，集合 $A \cap B$ 中有 4 个元素，试求同时满足下列两个条件的集合 M 的个数：

(1) $M \subseteq A \cup B$ ，且 M 中含有 3 个元素；

(2) $M \cap A \neq \emptyset$ 。

分析： 本题实质上是求：从集合 $A \cup B$ 的 20 个元素中任取 3 个元素，但集合 A 中至少取 1 个的组合种数。

解 如图 1-4，依题意，满足两个条件的集合 M 的个数等于从集合 $A \cup B$ 的 20 个不同的元素中任取 3 个的组合种数减去从集合 B 内不属于 A 的 8 个不同的元素中任取 3 个的组合种数，即 $C_{20}^3 - C_8^3 = 1140 - 56 = 1084$ 。

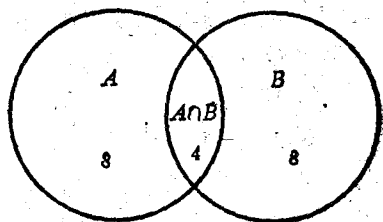


图1-4

小结： 类似例 9、例 10 这类求满足某条件的集合个数问题，可以转化为排列组合问题，用排列组合知识求解是非常方便的。