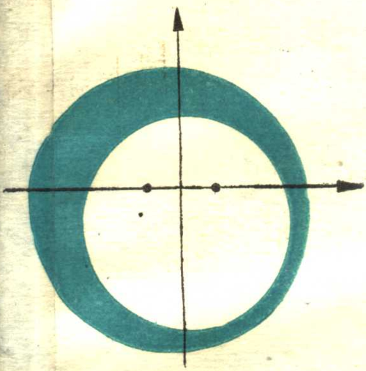
中学数学
实用解题方法与技巧

上册

王向东　贾士代　编著



兵器工业出版社

中　　　　　解题
方法与技巧
上　　册

王向东　贾士代　　编著

兵器工业

内 容 简 介

该书以新颁中学数学教学大纲为依据，以加强学生“双基”训练为准则，以提高学生的解题技能技巧为编写的指导思想。全书分上、下两册，各章自成体系，基本包括了高中数学的所有内容和主要题型及解题的基本方法。每章按“基本理论”、“方法与例题分析”、“习题精荟”、“习题答案或提示”四部曲逐步展开。对每一类型题，都简明扼要地阐明了解法的指导思想、理论依据及思维途径，并着重揭示解题的客观规律。

中学数学实用解题方法与技巧

王向东　贾士代　编著

责任编辑　张建刚　江卫　洁

兵器工业出版社出版发行

(北京市海淀区车道沟10号)

各地新华书店经销

北京通县张家湾印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：26.125　字数：548千

1989年8月北京第1版　　1989年8月北京第1次印刷

印数　00,001—10,000册

ISBN　7—80038—135—6/G·23

定价：8.40元（上册：4.45元，下册：3.95元）

目　录

第一章 集合

集合是现代数学中最基本的概念之一，由于这一概念的简单性、普遍性和抽象性，已使它渗透到数学的一切领域。在中学阶段学习集合知识，不仅是为了今后学习做准备，而且有利于加深对中学数学教材的理解，抓住数学的实质，同时能更好地培养学生分析问题、解决问题的能力。

中学阶段集合的内容与方法主要有：

1. 集合的有关概念及运算；
2. 集合等式的证明方法；
3. 有限集元素个数的计算方法；
4. 集合的应用。

§1 集合的有关概念及运算

一、基本理论

1. 集合

集合同其它的基本概念，例如点、直线、平面等一样，不能用其它更基本的概念下定义，而只能用数学语言来描述。

我们把一些具有某种共同性质的研究对象的全体叫做一个集合。其中，每一个对象都叫做这个集合的元素。

集合中的元素具有三个特征：确定性、互异性和无序

性。

集合按其元素的多少可分成有限集合和无限集合两大类。所谓有限集是含有限个元素的集合，所谓无限集是含无限个元素的集合。

集合通常可用列举法和描述法来表示。在大括号内，把集合中的全部元素罗列出来的方法叫做列举法；在大括号内，把集合中的全部元素的共同属性描述出来的方法叫做描述法。例如，不大于8的自然数的集合，用列举法表示为$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，用描述法表示为$\{x \mid 1 \leq x \leq 8, x \in N\}$或{不大于8的自然数}。

几个常见集合的表示法：

实数集用R表示，正数集用R^+表示，负数集用R^-表示，有理数集用Q表示，整数集用Z表示，正整数集用N表示，空集用ϕ表示。

2。元素与集合、集合与集合的关系

（1）元素与集合的关系

元素与集合的关系是属于与不属于的关系。如果a是集合A的一个元素，那么就说a属于A，记作$a \in A$；如果a不是集合B的一个元素，那么就说a不属于B，记作$a \notin B$或$a \bar{\in} B$。

（2）集合与集合的关系

集合与集合的关系是包含与互不包含的关系。如果集合A的任意一个元素都属于集合B，那么集合B包含集合A（或集合A包含于集合B），记作$B \supseteq A$（或$A \subseteq B$），并把集合A叫做集合B的子集。如果集合A是集合B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么A叫做B的真子集，记作$A \subset B$。若集合A不是集合B的子集，且B也不是A的子集，则把这两个集合的关系叫做互不包含，记作$A \not\subseteq B$，$B \not\subseteq A$。

3. 集合的运算

在中学里，集合的运算通常是指“交”、“并”和“补”三种。

交集　由既属于集合A又属于集合B的所有元素组成的集合，叫做集合A与集合B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A, \text{且} x\in B\}$.

并集　由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，叫做集合A与集合B的并集，记作$A\cup B$，即$A\cup B=\{x|x\in A \text{或} x\in B\}$.

补集　如果集合A是全集I的一个子集，那么全集I中不属于集合A的所有元素组成的集合，叫做集合A在全集I中的补集，记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=\{x|x\in I, \text{且} x\notin A\}$.

二、方法与例题分析

解关于子集、交集、并集和补集综合题的方法主要是运用“子”、“交”、“并”和“补”等概念，把它们化为代数、三角和几何题，然后用有关知识去解。以下从几个方面举例谈谈这类问题的解法。

1. 化为代数方程问题

例1　若集合$P=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，$M=\{1, a+1, a^2-2a+2, -\frac{1}{2}(a^2-3a-8), a^3+a^2+3a+7\}$，且$P\cap M=\{2, 5\}$，则$a$的值等于（　　）.

(A) ±1, 2;　　(B) 2;

(C) 1, -2;　　(D) 1, 3.

解　$\because P\cap M=\{2, 5\}$，$\therefore 5\in P$.

从而　$a^3-2a^2-a+7=5$

$\Longleftrightarrow (a+1)(a-1)(a-5)=0$

$\Longleftrightarrow a=\pm 1,\ 2$。

当$a=1$时，在集合M中，$\because a^2-2a+2=1$，$\therefore 1$与a^2-2a+2相同。这与集合中元素互异矛盾，故$a\neq 1$。

当$a=-1$时，$P=\{2,4,5\}$，$M=\{1,0,5,2,4\}$，$P\cap M=\{2,4,5\}$与已知不符，故$a\neq -1$；

当$a=2$时，$P=\{2,4,5\}$，$M=\{1,3,2,5,25\}$，$P\cap M=\{2,5\}$。这与已知条件吻合。

$\therefore a=2$。 故选(B)。

评注：（1）上述解法用交集和元素与集合关系的概念，把求a的值转化为解方程$a^3-2a^2-a+2=0$。

（2）作为选择题，本题简捷的解法是验证、淘汰法，把$a=1$代入集合M中知，$a\neq 1$，于是(A)、(C)、(D)都不对，故选（B）。

例2 已知集合$A=\{x\mid x^3-px^2+\pi x=0\}$，$B=\{x\mid x^3-(l+i)x^2+qx=0\}$，$A\cup B=\{0,1,i,\pi,l\}$，求$p$、$q$的值与集合$A$、$B$。

分析：因A、B中都有一个元素0，可设它们的另两个元素分别为x_1、x_2、x_3、x_4，然后用韦达定理和并集的概念，求出p、q和$x_j(j=1,2,3,4)$的值。

解 由已知可设$A=\{0,x_1,x_2\}$，$B=\{0,x_3,x_4\}$，则由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1+x_2=p, & ①\\ x_1x_2=\pi, & ②\\ x_3+x_4=l+i, & ③\\ x_3x_4=q. & ④\end{cases}$$

又 $A\cup B=\{0,1,i,\pi,l\}$，

$\therefore\quad x_1+x_2+x_3+x_4=1+i+\pi+l,$ ⑤

$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\pi il.$ ⑥

①+③-⑤，得 $p=1+\pi$。

②×④，得 $x_1x_2x_3x_4=\pi q$，

代入⑥中，得 $q=li$。

从而把p、q的值分别代入①、④中，解得

$$A=\{0,1,\pi\},B=\{0,l,i\}.$$

例3 对于点集$A=\{(x,y)|x=m,\ y=-3m+2,\ m\in N\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(n^2-n+1),n\in N\}$，是否存在这样的非零整数$a$，使$A\cap B\neq\phi$？

分析：问题等价于是否存在非零整数a，使方程组

$$\begin{cases}y=-3x+2\\ y=a(x^2-x+1)\end{cases}$$ 对x有正整数解。

解 若$A\cap B\neq\phi$，则存在非零整数a，使方程组

$$\begin{cases}y=-3x+2, & ①\\ y=a(x^2-x+1), & ②\end{cases}$$

对x有正整数解。

从①、②中，消去y得

$$ax^2-(a-3)x+a-2=0 \quad ③$$

上述方程的两个根都是正整数，从而

$$\begin{cases}(a-3)^2-4a(a-2)=9+2a-3a-3a^2\geq 0,\\ x_1+x_2=1-\dfrac{3}{a}>1,\\ x_1x_2=1-\dfrac{2}{a}\geq 1.\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2<\dfrac{1-\sqrt{28}}{3}\leq a\leq\dfrac{1+\sqrt{28}}{3}<3, \\ a<0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a=-1.$$

把$a=-1$代入式③中，得

$x^2-4x+3=0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Longleftrightarrow x=1$或3。

故当$a=-1$时，$A\cap B\neq\phi$。

小结：从例1～例3可知，在集合的元素中，含有某个（或某些）变数时，若已知这些集合间的一些关系（例如"交"、"并"、"补"等），则可把集合题转化为方程题，然后用方程知识去解。

2．化为代数不等式问题

例4 已知集合$A=\{x|-4<x<-3\}\cup\{x|x>3\}$，集合$B=\{x|a\leq x\leq b$，$a$、$b$是常数$\}$，且$A\cap B=\{x|3<x\leq 5\}$，$A\cup B=\{x|x>-4\}$，求$a$、$b$的值。

解 如图1-1。 $A\cup B=\{x|x>-4\}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4<a\leq -3, & ① \\ b\geq 3. & ② \end{cases}$$

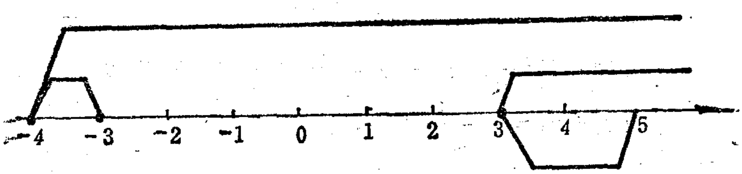


图1-1

$$A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 5\} \Longrightarrow \begin{cases} -3 \leq a \leq 3, & ③ \\ b = 5. & ④ \end{cases}$$

∵式①、③要同时成立，∴$a = -3$。

又∵式②、④要同时成立，∴$b = 5$。

故$a = -3, b = 5$。

例5 设集合$A = \{x \mid |x^2 - 2x| \leq x\}$，$B = \left\{x \mid \left|\dfrac{x}{1-x}\right| \leq \dfrac{x}{1-x}\right\}$，$C = \{x \mid px^2 + x + q < 0, p、q是常数\}$，且$(A \cup B) \cap C = \phi$，$(A \cup B) \cup C = R$，求$p$、$q$的值。

解 ∵$|x^2 - 2x| \leq x \Longleftrightarrow |x| \cdot |x-2| \leq x$

$\Longleftrightarrow |x-2| \leq 1$或$x = 0$ $\Longleftrightarrow 1 \leq x \leq 3$或$x = 0$，

∴$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3或x = 0\}$。

∵$\left|\dfrac{x}{1-x}\right| \leq \dfrac{x}{1-x} \Longleftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geq 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow 0 \leq x < 1$，　　∴$B = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$。

从而　$A \cup B = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$。

∵$(A \cup B) \cup C = R$，且$(A \cup B) \cap C = \phi$，

∴$C = \{x \mid -\infty < x < 0或3 < x < +\infty\}$。

于是　$px^2 + x + q < 0 \Longleftrightarrow x < 0或x > 3$。

从而 $\begin{cases} px^2+x+q\equiv px(x-3), \\ p<0. \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow px^2+x+q\equiv px^2-3px \Longleftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{1}{3}, \\ q=0. \end{cases}$$

小结：当集合中的元素由不等式确定时，可用数轴或解不等式的方法处理这类集合问题。

3. 化为解析几何问题

例6 设集合 $M=\{(x,y)\mid y\geq x^2\}$，$P=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$，那么使 $M\cap P=P$ 成立的充要条件为（　　）.

(A) $a\geq\dfrac{5}{4}$；　　(B) $a=\dfrac{5}{4}$；

(C) $a\geq 1$；　　(D) $0<a\leqslant 1$.

解 如图1-2集合 M 表示抛物线 $y=x^2$ 的内部区域（包括

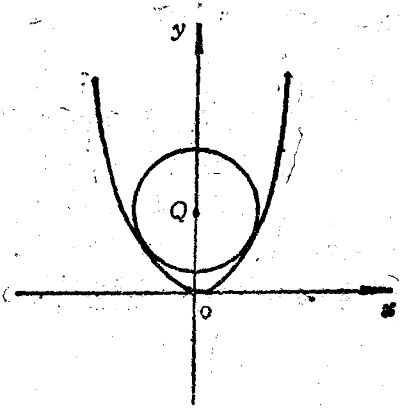


图1-2

边界），集合P表示以点$Q(0,a)$为圆心，半径为1的圆域（包括边界）。由图可知，要使$M\cap P=P$，必须且只需圆在抛物线的内部区域（包括边界）。

设(x_0,y_0)是圆Q上任一点，则$x_0^2+(y_0-a)^2=1$，

即$x_0^2=1-(y_0-a)^2$。 ①

圆Q在抛物线的内部区域（包括边界）的充要条件为

$$y_0\geq x_0^2. \quad ②$$

把①代入②中得

$$y_0^2+(1-2a)y_0+a^2-1\geq 0. \quad ③$$

∵ y_0是圆Q上任一点的纵坐标，

∴$\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)\leqslant 0$,

即 $a\geq\dfrac{5}{4}$。 故选（A）。

小结：当集合中元素的关系是二元二次或二元一次不等式时，可用解析几何中区域的理论解决这类问题。

例7 已知平面上三个点集：$A=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leqslant 25\}$，$B=\{(x,y)|(x+1)^2+y^2\leqslant 25\}$，$C_t=\{(x,y)||x|\leqslant t,|y|\leqslant t,t>0\}$，求满足$C_t\subset A\cap B$时$t$的最大值。

解 如图1-3。集合$A\cap B$表示两圆$(x-1)^2+y^2=25$与$(x+1)^2+y^2=25$的公共部分的区域，集合C_t表示以$P(-t,t)$、$Q(t,t)$、$R(t,-t)$、$S(-t,,-t)$为顶点的正方形。把$x=t$，$y=t$代入$(x+1)^2+y^2=25$中，得$(t+1)^2+t^2=25\Longleftrightarrow(t-3)(t+4)=0$。

∵ $t>0$， ∴ $t=3$。

于是，满足$C_t\subset A\cap B$的最大值为3。

例8 已知集合$A=\{\alpha|0<\alpha<2\pi\}$，$B=\{(x,y)|x=\sin\alpha,y=\sin2\alpha,\alpha\in A\}$，对于任意$\alpha\in A$，有映射$f:A\to B$；

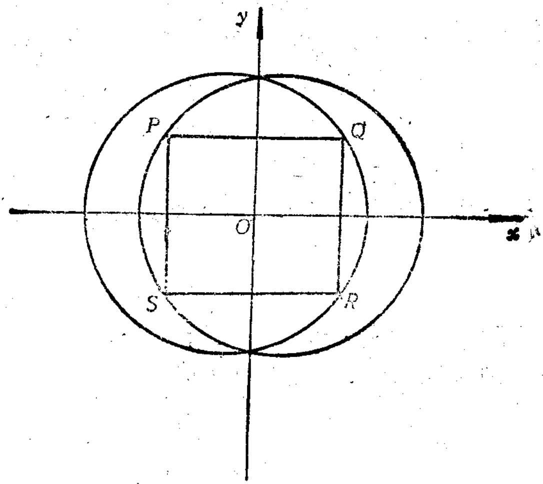


图1-3

又$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2, r>0\}$，求满足$B\subseteq C$的$r$的最小值。

解 由已知易得$B=\{(x,y)\mid y^2=4x^2-4x^4, |x|\leqslant 1\}$。设$(x_0,y_0)\in B$，由$B\subseteq C$，得

$$x_0^2+y_0^2=5x_0^2-4x_0^4$$

$$=-4\left(x_0^2-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}\leqslant r^2$$

$\therefore$当$x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{8}}$时，$x_0^2+y_0^2$取得最大值$\frac{25}{16}$。

此时，r有最小值$\frac{5}{4}$。

小结：用集合中元素满足的方程或不等式的几何意义，可把集合问题转化为解析几何问题。

4. 化为排列组合问题

例9 求满足$\{a_1, a_2\} \subseteq M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的集合$M$的个数。

解 依题意，集合M的个数等于从a_3，a_4，a_5，…，a_n这$n-2$个不同的元素中，依次取出0，1，2，3，…，$n-2$个不同元素的组合种数之和，即

$$C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}.$$

例10 已知集合A和集合B各有12个元素，集合$A \cap B$中有4个元素，试求同时满足下列两个条件的集合M的个数：

（1）$M \subset A \cup B$，且M中含有3个元素；

（2）$M \cap A \neq \phi$。

分析：本题实质上是求：从集合$A \cup B$的20个元素中任取3个元素，但集合A中至少取1个的组合种数。

解 如图1-4，依题意，满足两个条件的集合M的个数等于从集合$A \cup B$的20个不同的元素中任取3个的组合种数减去从集合B内不属于A的8个不同的元素中任取3个的组合种数，即$C_{20}^3 - C_8^3 = 1140 - 56 = 1084$。

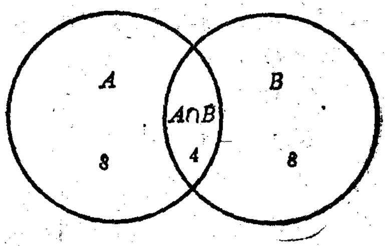


图1-4

小结：类似例9、例10这类求满足某条件的集合个数问题，可以转化为排列组合问题，用排列组合知识求解是非常方便的。